Die Tiderechnung als Problem der Numerischen Analysis

Ein Bericht über ihre Grundlagen und Methoden

von Dipl.-Math. F.K. Rubbert

BAW-Dienststelle für die Vertiefung der Seewasserstraßen, Hamburg

Gliederung:

Zusammenstellung der angewandten Bezeichnungen:

s : Ortskoordinate
t : Zeitkoordinate
b : Spiegelbreite
h : Mittlere Wassertiefe
u : Transportgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit)
c : LAGRANGEsche Geschwindigkeit kleiner Störungen
g : Erdbeschleunigung
A : Querschnittfläche des Profils
Q : Durchfluss (pro Zeiteinheit)
$g\chi$: Widerstandsglied
φ : Neigungswinkel des Bettgefälles
(2.3) bezeichnet die Formel 3 von Abschnitt 2
T 4 verweist auf das entsprechende Literaturzitat

1. Das hydraulische und das mathematische Problem

Die Vorausberechnung einer Tideflußregulierung ist nur möglich, wenn bereits der bestehende Zustand analytisch beherrscht wird. Und das ist schon ein kompliziertes hydraulisches Problem. Auf die Schwierigkeiten, die die Erfassung des Strömungswiderstandes bei der Tidebewegung bereitet, wurde in Heft 11 hingewiesen. In einem folgenden Bericht soll die Problematik des Differentialgleichungssystems der Flusstheorie behandelt werden. Parallel zu diesen Problemen der Hydraulik bedarf das damit verbundene Integrationsproblem einer eingehenden Diskussion. Die folgenden Ausführungen sollen Grundsätzliches über diesen Fragenkreis bringen.

Als L.FRANZIUS (um 189o) sich mit dem Ausbau der unteren Weser beschäftigte, glaubte er noch zur Vorausberechnung mit der Anwendung der LAGRANGEschen Geschwindigkeitsformel[1] auszukommen. Die völlige Unbrauchbarkeit dieser zu einfachen Methode zeigte sich schon in der Tatsache, dass die durch den Ausbau erzielten Hoch- und Niedrigwasserhöhen hinter den von FRANZIUS für Bremen berechneten um nicht weniger als 85 cm bzw. 2o8 cm zurückbleiben!

Nachdem OELTJEN 1919 darauf hingewiesen hatte, dass es für das vorliegende Problem unerlässlich sei, die Dynamische Gleichung der Flußtheorie heranzuziehen und ihr für den praktischen Einsatz die Gestalt einer Differenzengleichung zu geben, entwickelte REINEKE 1921 ein systematisches Verfahren der Vorausberechnung. Indem REINEKEs Methode die Tidekurve an der Mündung als gegeben ansieht und von einer willkürlichen Annahme der Wasserstände kurz vor Niedrigwasser ausgeht, ergeben sich schrittweise (in Richtung der Raumkoordinate) durch Probieren die gesuchten Tidekurven.

Die erzielte nahe Übereinstimmung zeigte die Möglichkeit einer solchen Berechnung. Dennoch muss aber mit allem Nachdruck darauf hingewiesen werden, dass REINEKEs Methode dem bei Problemen dieser Art einzig möglichen Berechnungsprinzip[2] nicht entspricht .

---

[1] Vergl. Formel (2.1)

[2] Man vergl. hierzu die Ausführungen des Abschnitts 2

Auf den Umstand, daß REINEKEs Annahme und "Probiermethode" zu falschen Resultaten führen können, hat bereits THORADE in seiner bekannten Monographie [T 11] aufmerksam gemacht. Jedoch muß das von THORADE in diesem Zusammenhang gestellte Problem Nr.29 als nicht vollständig formuliert bezeichnet werden. In diesem wird nämlich nach der Entwicklung der Flusstiden bei vorgegebener Mündungstide gefragt. Diese Formulierung ist in zweifacher Weise unvollständig, da die rechnerische Erfassung einer Flusstide auch die Vorgabe der Wasserbewegung an der (mehr oder weniger natürlichen) oberen Begrenzung der Berechnungsstrecke voraussetzt und ferner ohne die Angabe des Anfangszustandes (Abhängigkeit von der Vorgeschichte) nicht auskommt.

Ein Ausweg aus diesen Schwierigkeiten ist - wenigstens was die Aufstellung eines einwandfreien Verfahrens betrifft - für den theoretischen Hydrauliker sehr einfach. Zunächst bieten die bereits von SAINT-VENANT 1871 in voller Allgemeinheit und in der Erkenntnis ihrer Zusammengehörigkeit angegebenen Differentialgleichungen der Tideflusstheorie (Kontinuitätsgleichung und Dynamische Gleichung)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = g \sin\varphi - g \frac{\partial h}{\partial s} - g\chi \tag{2}$$

die Möglichkeit, ein System zweier partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der mittleren Tiefe $h \equiv A\, b^{-1}$ und der Transportgeschwindigkeit $u \equiv Q\, A^{-1}$ aufzustellen. Dieses lautet, wenn zur Vereinfachung von der Variation der Breite und auch von anderen möglichen Zusatzeffekten abgesehen wird:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + g \frac{\partial h}{\partial s} = g \sin\varphi - g\chi \tag{4}$$

Nach Hinzunahme der oben genannten Anfangs- und Randwerte ist das

Problem der Tidebewegung dann analytisch vollständig bestimmt, so daß nur noch die Frage nach dem günstigsten Integrationsverfahren übrig bleibt.

Bedenkt man, daß wegen des quadratischen Widerstandsgliedes keine explizite analytische Lösung möglich ist, dann liegt es nahe, numerisch zu verfahren. Und indem man hierbei den bzw. die Parameter variiert, lässt sich auch ein Einblick in die bestehenden Abhängigkeitsgesetze gewinnen.

Damit entsteht die Frage nach der günstigsten Methode zur numerischen Integration des vorliegenden Differentialgleichungssystems. Als Ideal wäre natürlich eine solche Methode anzusehen, die sich dem eigenartigen analytischen Verhalten dieser Systeme anpasst. Dieses Ziel ist vor ca. zehn Jahren auch erreicht worden, und zwar durch R.COURANT und seine Mitarbeiter, denen die Theorie und Praxis der partiellen Differential- und Differenzengleichungen der Mathematischen Physik in jeder Hinsicht grundlegende Arbeiten verdankt.

Bei dem allgemeinen COURANTschen Verfahren handelt es sich um eine mit konstanten Maschenweiten arbeitende Gittermethode. Dieses Differenzenverfahren ist recht einfach und hat sich bei der numerischen Integration der Differentialgleichungen der instationären Flusstheorie und der Gasdynamik[1] als sehr leistungsfähig bewährt.

Die auch mögliche numerische Integration längs Charakteristiken ist in dem Buch von CHRISTIANOWITSCH [T 1] ausführlich behandelt worden. Die Grundlage dieses vorteilhaften Verfahrens ist die nach MASSAU [T 4] benannte Netzkonstruktion.

Einen allgemeinen Überblick über die Methoden zur Lösung von Aufgaben der Gezeitenhydraulik verdankt man DRONKERS und SCHÖNFELD [T 2].

---

1) Es sei in diesem Zusammenhang besonders auf das grundlegende Werk von R.COURANT und K.O.FRIEDRICHS "Supersonic Flow and Shock Waves", N.Y. 1948, hingewiesen.

Von der umfangreichen Literatur des behandelten Gebietes wurden im Literaturverzeichnis i.a. nur die im Text genannten Monographien und Zeitschriftenartikel angeführt. Vollständigkeit sollte in keiner Weise angestrebt werden. Ferner muss darauf hingewiesen werden, dass sich sowohl die Theorie der Tidewellen als auch die der hier behandelten mathematischen Fragen z.Z. in lebendiger Entwicklung befindet, wie auch schon aus den genannten amerikanischen und russischen Publikationen der letzten Jahre hervorgeht.

Die angewandten Termini, Symbole und Abkürzungen entsprechen den in der mathematischen Fachliteratur üblichen.

Für eine kritische Durchsicht des Manuskriptes und für viele wertvolle Diskussionen ist der Verfasser Herrn ORR HORN vom Deutschen Hydrographischen Institut, Hamburg, sehr zu Dank verpflichtet.

2. Der analytische Charakter des Integrationsproblems

Bei der numerischen Lösung technischer Probleme ist nicht die Rechenfertigkeit das Entscheidende, sondern vielmehr die Einsicht in ihren inneren physikalischen Ablauf und in ihre analytische Struktur. Denn nur auf dieser Grundlage kann aus den i.a. zahlreichen formalen Möglichkeiten der Berechnung die brauchbarste Methode ausgewählt und in sinnvoller Weise durchgeführt werden.

Die erste Fragestellung in dieser Hinsicht betrifft die geeignetste Form der grundlegenden Differentialgleichungen des Problems. Zunächst liegt die Nützlichkeit der Symmetrisierung der beiden so verschiedenen partiellen Differentialgleichungen (1.3) und (1.4) nahe. Diese gelingt auf folgende Weise: Es wird die Geschwindigkeit[1)]

$$c \equiv \sqrt{g\ h} \qquad (1)$$

---

1) c kann als die LAGRANGEsche Wellengeschwindigkeit kleiner Störungen angesehen werden. - Andererseits ist c die "kritische Geschwindigkeit" der Wasserbewegung. Für Tidewellen ist $c > |u|$ anzunehmen, d.h. die hier betrachteten Wasserbewegungen sind "unterkritisch".

eingeführt und dann die Summe und Differenz der beiden Gleichungen gebildet. So gelangt man zu dem äquivalenten Gleichungspaar

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial}{\partial s}\right\}(u + 2c) = g\,(\sin\varphi - \chi) \qquad (2)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial}{\partial s}\right\}(u - 2c) = g\,(\sin\varphi - \chi) \qquad (3)$$

Seine hydraulische Deutung ist sehr einfach: Die Tidewelle als Funktion des Ortes und der Zeit ist die Resultante zweier entgegengesetzt gerichteter Elementarwellen.

Wie so oft in der Mathematischen Physik zeigt sich auch hier, dass eine naheliegende formale Vereinfachung zu Grundgleichungen führt, die sowohl die physikalischen als auch die analytischen Zusammenhänge klarer hervortreten lässt. Die mathematische Analyse des symmetrischen Gleichungssystems (2), (3) ergibt nämlich folgenden Sachverhalt: Die auftretenden Differentialoperatoren stellen - wie ein Vergleich mit der bekannten Formel

$$\frac{d\,z(s,t)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{ds}{dt}\frac{\partial z}{\partial s}$$

zeigt - Zeitdifferentiationen dar, die auf ausgezeichnete Eigenschaften der durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{ds}{dt} = u + c, \qquad \frac{ds}{dt} = u - c \qquad (4)$$

bestimmten Kurven $\xi(s,t) = \text{const.}$ bzw. $\eta(s,t) = \text{const.}$ hinweisen. Durch jeden Punkt P des Existenzbereichs in der s,t-Ebene gehen zwei charakteristische Kurven Γ_P^+, Γ_P^-, die man nach MONGE kurz als "Charakteristiken" bezeichnet, und zwar heisst Γ_P^- die "Vorwärtscharakteristik" und Γ_P^- die "Rückwärtscharakteristik" durch P. Die beiden "charakteristischen Richtungen" werden vom Lösungspaar (u,c) bestimmt. Die Gesamtheit dieser beiden reellen Kurvenscharen bildet in der s,t-Ebene ein ausgezeichnetes Kurvennetz, das als natürliches Koordinatensystem eingeführt werden kann.

In diesem Sinne ist das System (2), (3) als die "charakteristische Form" des Differentialgleichungsproblems anzusehen; seine Einführung verdankt man COURANT und LAX [H 3].

Zu den Charakteristiken eines beliebigen Systems zweier partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung gelangt man auch durch die Transformationstheorie, die Systemeigenschaften durch den Übergang zu neuen unabhängigen Variablen hervortreten lässt. Und zwar führt eine solche allgemeine "Charakteristische Transformation" zu dem Ergebnis, daß Systeme mit zwei konjugiert-komplexen, zwei verschiedenen reellen und zwei zusammenfallenden Charakteristiken existieren, die man in ihren Regularitätsbereichen als "elliptische" bzw. "hyperbolische" bzw. "parabolische" Systeme unterschiedet.

Durch diese Klassifizierung werden tiefliegende analytische Strukturen erfaßt, die zu völlig verschiedenen Lösungseigenschaften führen. So sind die hier (und allgemein in der Wellentheorie) auftretenden hyperbolischen Differentialgleichungssysteme dadurch charakterisiert, daß in ihnen die Zeitvariable eine ausgezeichnete Rolle spielt, und zwar derart, dass nur das nach CAUCHY benannte "Anfangswertproblem" gestellt werden kann. Das bedeutet bei dem vorliegenden Problem, daß die gesuchte Lösung $u(s,t)$, $c(s,t)$ (unter gewissen Stetigkeitseigenschaften und Differenzierbarkeitsbedingungen) nur für solche $t > t_o$ existiert und eindeutig bestimmt ist, die auf einen (beliebig wählbaren) Anfangszustand

$$u(s,t_o) = u_o(s), \qquad c(s,t_o) = c_o(s)$$

folgen. Hierdurch findet die bereits oben erwähnte Abhängigkeit der Tidewellen von ihrer "Vorgeschichte" ihren analytischen Ausdruck.

Zu diesen Anfangsbedingungen können noch die Randbedingungen

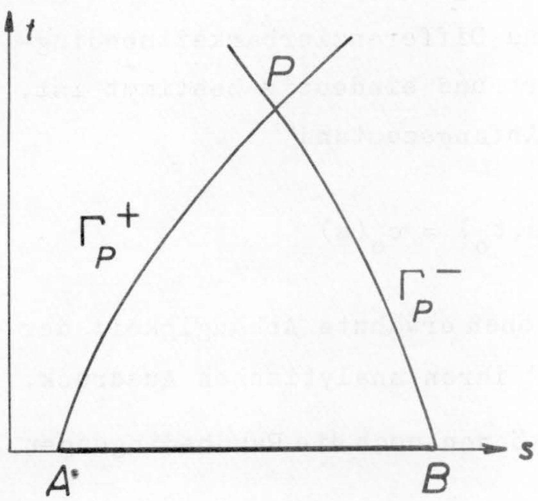
$$u(s_o t) = a(t), \qquad c(s_E,t) = e(t)$$

hinzutreten, wo s_o bzw. s_E die Koordinate des Anfangs- bzw. Endpunktes der Berechnungsstrecke bezeichnet. Aufgrund der durch das Differentialgleichungssystem ausgesprochenen Verknüpfung von u und c kann an jedem Randpunkt nur eine dieser beiden Funktionen vorgegeben werden.

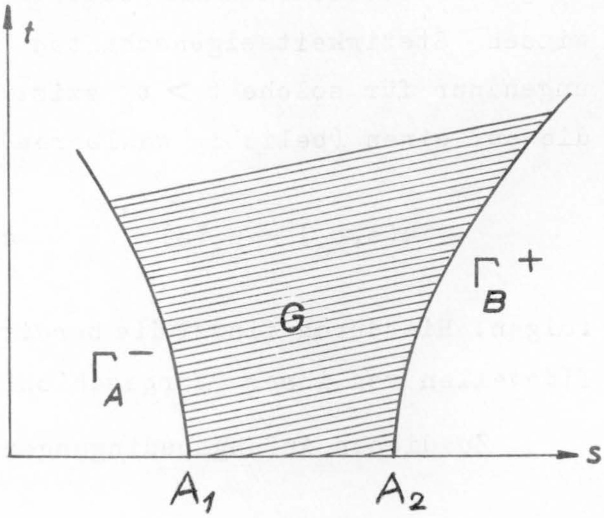
Durch diese Anfangs- und Randbedingungen ist das Lösungspaar (u,c) eindeutig bestimmt. Mit jeder Änderung der Anfangs- und Randwerte ist eine stetige Änderung der Werte von u und c verbunden.

Die fundamentale Bedeutung der Charakteristiken tritt bei einem Anfangswertproblem in folgender Weise in Erscheinung: Die Lösung in einem Punkte P(s,t) des Existenzbereichs wird nur von denjenigen Anfangswerten bestimmt, die zu dem von den beiden Charakteristiken Γ_P^+, Γ_P^- durch P herausgeschnittenen Abschnitt der s-Achse gehören. Die Strecke $[P^+ \; P^-]$ heisst in diesem Sinne das "Abhängigkeitsintervall" des Punktes P(s,t). Jede Änderung der Anfangswerte außerhalb $[P^+ \; P^-]$ hat also auf den Wert der Lösung in P(s,t) keinen Einfluß. Dieser Sachverhalt läßt sich auch in folgender Weise ausdrücken:

Eine Abänderung der Anfangswerte auf der Strecke $[A_1 \; A_2]$ der s-Achse beeinflußt die Lösung nur in einem Teil G ihres Existenzbereichs, und die Begrenzungslinien dieses "Einflussgebiets" von $[A_1 \; A_2]$ sind die beiden Charakteristiken $\Gamma_{A_1}^-$, $\Gamma_{A_2}^+$ durch die Begrenzungspunkte A_1 und A_2.



Abhängigkeitsintervall
des Punktes P(s,t)



Einflussgebiet
des Abschnitts $A_1 \; A_2$

Diese Begriffsbildungen, bei denen von Abänderungen von Funktionen nur in einem Teil ihres Definitionsbereichs die Rede ist, sind charakteristisch für das physikalische Verhalten von Ausarbeitungsvorgängen, die als Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungssysteme auftreten[1].

Von grundlegender Wichtigkeit für Probleme dieser Art ist ferner die Erkenntnis der Fortsetzbarkeit der Anfangsbedingungen, d.h. die Lösung hat auf jeder Geraden t = const. in der Umgebung der s-Achse dieselben Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften.

Sind die Anfangsbedingungen - wie bei vielen Problemen der Physik und Technik - nicht stetig und hinreichend oft differenzierbar, so ist i.a. die Existenz der Lösung eines Anfangs-Randwertproblems nicht mehr gesichert. Wie die wichtigen Untersuchungen von SOBOLEW H 15 ergaben, ist es dann aber möglich, "verallgemeinerte Lösungen" zu konstruieren, die sinngemässe Erweiterungen der Lösungen der klassischen Theorie linearer und quasilinearer Systeme[2] darstellen.

Auf die Schwierigkeiten, die bei hyperbolischen Problemen mit nichtlinearen Differentialquotienten und unstetigen Anfangsbedingungen auftreten, braucht hier nicht eingegangen zu werden, da das Differentialgleichungssystem der Tideflusstheorie (wegen des in u quadratischen Widerstandsgliedes) nur quasilinearen Charakter hat.

---

1) Weitere Beziehungen der Charakteristiken zur Theorie der Wellenausbreitung, speziell der Oberflächenwellen, findet man in den klassischen Monographien von HADAMARD [H 6] und LEVI-CIVITA [H 9], sowie in der Dissertation von SCHÖNFELD [T 9].

Andererseits muß darauf hingewiesen werden, daß sich die Lösungen der "elliptischen Systeme" der Potentialtheorie völlig anders verhalten; bei diesen kann auch nur das reine Randwertproblem gestellt werden. So hat jeder Gleichungstyp nur bei "sachgemäß gestellten" Bedingungen eine eindeutige Lösung. Man vergleiche hierzu den interessanten Aufsatz von JOHN [H 7].

2) Ausführliche Entwicklungen dieser Theorien findet man bei COURANT [H 2] und PETROWSKI [H 13].

3. Der Übergang zu Differenzengleichungen

Der erste Schritt zur numerischen Integration eines Systems von Differentialgleichungen besteht in seiner Approximation durch das ihm zugeordnete System von Differenzengleichungen und dem entsprechenden Übergang von der kontinuierlichen Ortskoordinate s und der Zeitkoordinate t zu einem Koordinatengitter durch

$$s_\mu \equiv s_o + \mu \Delta s, \qquad t_\nu \equiv t_o + \nu \Delta t \tag{1}$$

Hier bezeichnen

$$\Delta s = \frac{s_E - s_o}{m}, \qquad \Delta t = \frac{t_T - t_o}{n} \tag{2}$$

die als "Maschenweiten" auftretenden Schrittlängen der beiden unabhängigen Variablen. μ und ν durchlaufen alle ganzen Zahlen von Null bis zu den der Grösse des Raumintervalls $s_E - s_o$ bzw. des Zeitintervalls $t_T - t_o$ angepassten m bzw. n.

Die Funktionswerte in den Gitterpunkten (μ, ν) bezeichnet man der Einfachheit halber durch hoch und niedrig gestellte Indizes, d.h. es ist

$$u_\nu^\mu \equiv u(s_\mu,\ t_\nu), \qquad c_\nu^\mu \equiv c(s_\mu,\ t_\nu) \tag{3}$$

Die Anfangs- und Randbedingungen werden durch äquivalente Bedingungen in den entsprechenden Gitterpunkten ersetzt.

Die Approximation von Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ist in verschiedener Weise möglich. Je nachdem man nämlich die durch

$$\Delta y_\nu \equiv y_{\nu+1} - y_\nu, \qquad \nabla y_\nu \equiv y_\nu - y_{\nu-1}, \qquad \delta y_\nu \equiv y_{\nu+\frac{1}{2}} - y_{\nu-\frac{1}{2}}$$

definierten "Vorwärtsdifferenzen" mit dem Operator Δ, "Rückwärtsdifferenzen" mit dem Operator ∇, "Zentralen Differenzen" mit dem Operator δ anwendet, existieren schon für den ersten gewöhnlichen Differentialquotienten vier[1] verschiedene Näherungen mit Approxi-

---

1) Die vierte Möglichkeit folgt aus der STIRLINGschen Interpolationsformel durch Differentiation.

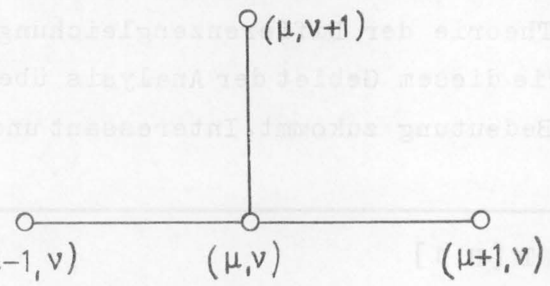
mationsfehlern, die sich sowohl im Betrag wie im Vorzeichen unterscheiden.

Die entsprechende Approximation eines partiellen Differentialquotienten im Gitterpunkt (μ, ν) führt zu Ausdrücken, die Linearkombinationen der Funktionswerte in den benachbarten Gitterpunkten darstellen. Die auf diese Weise formal möglichen Übergänge zu finiten Ausdrücken [1)] sind aber nicht alle anwendbar, da die in den nächsten Abschnitten zu behandelnden Forderungen der Konvergenz und der Stabilität nicht jede Gittermethode zulassen.

Jede partielle Differenzengleichung stellt eine algebraische Relation zwischen den Funktionswerten in benachbarten Gitterpunkten dar. Durch den Übergang zu Differenzengleichungen wird also aus den beiden Differentialgleichungen ein algebraisches Gleichungssystem. Seine leichte Auflösbarkeit nach den gesuchten Funktionswerten ist aber durchaus keine Trivialität. So ist THOMAS [T 1o] im Jahre 1937 die Auflösung seines ungünstig gewählten Systems von Differenzengleichungen nicht gelungen.

Die prinzipielle Möglichkeit dieser numerischen Behandlung eines hyperbolischen Problems beruht auf der erwähnten Fortsetzbarkeit seiner Anfangsbedingungen. Die Rechnung schreitet also sukzessiv in Richtung der Zeitachse vor. Aus den bekannten Funktionswerten einer Zeile ergeben sich die der nächsten durch rekursive Anwendung der in der o.a. Weise gewonnenen expliziten Rechenvorschrift.

Beim Fortschreiten vom Gitterpunkt (μ, ν) zum Gitterpunkt $(\mu, \nu + 1)$ kommen (verursacht durch die auftretenden räumlichen Differenzenquotienten) auch die Einflüsse der Nachbarpunkte $(\mu \pm 1, \nu)$ zur Geltung. Damit wird aber auch die sich sukzessiv ins Innere des Integrationsbereichs fortsetzende Wirkung der Randwerte klar.



---

1) Eine für die Belange der Praxis nützliche Zusammenstellung dieser Formel verdankt man PANOW N 12 .

4. Die Konvergenz des Approximationsverfahrens

Von grundsätzlicher Wichtigkeit ist zunächst die Bemerkung, dass die angewandte Gitterpunktmethode durchaus nicht nur die Bedeutung eines mehr oder weniger genauen Approximationsverfahrens zur numerischen Integration hat, sondern auch eine legitime und vielbenutzte Methode des Analytikers ist. So können mit ihrer Hilfe sogar die fundamentalen Existenzsätze bewiesen werden [1]. Bei dem hierfür durchzuführenden Grenzprozess, der sukzessive Verfeinerung des Koordinatengitters bedeutet, muß natürlich die Konvergenzfrage im Grenzfall bewiesen werden. Diese Fragestellung ist durchaus nicht trivial, d.h. aus dem Übergang der approximierenden Differenzengleichungen in die zu lösenden Differentialgleichungen folgt i.a. nicht die Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte Lösung.

Die Aufgabe einer Konvergenzuntersuchung besteht zunächst darin, möglichst allgemeine Bedingungen zu ermitteln, unter denen die in den Gitterpunkten definierten Funktionswerte gegen die Lösung des Differentialgleichungssystems konvergieren. Ihre Schwierigkeit erkennt man an der Bemerkung, daß es durchaus nicht selbstverständlich ist, daß bei dem Grenzprozess die Approximationslösung in der erwarteten Weise konvergiert. Ein Näherungsverfahren kann konvergieren und normale Verhältnisse vortäuschen, während es nicht gegen die gesuchte Lösung konvergiert, sondern gegen ein Element einer verwandten Funktionsklasse oder gar gegen eine völlig abweichende Phantom-Lösung [2].

Zu einer Einsicht in die die Konvergenz zerstörenden Einflüsse gelangt man durch folgende Betrachtung: Das Anfangs-Randwertproblem der Differentialgleichungstheorie geht durch den o.a. Zuordnungsprozess über in ein Anfangs-Randwertproblem von Differenzengleichungen. Die Theorie der Differenzengleichungen hat aber ihre eigenen Gesetze, wie diesem Gebiet der Analysis überhaupt eine völlig selbständige Bedeutung zukommt. Interessant und wesenserhellend

---

1) Z.B. bei BECKERT [H 1]

2) Dieser Terminus wurde aus dem englischen Schrifttum übernommen.

ist die Untersuchung der bestehenden Analoga. Andererseits stimmen bei hyperbolischen Problemen die "Charakteristiken" - und damit auch die Einfluss- und Abhängigkeitsbereiche - der Differenzengleichungen durchaus nicht überein mit denen des zugeordneten Differentialgleichungsproblems.

Die Beachtung dieses fundamentalen Unterschiedes und seiner Konsequenzen führt zu der Erkenntnis, dass eine konvergenzsichere Näherungslösung nur bei einer entsprechenden Anpassung der beiden Abhängigkeitsbereiche möglich ist. Das bedeutet, daß die Wahl des Verhältnisses $\Delta t : \Delta s$ von entscheidender Bedeutung ist.

Aufgrund dieser Einsicht muss bei dem vorliegenden Problem das Verhältnis $\Delta t : \Delta s$ so klein gewählt werden, dass der zu berechnende Gitterpunkt $(\mu, \nu + 1)$ innerhalb des Dreiecks liegt, das von den Basiseckpunkten $(\mu - 1, \nu)$ und $(\mu + 1, \nu)$ gebildet wird und dort die (sich aus den Richtungsfaktoren der entsprechenden Charakteristiken ergebenden) Neigungswinkel

$$\arctan \left\{ c_\nu^{\mu-1} + u_\nu^{\mu-1} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \arctan \left\{ c_\nu^{\mu+1} - u_\nu^{\mu+1} \right\}$$

besitzt. Diese Bedingung führt für die praktische Rechnung auf das leicht einzuhaltende Konvergenzkriterium

$$\Delta t < \frac{\Delta s}{c + u}$$

Wie COURANT, ISAACSON und REES [N 3] zeigten, ist aber auch der Übergang zu finiten Differenzen durchaus nicht willkürlich, indem sich ein konvergentes Gitterverfahren nur auf folgende Weise ergibt: In D.Gl. (2.2), die der Vorwärtscharakteristik zugeordnet ist, werden die Ableitungen nach der Raumkoordinate durch die entsprechenden Rückwärts-Differenzenquotienten approximiert, dagegen in der der Rückwärtscharakteristik zugeordneten D.GL.(2.3) durch die Vorwärts-Differenzenquotienten. Der Eigenart des Anfangswert - problems entsprechend, werden aber in jeder der beiden Differentialgleichungen die partiellen Ableitungen nach der Zeit durch Vorwärts-Differenzenquotienten ausgedrückt. Die Differenzengleichungen, die man auf diese Weise erhält, lassen sich leicht nach u_{v+1} und c_{v+1} auflösen [1].

Für die Berechnung innerer (d.h. randferner) Gitterpunkte haben KELLER und LAX [N 8] ein besonders einfaches Lösungsverfahren entwickelt.

Konvergenzbetrachtungen sind also auch bei der praktischen Rechnung mit finiten Differenzen erforderlich. Insbesondere verlangen auch diese ein Verständnis der analytischen Natur der Lösung, d.h. der fundamentalen Bedeutung der Charakteristiken.

5. Das Stabilitätsproblem

Bei der Anwendung eines konvergenten Differenzenverfahrens sollte es möglich sein, die Approximationsfehler durch die Wahl hinreichend kleiner Schrittlängen unter jede vorgegebene Schranke herunterzudrücken. Die praktische Durchführung der numerischen Integration einer partiellen Differentialgleichung zeigt aber, dass diese Annahme durchaus nicht immer richtig ist. Durch diese Erkenntnis ist das Stabilitätsproblem entstanden. Konvergenzbetrachtungen sind also i.a. nicht hinreichend zur Beurteilung der Brauchbarkeit eines numerischen Integrationsverfahrens.

Zunächst kann nämlich durch die Wahl eines nicht geeigneten Differenzenschemas eine die Lösung unbrauchbar machende Fehlerfortpflanzung auftreten. So entsteht z.B. durch die Anwendung Zentraler Differenzen i.a. eine sukzessiv wachsende Störwirkung der Abrundungsfehler, also eine instabile Lösung, obwohl der Zentrale Differenzenquotient mit der zu approximierenden Tangentenrichtung wesentlich besser übereinstimmt als der Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzenquotient [2].

Von dieser "Stabilität im Mittel", wie sie ausführlich O'BRIEN, HYMAN und KAPLAN [N 1o] untersucht haben, ist die "C-Stabilität" zu unterscheiden. Es ist nämlich durchaus möglich, dass auch bei

---

1) Die expliziten und recht einfachen Formeln findet man in den im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeiten von COURANT und STOKER.

2) Beispiele bei COLLATZ [N 1].

Annahme exakter Zahlenwerte die Lösung unbrauchbar wird, und zwar aufgrund eines aus dem inneren Formalismus des Approximationsverfahrens entstehenden Aufschaukelungsphänomens. Eine zusammenfassende Übersicht verdankt man LAX und RICHTMYER [N 9], eine ausführliche Monographie RICHTMYER [N 12].

Eine wichtige Frage ist die nach dem Zusammenhang zwischen der Stabilität und der Konvergenz eines Differenzenschemas. Und dieses tiefliegende theoretische Problem ist auch von großer praktischer Bedeutung, da es oft beträchtlich einfacher ist, die Stabilität bzw. Instabilität zu erkennen als die Konvergenz zu beweisen. Für das CAUCHYsche Problem einer umfassenden Klasse von Differentialgleichungen hat RJABENKI [N 14] nachgewiesen, dass ein C-stabiles Differenzenschema auch konvergent ist. Ein entsprechendes Äquivalenztheorem, das die Stabilität als die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz formuliert, wurde von LAX [N 9] für eine ausgezeichnete Klasse von Anfangswertproblemen aufgestellt.

Das o.a. COURANTsche Differenzenverfahren besitzt mit der Konvergenz- auch die Stabilitätseigenschaft. Bei seiner Anwendung können also keine Störungen durch Instabilitäten auftreten.

6. Die Genauigkeit der Näherungslösung

Ausser der Tatsache der Konvergenz muss auch die Güte der Konvergenz eines Gitterverfahrens geprüft werden, d.h. es ist notwendig, die Approximationsfehler des Lösungspaares, also die Ausdrücke

$$\varepsilon_u \equiv | u^\mu_\nu - u(s,t) | , \qquad \varepsilon_c \equiv | c^\mu_\nu - C(s,t) | ,$$

abzuschätzen. Diese wichtige Frage ist i.a. recht schwierig zu beantworten [1], obwohl sofort einzusehen ist, daß die zu bestimmenden Abweichungen um so kleiner sein werden, je genauer die in den Differentialquotienten durch Differenzenquotienten approximiert werden.

---

1) Grundsätzliches enthält die Arbeit von GERSCHGORIN [N 5]

Einen Einblick in die bestehenden Genauigkeitsverhältnisse gewinnt man auch durch die Betrachtung der Approximationsfehler der Differenzengleichungen. Im englischen Schrifttum wird diese Abweichung "truncation error" genannt. Insbesondere ergeben sich auf diese Weise explizite Ausdrücke zur Untersuchung der Wirkung einer Netzverfeinerung, die auch die günstigste Wahl des Verhältnisses $\Delta t : \Delta s$ erkennen lassen[1].

Außer diesen mathematischen Verfahrensfehlern, die - ebenso wie alle Abrundungs- und Messfehler - unvermeidbar sind und hinreichend klein gehalten werden müssen, sind die Ergebnisse einer Tiderechnung noch mit weiteren Ungenauigkeiten belastet. So lässt sich die physikalische Richtigkeit der Dynamischen Grundgleichung nie vollständig erreichen. Immerhin gestatten es die neueren Fortschritte der Hydrodynamik, die wichtigsten Effekte durch entsprechende Zusatzglieder zu berücksichtigen[2]. Dazu kommt die schwierige Erfassung des Strömungswiderstandes.

Eine weitere Schwierigkeit, die die Resultate einer Tiderechnung beeinflußt, ist die hinreichend genaue Erfassung der regellos wechselnden Morphologie. Auch hierdurch ist der mathematisch-formalen Betrachtungsweise eine Grenze gesetzt. Diese Frage läßt sich am einfachsten durch eine Vergleichsrechnung mit kleinerem Δs beantworten.

7. Der Einsatz moderner Grossrechenmaschinen

Die in den letzten 15 Jahren erfolgte Entwicklung der programmgesteuerten Rechenmaschinen hat der Numerischen Analysis die Lösung bisher unangreifbar komplizierter Probleme möglich gemacht, indem jetzt Rechnungen großen Umfanges ca. 1000-mal schneller bewältigt werden können. Der große Zeitgewinn rechtfertigt auch die

---

1) Ausführliche mathematische Entwicklung wird der Verfasser demnächst an anderer Stelle veröffentlichen.

2) Auf diese Effekte wird die angekündigte 2. Mitteilung des Verfassers ausführlich eingehen.

immerhin beträchtlichen Kosten, die der Einsatz dieser teuren Maschinen mit sich bringt. Auch auf den Zeit- und Geldaufwand für die erforderliche Programmierung muss hingewiesen werden.

Die Rechenoperationen kommen in einer programmgesteuerten Maschine durch das Zusammenwirken von Steuerwerk, Speicher und Rechenwerk zustande. Die handelsüblichen Maschinen arbeiten mit 1o - 12stelligen Dezimalzahlen und können durchschnittlich etwa 15 ooo Elementarbefehle in der Sekunde ausführen [1]. Die gesuchten Ergebnisse liefert das Registrierwerk in Form von Funktionstabellen, und zwar mit Hilfe von elektrischen Schreibmaschinen vom Fernschreibertyp.

Der Einsatz dieser elektronischen Hochgeschwindigkeits-Automaten ist zur Bewältigung der grossen Rechenarbeit einer hinreichend genauen Tiderechnung (insbesondere in einer nicht zu langen Zeitspanne) unbedingt erforderlich. Die notwendige Übertragung des Integrationsproblems in ein Rechenprogramm [2] ist leicht ausführbar. Insbesondere kann ein solchen Programm so eingerichtet werden, dass die i.a. notwendigen Wiederholungen der Rechnung mit oder ohne Variation der Parameter iterativ ausgeführt werden. Auf diese Weise kann man nicht nur die erforderliche Genauigkeitsuntersuchung leicht vornehmen, sondern auch den Einschwingvorgang bei einer Regulierungsrechnung in der einfachsten Weise durchführen. Der Wasserbauer hat damit auch die Möglichkeit, Baumassnahmen bester Wirkung zu erkennen.

Erfahrungen über Anwendungen auf Probleme der Fluss- und Gezeitenhydraulik liegen vor. Von FAURE [R 4] wurde die Tidebewegung der GIRONDE mit Hilfe einer IBM-Maschine untersucht. Die durch die Einteilung der Berechnungsstrecke und der Tidedauer notwendig gewesenen 9o ooo Rechenoperationen wurden auf diese Weise in 3o Stunden durchgeführt. Der CENTRALE STUDIENDIENST des MINISTERIE VAN VERKEER EN WATERSTAAT, Den Haag, läßt seine umfangreichen Voraus-

---

1) Die IBM 7o5 - III kann sogar 45 4oo logische Entscheidungen in der Sekunde durchführen

2) An ein bestimmtes Integrationsverfahren ist man dabei nicht gebunden

berechnungen auf der ARMAC des MATHEMATICAL CENTER, Amsterdam, durchführen. Über Methoden und Ergebnisse hat SCHÖNFELD [R 7, R 8] berichtet. Mit dem REMINGTON-RAND-UNIVAC der Universität New York sind die Hochwasserwellen der Jahre 1945, 1947, 195o auf dem OHIO und MISSISSIPPI berechnet worden. Für die Vorausberechnung einer Periode von drei Wochen benötigte diese Hochgeschwindigkeitsmaschine ca. vier Stunden. Berichte hierüber veröffentlichten ISAACSON, STOKER und TROESCH [N 3, N 4].

Außer den programmgesteuerten Ziffermaschinen sind im letzten Jahrzehnt auch "Analogiemaschinen" entwickelt worden. Diese stellen physikalische Modelle für Probleme der Analysis dar. Ihre Rechengenauigkeit ist daher beschränkt. Die Analogiemaschinen eignen sich auch für die Integration von Problemen der Gezeitenhydraulik; Näheres enthält eine Arbeit von SCHÖNFELD [R 9]. Über die Anwendung des GOODYEAR ELECTRONIC DIFFERENTIAL ANALYSER (GEDA) haben LAWLER und DRUML [R 6] berichtet.

Zusammenfassung

Die Vorausberechnung einer Tideflußregulierung ist ohne die Beherrschung des bestehenden Zustandes nicht möglich. Dieses Problem der theoretischen Hydraulik ist mit den Hilfsmitteln der modernen Numerischen Analysis lösbar.

Die Grundgleichungen zu einer analytischen Erfassung der Tidewellen sind die beiden Differentialgleichungen der instationären Flusstheorie von SAINT-VENANT. Dieses Gleichungssystem kann durch Einführung der LAGRANGEschen Wellengeschwindigkeit derart umgeformt und symmetrisiert werden, daß es in natürlicher Weise dem physikalischen Ablauf der Wellenbewegung des Wassers angepasst ist.

Für die besonders wichtige numerische Integration des Differentialgleichungssystems existiert ein einfaches Approximationsverfahren, das in organischer Verbindung mit dem analytischen Verhalten der Lösung steht. Diese von COURANT und seinen Mitarbeitern entwickelte und erprobte Methode eignet sich in hervorragendem Masse für die numerische Lösung des Anfangs-Randwertproblems einer Flusstide.

Der grosse Arbeits- und Zeitaufwand einer Tiderechnung kann durch den Einsatz einer elektronischen Rechenmaschine wesentlich verkürzt werden. Erfolgreiche Ergebnisse ausländischer Wissenschaftler liegen vor.

Auch der Binnenwasserbau kann die hier besprochenen Methoden und Ergebnisse verwerten, nämlich für die Berechnung von Hochwasserwellen, instationären Bewegungen in Kraftwerkskanälen und überhaupt für alle Schwall- und Sunkphänomene.

Die Ausführungen und Literaturangaben machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es sollte lediglich ein leichtverständlicher, aber doch die wesentlichen Grundlagen und mathematischen Fragestellungen hervorhebender Überblick gegeben werden über ein ebenso interessantes wie wichtiges Problem der theoretischen Hydraulik.

Literaturverzeichnis

Literatur über Tidewellen

T 1 CHRISTIANOWITSCH, S.A.: Nichtstationäre Bewegungen in Kanälen und Flüssen (russ.), Moskau 1938

T 2 DRONKERS, J.J.- SCHÖNFELD, J.C.: Tidal Computations in Shallow Water. Proc. Amer.Soc.Civ.Eng. 81(1955), No. 714

T 3 LINGHTHILL, M.J.- WHITHAM, G.B.: On Kinematic Waves I: Flood Movement in Rivers. Proc.Roy.Soc. A 229 (1955), 281-316

T 4 MASSAU, J.: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, Gent 1899

T 5 MORIKAWA, G.K.: Non-Linear Diffusion of Flood Waves in Rivers. Comm.Pure App.Math. lo (1957), 291-3o3

T 6 OELTJEN, J.: Über die Berechnung von Flutwellenlinien in einem Tideflusse. Zentralbl.d.Bauverw. 39(1919), 137-139

T 7 REINEKE, H.: Die Berechnung der Tidewelle im Tidefluß Jahrb.d.Gewässerkunde Norddeutschlands, Bes.Mitt., Band 3, Heft 4, Berlin 1921

T 8 SAINT-VENANT, B.de: Théorie du mouvement non permanent des eaux. Avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. Comptes Rend.Acad.Sci. 73(1871), 147-154

T 9 SCHÖNFELD, J.C.: Propagation of Tides and Similar Waves (Ministerie van Verkeer en Waterstaat) Den Haag 1951

T lo THOMAS, H.A.: Hydraulics of Flood Movements in Rivers (Carnegie Institute of Technology) Pittsburgh (Pa.) 1937, § 51

T 11 THORADE, H.: Probleme der Wasserwellen (Probleme der Kosmischen Physik, 13-14), Hamburg 1931, § 32

Literatur über Hyperbolische Gleichungssysteme

H 1	BECKERT, H.:	Über quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Das Anfangswertproblem, die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe, das charakteristische Problem. Ber. Akad. Leipzig, Math.Nat.Kl., 97(195o), Nr. 5
H 2	COURANT, R.- HILBERT, D.:	Methoden der Mathematischen Physik, Band II, Berlin 1937, 5. Kap.
H 3	COURANT, R.- LAX, P.:	On Nonlinear Partial Differential Equations with Two Independent Variables. Comm. Pure Appl.Math. 2(1949), 255-273
H 4	DOUGLIS, A.:	Existence Theorems for Hyperbolic Systems Comm.Pure Appl.Math. 5(1952), 119-154
H 5	HAACK, W.- HELLWIG, G.:	Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen 1.Ordnung. Math.Z. 53(195o), 244-266
H 6	HADAMARD, J.:	Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris 1932
H 7	JOHN, F.:	A note on "Improper" Problems in Partial Differential Equations. Comm. Pure Appl.Math. 8 (1955), 591
H 8	LAX, P.- KELLER, J.B.:	The Initial and Mixed Boundary Value Problem for Hyperbolic Systems, Los Alamos-Rep. LAMS 12o5(1951)
H 9	LEVI-CIVITA, T.:	Caractéristiques des systèmes différentielles et propagation des ondes, Paris 1932
H 1o	MORSE, P.M.- FESHBACH, H.:	Methods of Theoretical Physics, Vol. I, New York 1953, p. 7o6
H 11	PERRON, O.:	Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet. Math.Z. 27(1928), 549-564
H 12	PETROWSKI, I.G.:	Über Wellendiffusion und Lückengebiete bei hyperbolischen Differentialgleichungen (russ.) Math.Sammelhefte 17(1945), 289-37o
H 13	"	Vorlesungen über Partielle Differentialgleichungen (Ü. aus dem Russ.), Leipzig 1955
H 14	SAUER, R.:	Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen. 2.Aufl., Berlin 1958
H 15	SOBOLEW, S.L.:	Differentialgleichungen der Math.Physik (russ.) Moskau-Leningrad 195o, pp 299, 3o7
H 16	TAYLOR, M.:	On the Existence and Uniqueness of the Solution of Cauchy's Problem for a System of two First Order Partial Differential Equations. Proc. Lond.Math.Soc.(2), 3o(1929), 248-263

Literatur über Numerische Integration

N 1	COLLATZ,L.:	Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2.Aufl., Berlin 1955
N 2	COURANT,R.-FRIEDRICHS,K.O.-LEWY,H.:	Über die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, Math.Ann. 1oo(1928), 32-74
N 3	COURANT,R.-ISAACSON,E.-REES,M.:	On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences.Comm.Pure Appl.Math. 5(1952), 243-255
N 4	EDDY,R.P.:	Stability in the Numerical Solution of Initial Value Problems in Partial Differential Equations, Nav.Ord.Lab. Mem.1o232(1949)
N 5	GERSCHGORIN,S.:	Fehlerschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen ZAMM 1o(193o), 373-382
N 6	ISAACSON,E.-STOKER,J.J.-TROESCH,B.A.:	Numerical Solution of Flood Prediction and River Regulation Problems, Rep. II, III New York Univ.-Rep. IMM 2o5, 235 (1954), (1956)
N 7	"	Numerical Solution of Flow Problems in Rivers. Pap. 181o, Proc.Am.Soc.Civ.Eng. Y 5 1958
N 8	KELLER,J.B.-LAX,P.:	Finite Difference Schemes for Hyperbolic Systems, Los Alamos-Rep. LAMS 12o1 (195o)
N 9	LAX,P.-RICHTMYER,R.D.:	Survey of the Stability of the Solution of Linear Finite Difference Equations. Comm. Pure Appl.Math. 9(1956), 267-293
N 1o	LEWY,H.:	On the Convergence of Solutions of Difference Equations,Studies and Essays:Courant Anniversary Volume, New York 1948, 211-214
N 11	O'BRIEN,G.G.-HYMAN,M.A.-KAPLAN,S.:	A Study of the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Journ. Math. Phys. (Mass.) 29(1951), 223-251
N 12	PANOW,D.J.:	Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren (Übers. aus dem Russ.) B.1955
N 13	RICHTMYER,R.D.:	Difference Methods for Initial-Value Problems, New York 1957
N 14	RJABENKI,W.S.:	Über die Anwendung der Differenzenmethode zur Lösung des CAUCHYschen Problems (russ.) Ber.Akad.Moskau 86(1952), 1o71-1o72
N 15	STOKER,J.J.:	Water Waves, New York, Ch.11: Mathematical Hydraulics

<u>Literatur über Grossrechenmaschinen</u>

R 1	BERKELEY,E.C.:	Giant Brains or Machines that think, New York 1949
R 2	BÜCKNER,H.:	Moderne Rechenmaschinen,Handbuch der Physik, Band II,2 Berlin 1955, 471-498
R 3	COUFFIGNAL,L.:	Les machines à penser, Paris 1952
R 4	FAURE,M.:	Calcul des pertes d'énergie dans un estuaire à marée (Gironde)-Principe et exécution du calcul à l'aide d'une machine mathématique,La Houille Blanche B 1953,747-759
R 5	KORN,G.A.- KORN,M.T.:	Electronic Analogue Computers, New York 1952
R 6	LAWLER,E.A.- DRUML,F.V.:	Hydraulic Problem Solution on Electronic Computers, Proc. Amer. Soc. Civil Eng.84, WW 1(1958), no.1515
R 7	SCHÖNFELD,J.C.:	Getijberekening met de ARMAC CSD-Nota 56-9, Den Haag 1956
R 8	"	Methode van geprogrammeerde berekening van getijden en stormvloeden,CSD-Nota 56-1o, Den Haag 2956
R 9	"	Analogue Methods for Storm Surge Problems CSD-Nota 57-5, Den Haag 1957
R 1o	WILKES,M.V.- WHEELER,D.J.- Gill,S.:	The Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer 2.ed.Reading (Mass.) 1957