

64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

Gliederung:

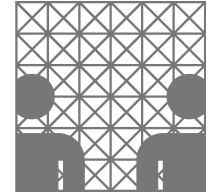
- Teil I: Einleitung, Wurzeln, Grundbegriffe
- Teil II: Fourierreihenentwicklung, Fourieranalyse
- Teil III: Komplexe Fourierreihe, Fouriertransformation
- Teil IV: Faltung, Abtastung, Korrelation
- Teil V: Eigenschaften und Theoreme der Fouriertransformation**
- Teil VI: n-dim. Fouriertransformation, Faltung und Korrelation
- Teil VII: Gabor- und Wavelet-Transformation, Multiskalenanalyse
- Teil VIII: Sensoren, Rauschen, Rauschreduktion
- Teil IX: Diffusionsgleichungen
- Teil X: Bildfolgenanalyse, Bewegungsschätzung
- Teil XI: Registrierung, Extraktion von Landmarken
- Teil XII: Nichtlineare Deformation, Fusion
- Teil XIII: Signalverarbeitung auf Diskreten Oberflächen



Universität Hamburg

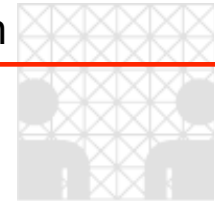
Department
Informatik

Arbeitsbereich
Kognitive Systeme (KOGS)



Teil V: Eigenschaften und Theoreme der Fouriertransformation





Eigenschaften der 1-D Fouriertransformation

Gerade und ungerade Funktionen

Fkt. $E(t) = E(-t)$ symmetrische (= gerade, 'even') Funktion, $f_g(t)$
 $O(t) = -O(-t)$ anti-symmetrische (= ungerade, 'odd') Funktion, $f_u(t)$
 ($E(t)$ und $O(t)$ sind im allgemeinen komplexwertige Funktionen)

Jede beliebige (reelle) Funktion kann stets in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegt werden: $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$

Somit gelten:

$$f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) = f_g(-t)$$

und

$$f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) = -f_u(-t)$$

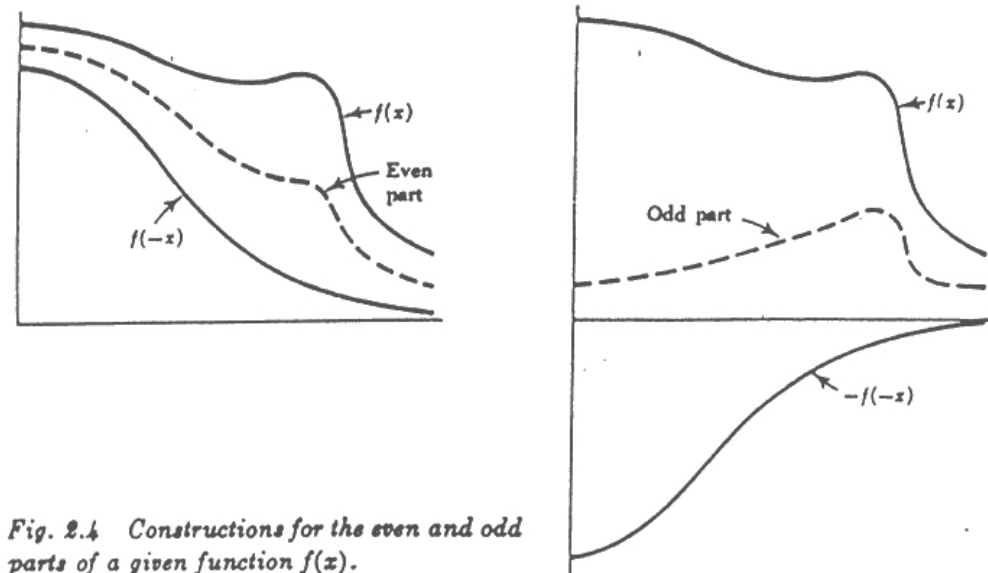
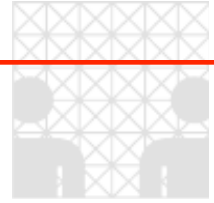


Fig. 2.4 Constructions for the even and odd parts of a given function $f(x)$.

(aus R.N. BRACEWELL, 1978)



Sonderfall: Kausale Funktionen

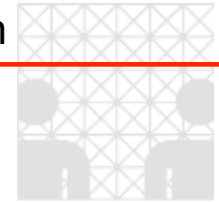
Def. kausaler Funktionen (aus H. D. LÜKE, 1988)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ f(t), & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = f(t) \cdot H(t): \text{ zeitlich „eingeschaltetes“ Signal}$$

Zerlegung in gerade und ungerade Anteile:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_g(t) + f_u(t) \\ \Rightarrow (f_g(t) + f_u(t)) \cdot H(t) &= f_g(t) \cdot H(t) + f_u(t) \cdot H(t) \\ f_g(t) \cdot H(t) &= \left(\frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(-t)\right) \cdot H(t) = \frac{1}{2} f(t) \cdot H(t) \\ f_u(t) \cdot H(t) &= \left(\frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(-t)\right) \cdot H(t) = \frac{1}{2} f(t) \cdot H(t) \\ \Rightarrow f(t) = f_g(t) + f_u(t) &= \frac{1}{2} f(t) \cdot H(t) + \frac{1}{2} f(t) \cdot H(t) \\ &= 2 f_u(t) \cdot H(t) \\ f_g(t) &= 2 f_u(t) \cdot H(t) - f_u(t) \\ &= f_u(t) \cdot \underbrace{(2H(t) - 1)}_{\text{sgn}(t)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_g(t) = f_u(t) \cdot \text{sgn}(t)$$



Fouriertransformation von $f_g(t) + f_u(t)$ speziell für reellwertige Zeitfunktionen:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f_g(t) + f_u(t)) (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \int_0^{\infty} f_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \cdot 2 \int_0^{\infty} f_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt \right)$$

und allgemein für eine komplexwertige Zeitfunktion gilt:

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t) = \text{Re}\{f_g(t)\} + j \text{Im}\{f_g(t)\} + \text{Re}\{f_u(t)\} + j \text{Im}\{f_u(t)\}$$

$$F(\omega) = F_G(\omega) + F_U(\omega) = \text{Re}\{F_G(\omega)\} + j \text{Im}\{F_G(\omega)\} + \text{Re}\{F_U(\omega)\} + j \text{Im}\{F_U(\omega)\}$$

d.h. für eine reellwertige Funktion $f(t)$ gilt somit als Spezialfall:

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$$

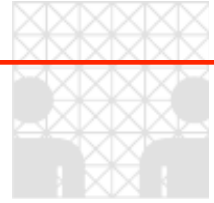
$$F(\omega) = \text{Re}\{F(\omega)\} + j \cdot \text{Im}\{F(\omega)\}$$

mit Amplituden-/Betragsspektrum

$$|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}\{F\}^2 + \text{Im}\{F\}^2},$$

Leistungsspektrum $|F(\omega)|^2$

und Phasenspektrum $\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{F\}}{\text{Re}\{F\}}\right)$



Weiterhin gilt für gerade reellwertige Funktionen $f_g(t)$

$$F_g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (\text{Fourier-Cosinus-Transformation})$$

bzw. für ungerade reellwertige Funktionen $f_u(t)$

$$F_u(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt \quad (\text{Fourier-Sinus-Transformation})$$

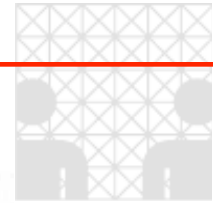
Hinweis: Die 2-dimensionale Form der diskreten Cosinus-Transformation war 1988 die Grundlage für die 8x8-Block-basierte JPEG-Kompression von digitalen Grauwert-Bildern (JPEG: Joint (CCITT & ISO) Photographic Experts Group).

"Forward DCT":
$$F(u, v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \left[\sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right]$$

„Inverse DCT“:
$$f(x, y) = \frac{1}{4} \left[\sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 C(u) C(v) F(u, v) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right]$$

mit $C(u), C(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $u = v = 0$ und $C(u), C(v) = 1$ für $u = v \neq 0$

(aus: G.K. Wallace (1991) The JPEG Still Picture Compression Standard.
CACM 34:4, pp. 30-44)



Hermitesche Funktionen (Sonderfall symmetrischer Funktionen)

$f(t)$

 $\left\{ \begin{array}{l} \text{reeller Anteil} \\ + \\ \text{imaginärer Anteil} \end{array} \right.$

 $\left\{ \begin{array}{l} = \text{gerade Funktion} \\ \\ = \text{ungerade Funktion} \end{array} \right.$

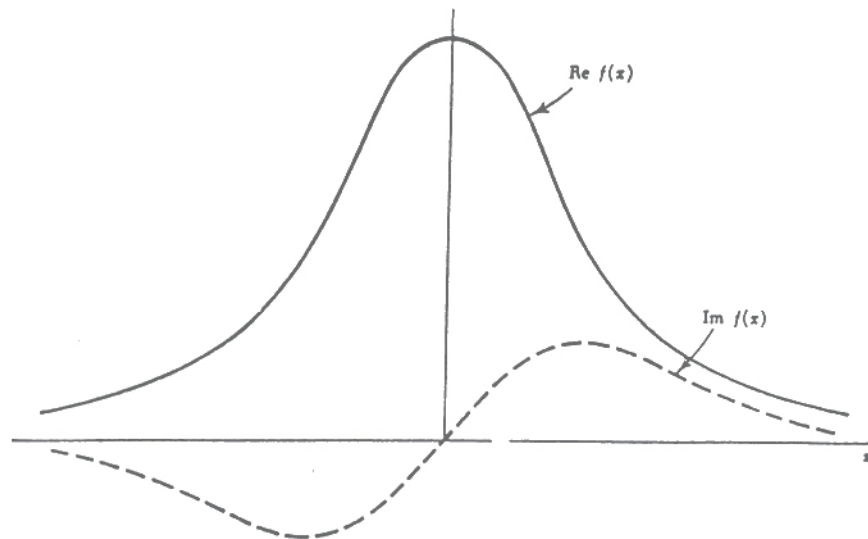


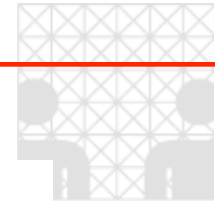
Fig. 2.6 Hermitian functions have their real part even and their imaginary part odd. Their Fourier transform is pure real.

(aus R. N. Bracewell, 1978)

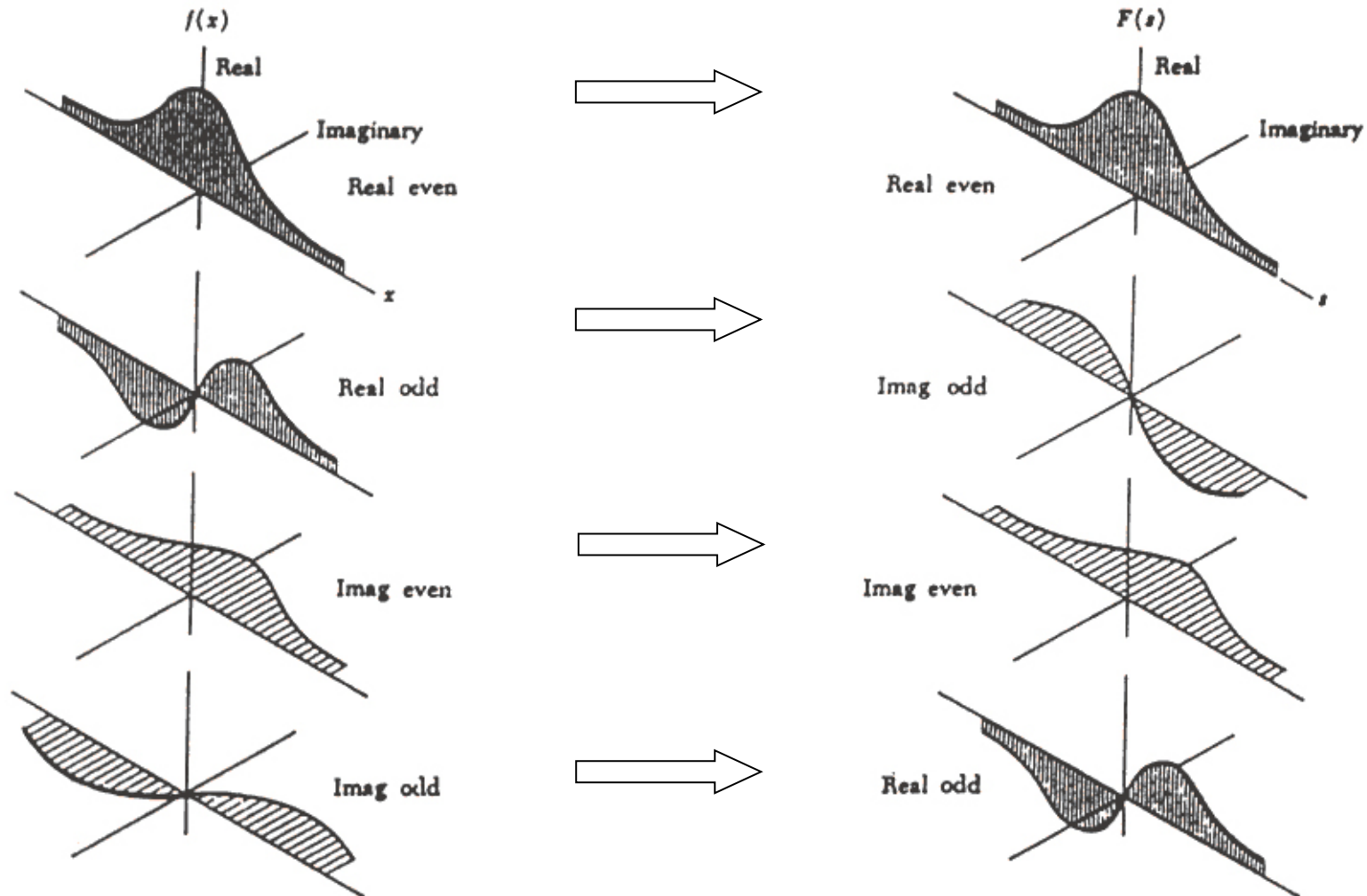


Charles Hermite
 (1822 – 1901),
 franz. Mathematiker,
 u.a. Beweis der
 Transzendenz der Zahlen

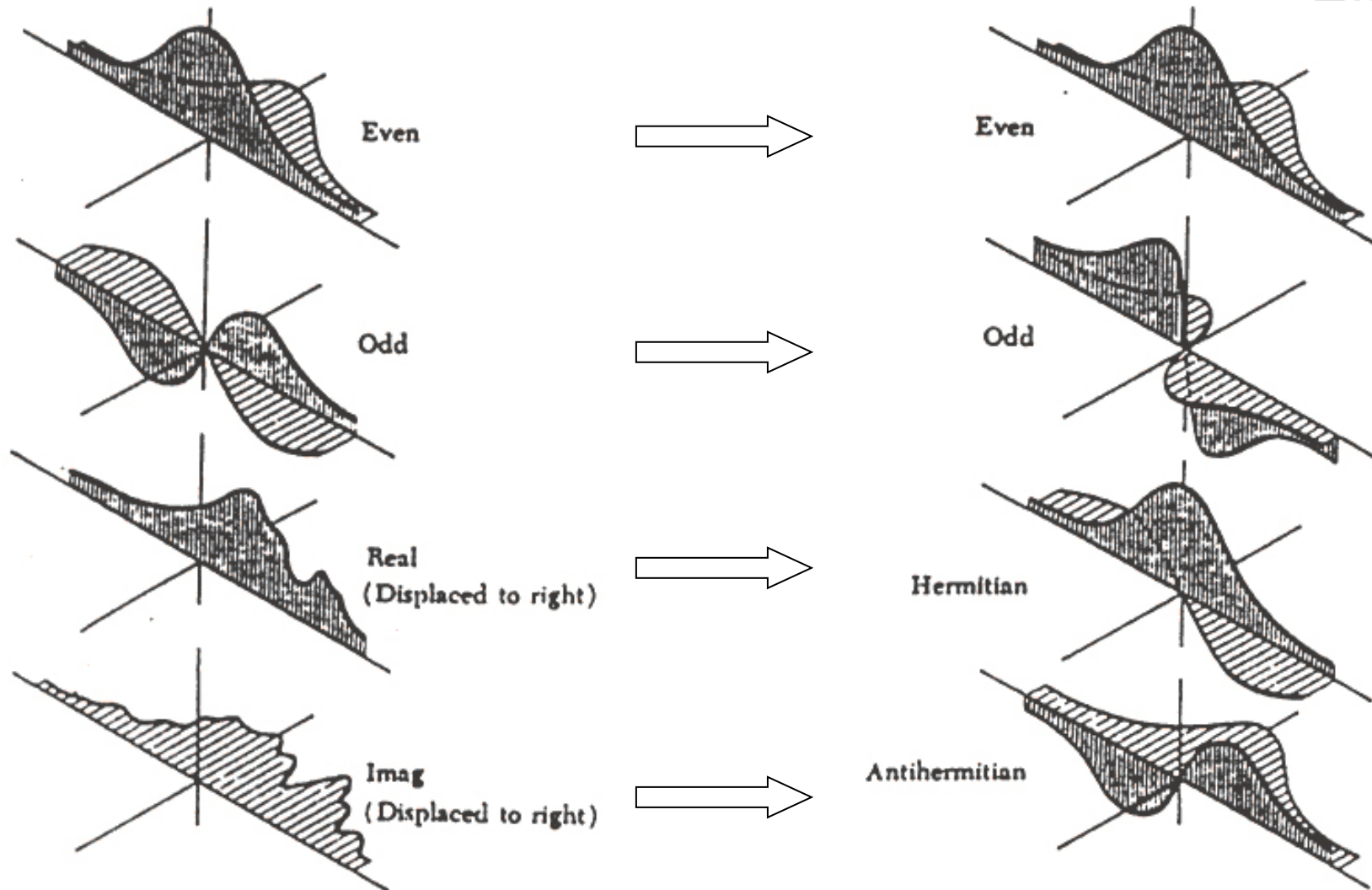
Die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von (komplexen) Hermiteschen Funktionen $f(t)$ ist daher **reell!**



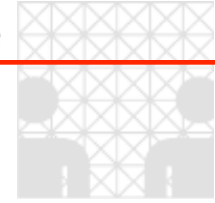
Symmetrieeigenschaften



(aus R. N. BRACEWELL, 1978)



(aus R. N. BRACEWELL, 1978)



Theoreme zur 1-D Fouriertransformation (aus H. D. LÜKE, 1988)

- Superpositionssatz:

Es gilt für eine Summe von Zeitfunktionen

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

woraus direkt folgt $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad a_1 S_1(\omega) + a_2 S_2(\omega)$

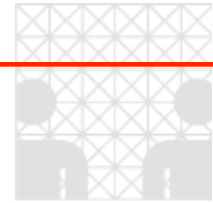
$$\Rightarrow \sum_i a_i s_i(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \sum_i a_i S_i(\omega)$$

- Ähnlichkeitssatz: (\rightarrow Zeitnormierung von Signalen)

Ansatz: $s(bt) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(bt) \cdot e^{-j\omega t} dt$

Substitution $bt = \theta$: $s(\theta) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta) \cdot e^{-j\frac{\omega\theta}{b}} d\theta = \frac{1}{b} S\left(\frac{\omega}{b}\right), \text{ für } b > 0 \\ -\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta) \cdot e^{-j\frac{\omega\theta}{b}} d\theta = -\frac{1}{b} S\left(\frac{\omega}{b}\right), \text{ für } b < 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow s(bt) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|b|} S\left(\frac{\omega}{b}\right)$$



- Integrationstheorem der Fouriertransformation:

Die Sprungfunktion $H(t)$ wirkt in einem Faltungsprodukt als Integrator einer gegebenen Funktion, d.h. es gilt

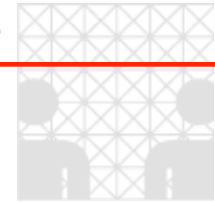
$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * H(t)$$

Die Fouriertransformation ergibt (s. V-30/31)

$$f(t) * H(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta(\omega) - j \frac{1}{\omega} \right)$$

und damit folgt mit der Siebeigenschaft des Dirac-Stoßes

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2} F(0) \cdot \delta(\omega) - j \frac{F(\omega)}{\omega}$$



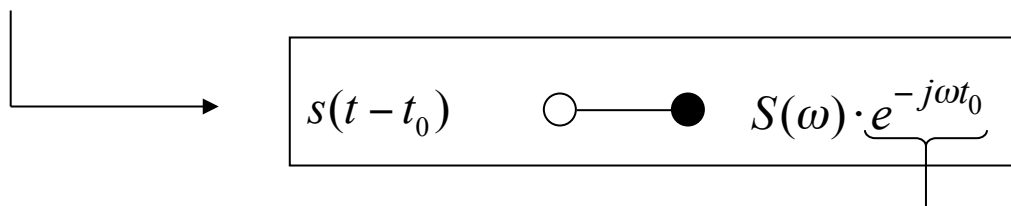
- Verschiebungssatz (\longrightarrow zeitliche Verzögerung von Signalen):

$$s(t - t_0) \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Substitution $t - t_0 = \theta$:

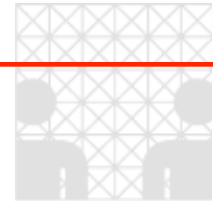
$$s(t - t_0) \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega(t_0 + \theta)} d\theta$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega \theta} d\theta$$



sog. Verschiebungsfaktor:
Übertragungsfkt.
eines idealen
Laufzeitglieds

- ! Eine Verzögerung des Signals $s(t)$ um eine Zeitkonstante t_0 addiert eine Größe $-\omega t_0$ zum Phasenspektrum, das Betrags-(Amplituden-)spektrum bleibt unverändert!

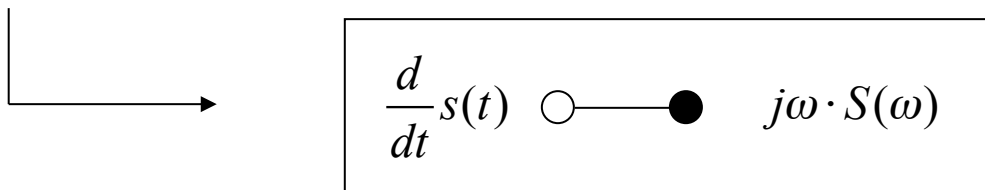


- Differentiationstheorem:

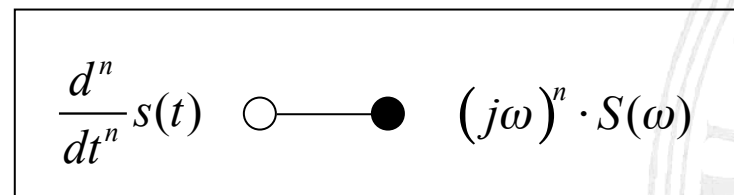
(→ mit dem inversen Fourier-Integral $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$)

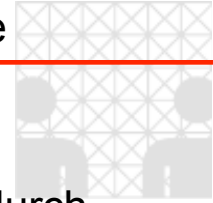
Ableitung nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [S(\omega) e^{j\omega t}] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{wegen } \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}) \end{aligned}$$



und verallgemeinert für Ableitungen höherer Ordnung





Symmetrie der Fouriertransformation

Fourier-Integral und inverses Fourier-Integral unterscheiden sich im Aufbau nur durch das Vorzeichen des Exponenten:

$$(1) S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt; \quad (2) s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Substitution $t = -t$ in (2):

$$s(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

Variablenvertauschung $\omega \longleftrightarrow t$:

$$s(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

⇒ Symmetriebeziehungen:

$$s(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(\omega); \quad S(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad s(-\omega)$$

Interpretation: Wird das Spektrum $S(\omega)$ des Signals $s(t)$ als neue Zeitfunktion $S(t)$ aufgefasst, so hat dessen Fouriertransformierte die zeitlich gespiegelte Form $s(-\omega)$ des ursprünglichen Signals ($S(t)$ ist i.a. eine komplexe Zeitfunktion)

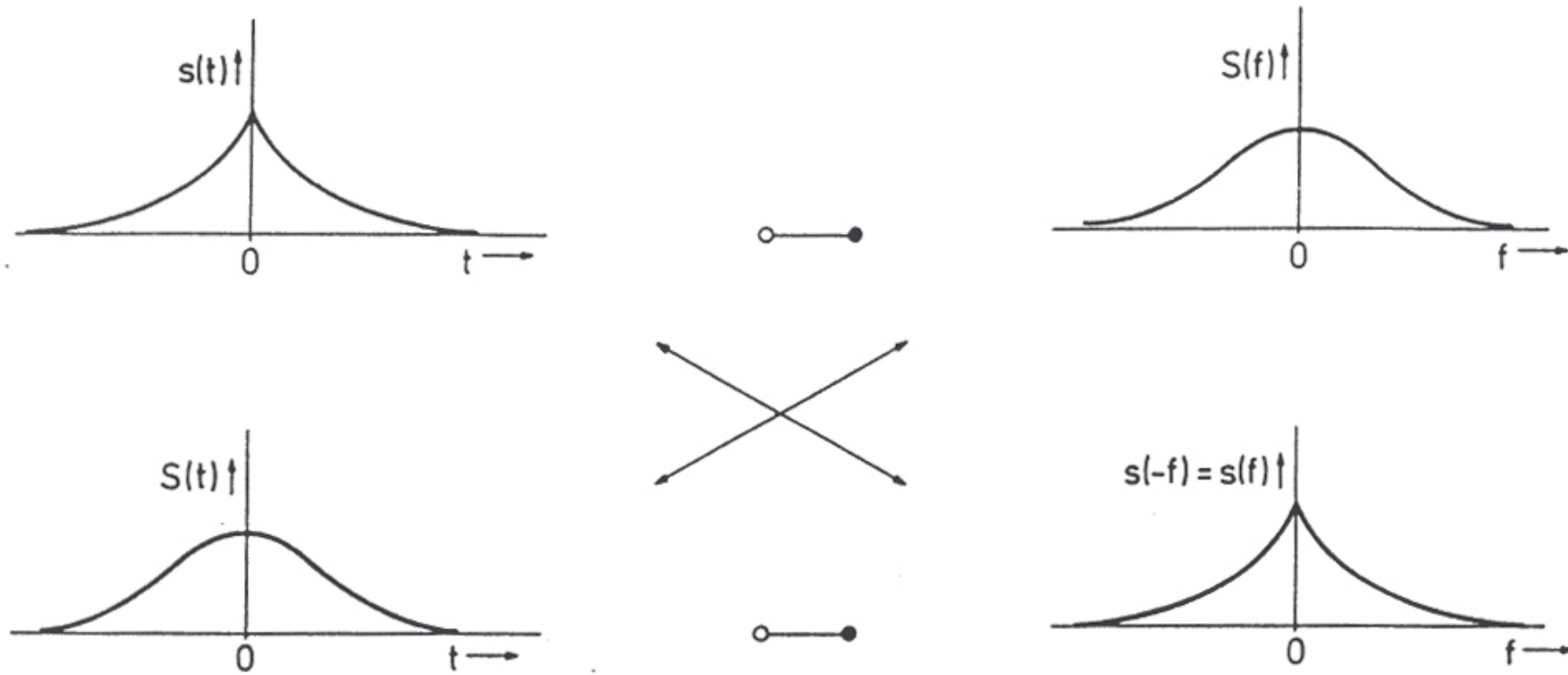
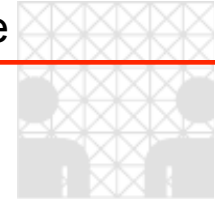
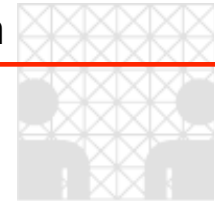


Abb. 2.7. Der Zusammenhang zwischen $s(t)$, $S(f)$, $S(t)$ und $s(-f)$ für den Fall, daß $s(t)$ eine gerade Funktion ist

(aus H. D. Lüke, 1988)



Faltung und Multiplikation

Es gilt (vgl. Faltungstheorem):

$$s_i(t) \otimes s_j(t) = g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad G(\omega) = S_i(\omega) \cdot S_j(\omega)$$

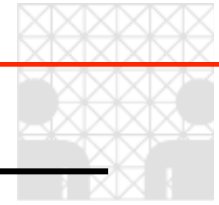
Aus der Symmetriebeziehung folgt

$$S_i(t) \cdot S_j(t) = G(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad g(\omega) = s_i(-\omega) \otimes s_j(-\omega)$$

Fasst man $S_i(t)$ und $S_j(t)$ als beliebige Zeitfunktionen $s_1(t)$ bzw. $s_2(t)$ auf, so ist ihr Produkt mit den zugehörigen Fouriertransformierten $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$ in gleicher Weise durch die Faltung verknüpft.

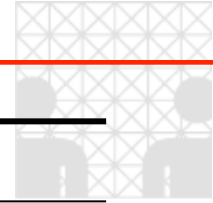
⇒ Multiplikations- (Modulations-) Theorem:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_1(\omega) \otimes S_2(\omega)$$



Theoreme der Fouriertransformation – Übersicht

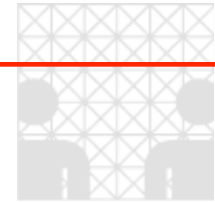
Theorem	$s(t)$	○ — ●	$S(\omega)$
Fourier-Transformation	$s(t)$		$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$
inverse Fourier-Transformation	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$		$S(\omega)$
Zerlegung reeller Zeitfunktionen	$s_g(t) + s_u(t)$		$\text{Re}\{S(\omega)\} + j \text{Im}\{S(\omega)\}$
	mit $\left\{ \begin{array}{l} s_g(t) \\ s_u(t) \end{array} \right.$		$\text{Re}\{S(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt$
			$j \text{Im}\{S(\omega)\} = -j \int_{-\infty}^{\infty} s_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt$
Zeitspiegelung	$s(-t)$		$S(-\omega)$ bei reellen Zeitfkt. auch $S^*(\omega)$
komplex konjugierte Zeitfunktion	$s^*(t)$		$S^*(-\omega)$
Symmetrie	$S(t)$		$s(-\omega)$



Theorem	$s(t)$	○ — ●	$S(\omega)$
Faltung	$s(t) \otimes h(t)$		$S(\omega) \cdot H(\omega)$
Multiplikation (Modulation)	$s(t) \cdot h(t)$		$S(\omega) \otimes H(\omega)$
Superposition (Addition)	$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$		$a_1 S_1(\omega) + a_2 S_2(\omega)$
Ähnlichkeit	$s(bt)$		$\frac{1}{ b } S\left(\frac{\omega}{b}\right)$
Verschiebung	$s(t - t_0)$		$S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$		$(j\omega)^n \cdot S(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$		$\frac{S(\omega)}{j\omega} + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(\omega)^*$

(nach: H. D. LÜKE, 1988)

*wg. $\frac{S(\omega)}{j\omega} = \frac{jS(\omega)}{jj\omega} = -j \frac{S(\omega)}{\omega}$ (vgl. V-29)



weitere Theoreme zur Fouriertransformation

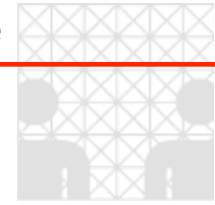
Autokorrelation $s(t) \otimes s^*(-t) \circ \text{---} \bullet \quad |S(\omega)|^2$

Differentiation der Faltung $\frac{d}{dt}[s(t) * h(t)] = s'(t) * h(t) = s(t) * h'(t)$

"Power theorem" $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot h^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot H^*(\omega) d\omega$

"Rayleigh theorem" $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{oder: PARSEVALSches Theorem})$

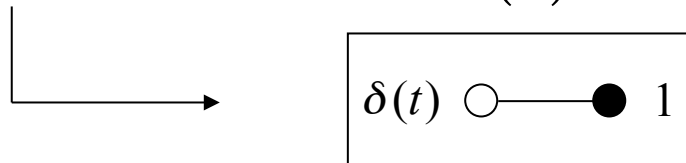
(nach: BRACEWELL, 1978)



Einige Fouriertransformierte

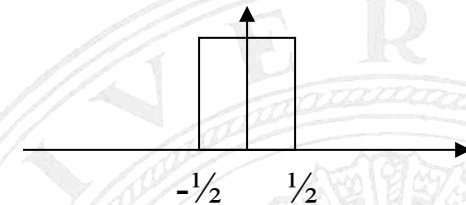
- Transformierte des Dirac-Stoßes $\delta(t)$:

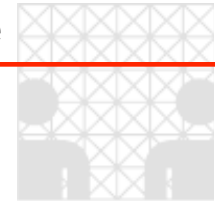
$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt \quad (\text{Ausblendeigenschaft: } f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)) \\
 &= 1(\omega)
 \end{aligned}$$



- Transformierte des Rechteck-Impulses $\text{rect}(t) = \Pi_{R=1/2}(t)$:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{R=1/2}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-R=-1/2}^{R=1/2} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{-j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega}{2}} - e^{\frac{j\omega}{2}} \right)
 \end{aligned}$$





Es gilt
$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

und damit
$$S(\omega) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\omega)}{\frac{1}{2}\omega} = \text{si}(\frac{1}{2}\omega) \left(\equiv \text{sinc}(\frac{1}{2}\omega) \right)$$

Für beliebige R , d. h. gedehnte rect-Impulse der Breite $T = 2R$ ergibt sich unter Anwendung des Ähnlichkeitstheorems

$$\mathcal{F} \left\{ \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right\} = T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

d.h. in Kurzschreibweise, $T = 2R$:

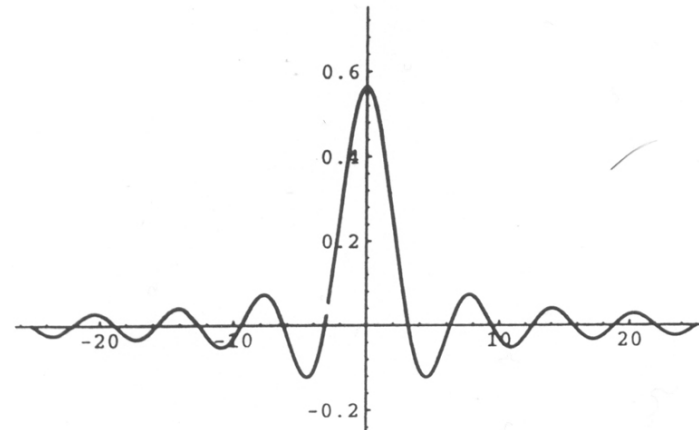
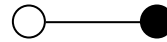
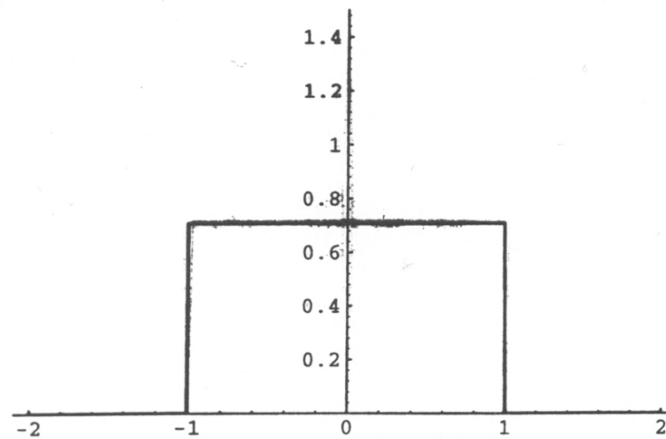
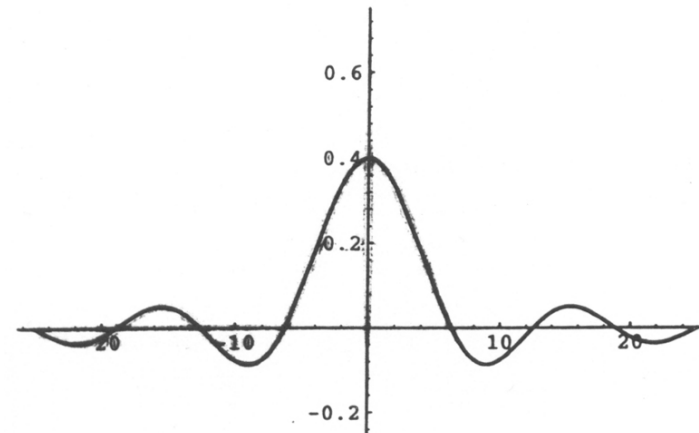
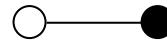
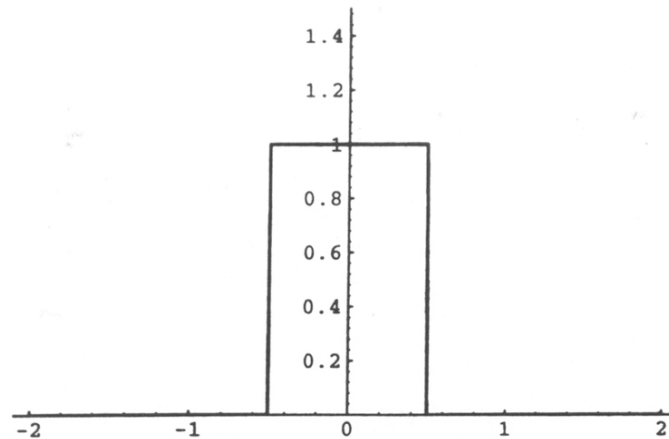
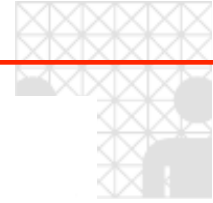
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \circ \text{---} \bullet \quad T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- Symmetrie: Anwendung des Symmetrietheorems ergibt

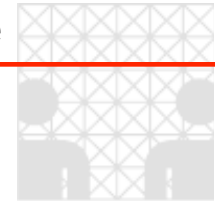
$$\text{si}(\pi t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{rect}(-2\pi\omega) = \text{rect}(2\pi\omega)$$

sowie unter Verwendung des Ähnlichkeitstheorems

$$\text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \quad \circ \text{---} \bullet \quad T \cdot \text{rect}(T \cdot 2\pi\omega)$$



Hinweis: Es gilt für die sinc-Funktion $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc } x = 1$.
(\rightarrow Interpolationsfunktion)



- Transformierte des Dreieck-Impulses $\Lambda(t)$:

Es gilt $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, und somit

$$\Lambda(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{si}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Mehrfachfaltung des Rechteckimpulses (\longrightarrow zentraler Grenzwertsatz)

$$M\text{-faches Faltungsprodukt } s_M(t) = \underbrace{\Pi(t) \otimes \Pi(t) \otimes \dots \otimes \Pi(t)}_{M\text{-mal}}$$

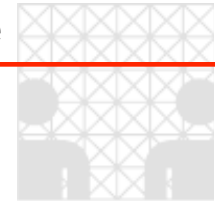
$$\text{und zugehörige Fouriertransformierte } S_M(\omega) = \left(\text{si}\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)^M$$

Betrachtung an der Stelle $\omega = 0$ und Entwicklung des sin in eine Taylor-Reihe,

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + K$$

sowie Logarithmierung ergibt für M

$$\begin{aligned} \ln S_M(\omega) &= M \cdot \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\right) \\ &= M \cdot \ln\left(\frac{2}{\omega} \left(\frac{1}{2}\omega - \frac{\left(\frac{1}{2}\omega\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\omega\right)^5}{120} - \frac{\left(\frac{1}{2}\omega\right)^7}{5040} + \dots\right)\right) \end{aligned}$$



$$\ln S_M(\omega) = M \cdot \ln \left(1 - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\omega^4}{1920} - \frac{\omega^6}{322560} + \dots \right)$$

Für $|\omega| \ll 1$ Beschränkung auf die ersten beiden Glieder und dann Ausnutzen der Näherung $\ln(1+x) \approx x$ (für $|x| \ll 1$) ergibt

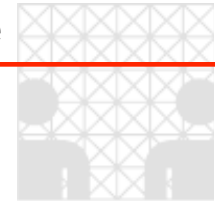
$$\ln S_M(\omega) \approx -M \frac{\omega^2}{24} \Rightarrow S_M(\omega) \approx e^{-M \frac{\omega^2}{24}} \text{ für } |\omega| \ll 1$$

Die inverse Fouriertransformation von $S_M(\omega)$ ist nur für große M erlaubt (d.h. ω muss sich über den gesamten Frequenzbereich erstrecken; die Näherung beschreibt nur im Falle großer M wesentliche Anteile von $S_M(\omega)$). Dies führt zu

$$s_M(t) \approx \sqrt{\frac{6}{M \cdot \pi}} e^{-\frac{6t^2}{M}}$$

Interpretation: Die mehrfache Faltung des Rechteckimpulses mit sich selbst tendiert demnach gegen den Gauß-Impuls; dies gilt allgemein für die Mehrfachfaltung positiver, symmetrischer Impulse beschränkter Fläche.

—> Verallgemeinerung: „zentraler Grenzwertsatz“ der Statistik



- Faltungsprodukt der si-Funktion mit sich selbst

Es gilt

$$\text{si}(\pi t) * \text{si}(\pi t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \text{si}(\pi t)$$

und mit dem Ähnlichkeitssatz allgemein

$$\text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) * \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) = |T| \cdot \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

- Transformation von Sinus- und Cosinus-Funktion, (sin(t), cos(t))

Als Ausgangspunkt dient die Transformation des Dirac-Stoßes $\delta(t)$ sowie eines zeitverschobenen Dirac-Stoßes $\delta(t + T)$:

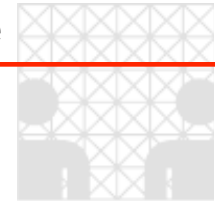
$$\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1$$

$$\delta(t + T) \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$$



$$\frac{1}{2}(\delta(t + T) + \delta(t - T)) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \cos(\omega T)$$

$$\frac{1}{2}(\delta(t + T) - \delta(t - T)) \quad \circ \text{---} \bullet \quad j \sin(\omega T)$$



Die Anwendung des Symmetrietheorems ergibt

$$\cos(T \cdot t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2}(\delta(\omega + T) + \delta(\omega - T))$$

$$j \sin(T \cdot t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2}(-\delta(\omega + T) + \delta(\omega - T))$$

→ Der Dehnfaktor T hat nach dem Variablentausch $t \leftrightarrow \omega$ die Bedeutung einer Frequenz, daher Umbenennung in Ω ; außerdem Multiplikation mit $-j$ (da $j \cdot (-j) = 1$):

$\cos(\Omega t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2}(\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega))$
$\sin(\Omega t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$j \frac{1}{2}(\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega))$

Interpretation: reellwertiges gerades Impulspaar für \cos (gerade Funktion), rein imaginäres ungerades Impulspaar für \sin (ungerade Funktion).

→ vgl. Symmetrieeigenschaften



- Transformation der Diracstoß-Folge $\perp\perp\perp(t)$ (SHAH-"Funktion")

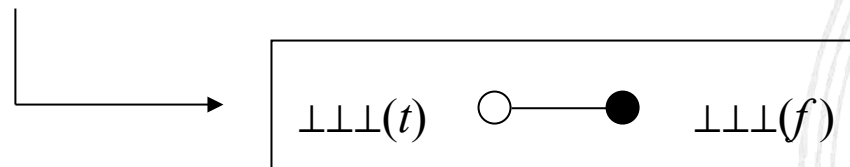
Die periodische Diracstoß-Folge der normierten Periodendauer $\Delta t=1$ ist definiert als

$$\perp\perp\perp(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

Fouriertransformation von $\perp\perp\perp(t)$ (mit Superpositions- und Verschiebetheorem)

$$\begin{aligned} \perp\perp\perp(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \quad (\text{fuer } \Delta t = 1) \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos 2\pi n f - j \cdot \sin 2\pi n f) \\ & = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos 2\pi n f) \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) \end{aligned}$$

(Beweis: H. D. LÜKE, 1988 (S. 43-44))



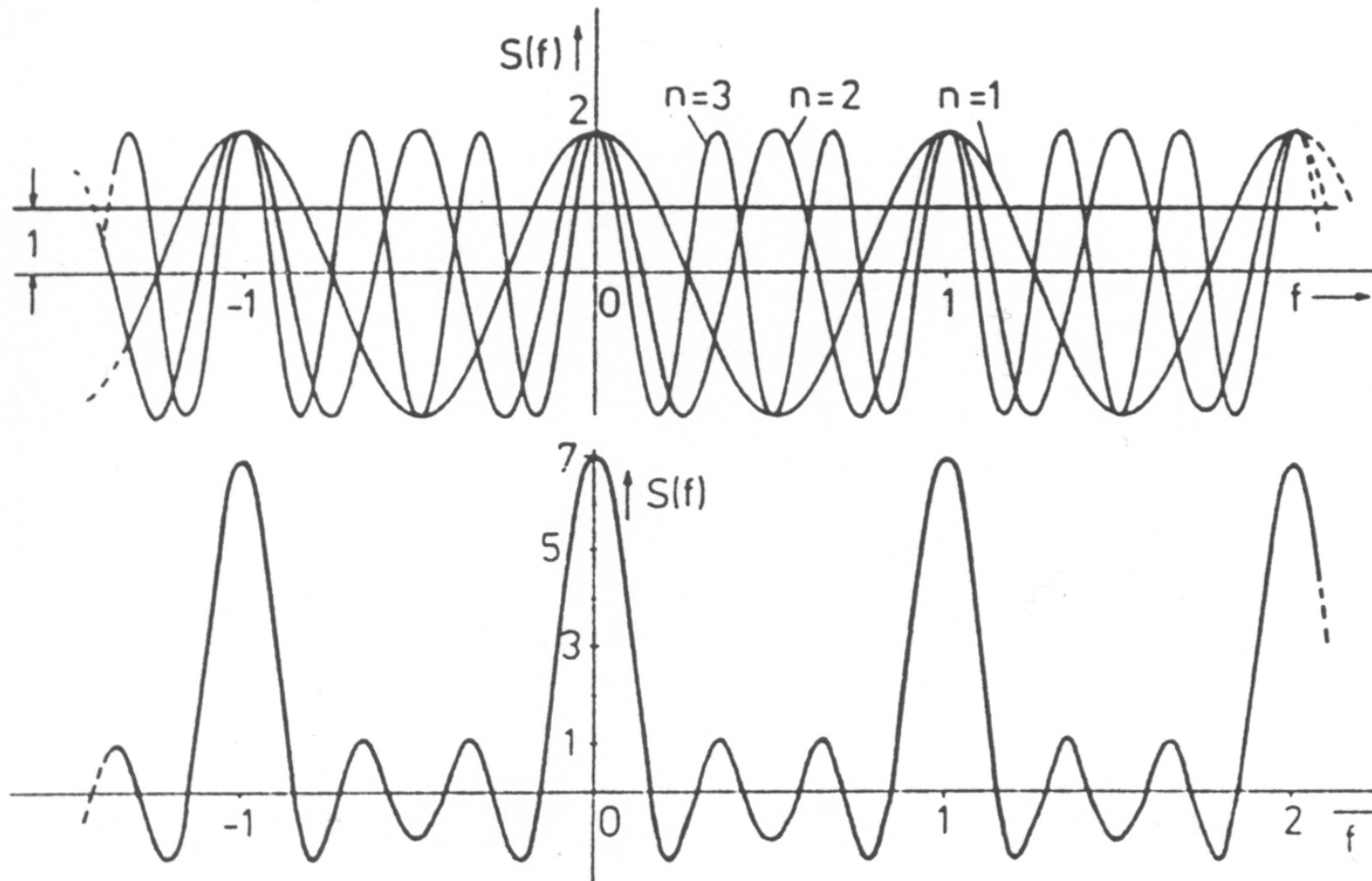
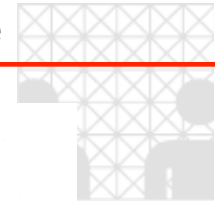
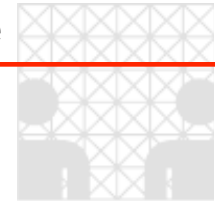


Abb. 2.15. Approximation der Dirac-Stoßfolge $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$ durch die Teilsumme $S(f) = 1 + 2 \sum_{n=1}^3 \cos(2\pi n f)$

(aus H. D. LÜKE, 1988)



Nichtnormierte Periodendauer (Anwendung des Ähnlichkeitstheorems)

Gedehnte Dirac-Stoßfolge

$$\perp\perp\perp\left(\frac{t}{T}\right) \quad \circ \text{---} \bullet \quad |T| \cdot \perp\perp\perp(T \cdot f)$$

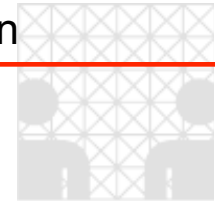
Es gilt

$$\perp\perp\perp\left(\frac{t}{T}\right) = |T| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{und}$$

$$\perp\perp\perp(T \cdot f) = \frac{1}{|T|} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

und somit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



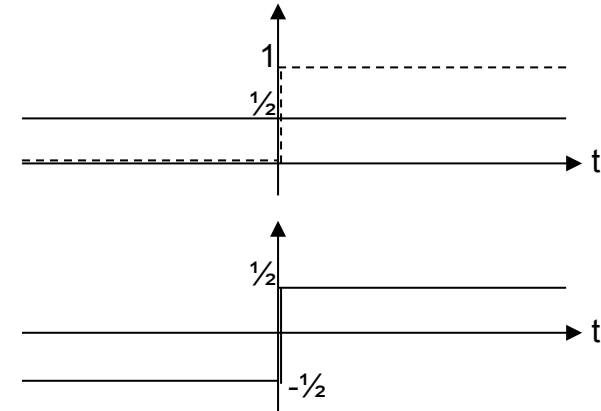
Transformation von Sprungfunktion und Signumfunktion

- Sprungfunktion $H(t)$ (\rightarrow kausale Funktionen)
Zerlegung in gerade und ungerade Komponenten:

$$H(t) = H_g(t) + H_u(t)$$

mit $H_g(t) = \frac{1}{2}H(t) + \frac{1}{2}H(-t) = \frac{1}{2}$

$$H_u(t) = \frac{1}{2}H(t) - \frac{1}{2}H(-t) = \frac{1}{2}(H(t) - H(-t))$$

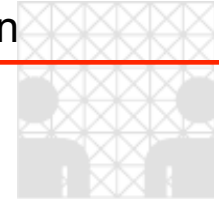


Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(H(t) - H(-t)) \\
 \circ \bullet & \quad \quad \quad \circ \bullet \quad \quad \quad \circ \bullet \quad \leftarrow \text{(Ähnlichkeitstheorem)} \\
 F_H(\omega) &= \frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{2}(F_H(\omega) - F_H(-\omega))
 \end{aligned}$$

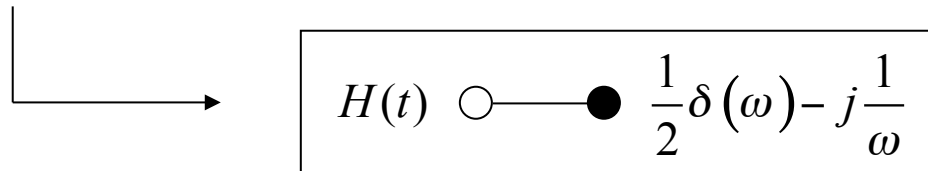
Unter Verwendung des Differentiationstheorems gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} H(t) &= \delta(t) \\
 \circ \bullet & \quad \quad \quad \circ \bullet \\
 j\omega \cdot F_H(\omega) &= 1 \Rightarrow F_H(\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} \quad \text{für } \omega \neq 0
 \end{aligned}$$



$$F_H(\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2} \left(-j \frac{1}{\omega} + j \frac{1}{-\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \delta(\omega) - j \frac{1}{\omega}$$



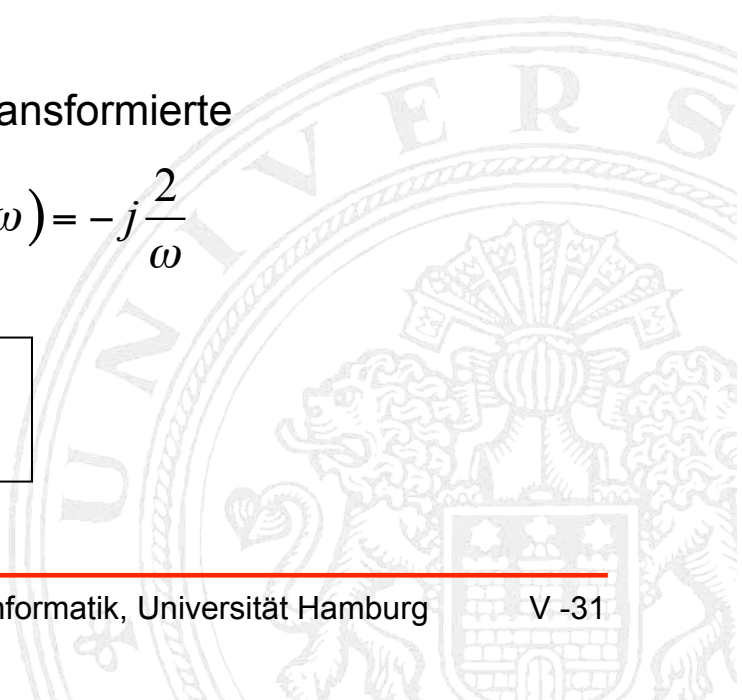
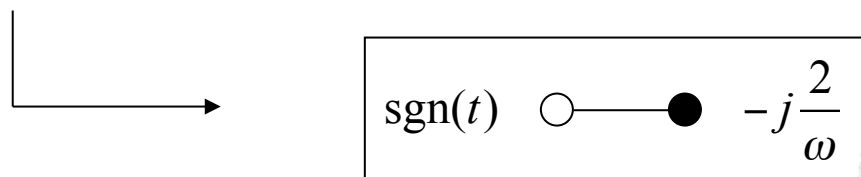
- Signumfunktion $\text{sgn}(t)$

Die Signumfunktion lässt sich aus der Heaviside-Funktion generieren:

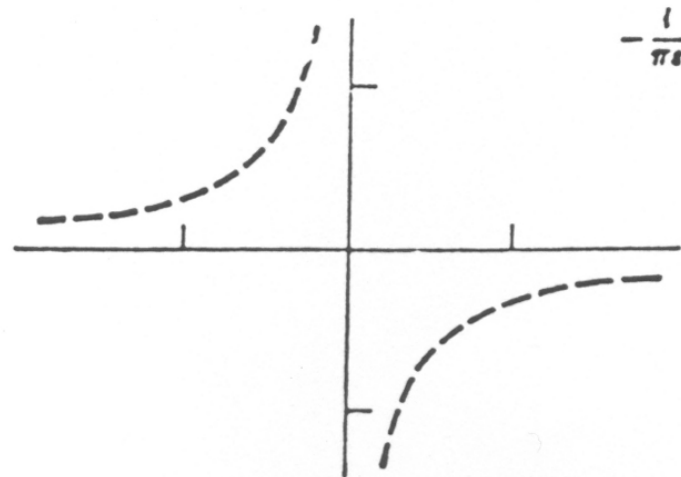
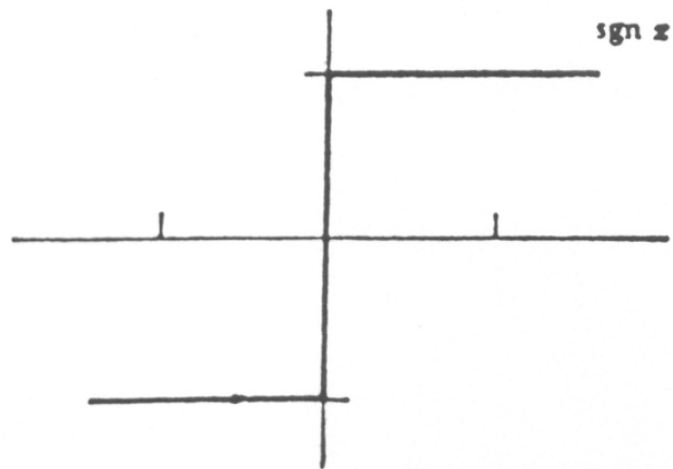
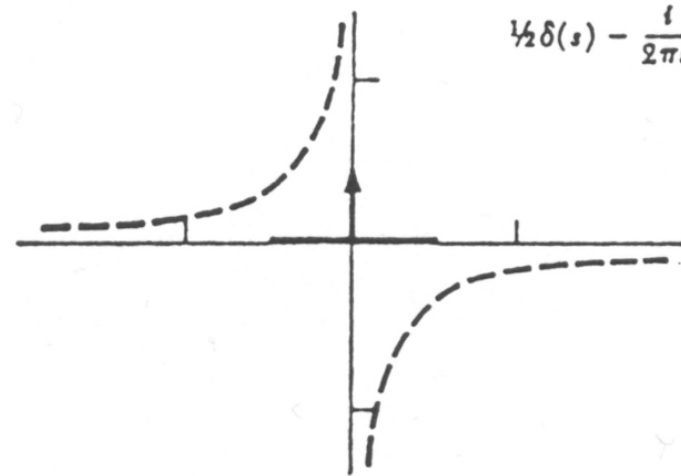
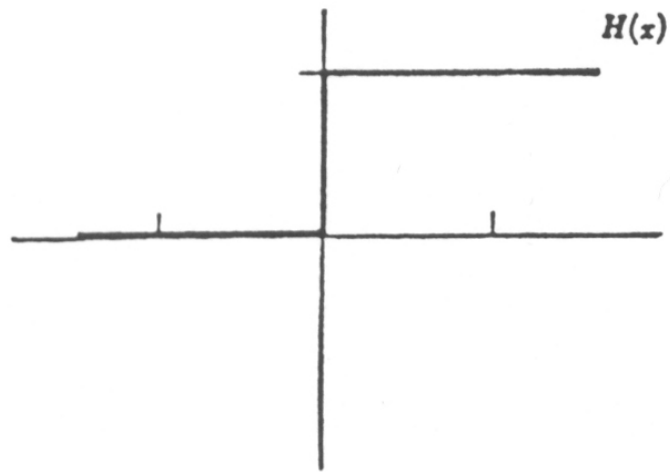
$$\text{sgn}(t) = 2 H(t) - 1$$

Hieraus ergibt sich sofort die zugehörige Fouriertransformierte

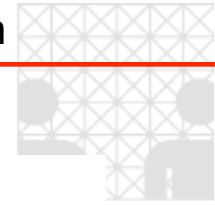
$$F_{\text{sgn}}(\omega) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \delta(\omega) - j \frac{1}{\omega} \right) - \delta(\omega) = -j \frac{2}{\omega}$$



Eigenschaften der 1-D Fouriertransformation Sprungfunktion und Signumfunktion

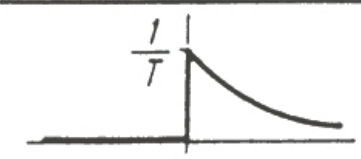
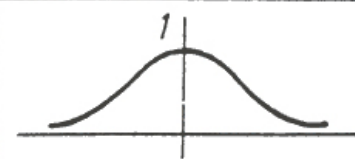

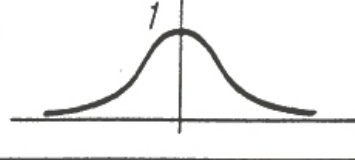


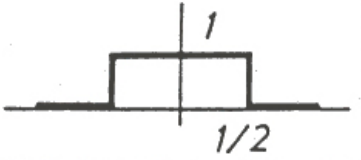
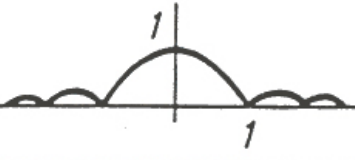

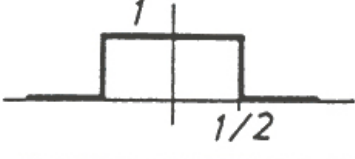


(aus: R. N. BRACEWELL, 1978)



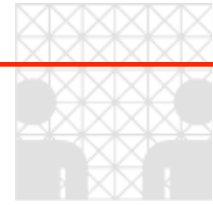
Signalfunktionen im Zeit- und Frequenzbereich

Tabelle 2.2. Signalfunktionen im Zeit- und Frequenzbereich

$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$\frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$ Exponentialimpuls ($T > 0$)	$\frac{1}{1 + j2\pi T f}$	
	$\frac{1}{2T} e^{- t /T}$ Doppelpotentialimpuls ($T > 0$)	$\frac{1}{1 + (2\pi T f)^2}$	
	$\frac{1}{2T} \text{sgn}(t) e^{- t /T}$	$-j \frac{2\pi T f}{1 + (2\pi T f)^2}$	
	$\text{rect}(t)$ Rechteckimpuls	$\text{si}(\pi f)$	
	$\text{si}(\pi t)$ si-Funktion	$\text{rect}(f)$	

(aus H. D. LÜKE, 1988)

	$\delta(t)$ Dirac-Stoß	1	
	1 Gleichstrom	$\delta(f)$	
	$\text{III}(t)$ Dirac-Stoßfolge	\longleftrightarrow $\text{III}(f)$	
	$e^{-\pi t^2}$ Gauß-Impuls	\longleftrightarrow $e^{-\pi f^2}$	
	$2 \cos(2\pi Ft)$ cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
	$\varepsilon(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	
	$4\varepsilon(t) \cdot \cos(2\pi Ft)$ geschaltete cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F) - j \frac{2f}{\pi(f^2 - F^2)}$	



Hilbert-Transformation

- Transformation gerader und ungerader Anteile einer kausalen Zeitfunktion:

Definition kausaler Zeitfunktion ($s(t)$ reellwertig):

$$s(t) = s(t) \cdot H(t) = (s_g(t) + s_u(t)) H(t) \text{ mit } s_g(t) = s_u(t) \cdot \text{sgn}(t) \text{ und } s_u(t) = s_g(t) \cdot \text{sgn}(t)$$

Die Fouriertransformation lautet:

$$s_g(t) = s_u(t) \cdot \text{sgn}(t)$$

$$S_g(\omega) = S_u(\omega) * \left(-j \frac{2}{\omega}\right) = -j \left(S_u(\omega) * \frac{2}{\omega}\right)$$

$$s_u(t) = s_g(t) \cdot \text{sgn}(t)$$

$$S_u(\omega) = -j \left(S_g(\omega) * \frac{2}{\omega}\right)$$

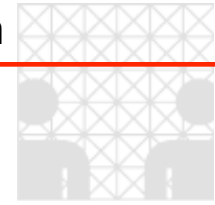
Da $s(t)$ hier reellwertig vorausgesetzt wird, gilt

$$S_g(\omega) = \text{Re}\{S(\omega)\} \quad \text{und}$$

$$S_u(\omega) = \text{Im}\{S(\omega)\}, \quad \text{und es ist somit}$$

$$S(\omega) = \text{Re}\{S(\omega)\} + j \text{Im}\{S(\omega)\} = \text{Re}\{S(\omega)\} + \text{Re}\{S(\omega)\} * \frac{2}{\omega}$$

Die Transformation einer Funktion $f(t)$ in eine Funktion $\hat{f}(t)$ mittels Faltung mit der Funktion $\frac{1}{\pi t}$: $\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t}$ heißt Hilbert-Transformation.



Hilbert-Transformation

- Definition: $H \{f(t)\} = \hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau \right)$

- Dies lässt sich einfacher als Faltung beschreiben:

$$H \{f(t)\} = f(t) * \frac{1}{\pi t} \qquad H \{F(\omega)\} = -j \cdot \text{sgn}(\omega) \cdot F(\omega)$$

- D.h. die Hilberttransformation entspricht einer Phasenverschiebung aller positiven Frequenzen um $+90^\circ$ und aller negativen Frequenzen um -90° .

- Die Hilbert-Transformation ist periodisch: $H \{H \{f(t)\}\} = -f(t)$

$$H \{H \{H \{f(t)\}\}\} = -H \{f(t)\}$$

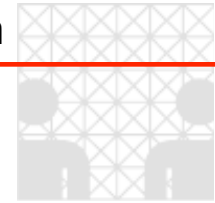
$$H \{H \{H \{H \{f(t)\}\}\}\} = f(t)$$

- Die Hilbert-Transf. einer Ableitung ist die Abl. der Hilbert-Transf.: $H \{f'\} = (H \{f\})'$

- Die Hilbert-Transf. einer Faltung von zwei Funktionen ist die Faltung einer der Funktionen mit der Hilbert-Transf. der anderen: $H \{f * g\} = f * H \{g\} = H \{f\} * g$

- Die Faltung zweier Funktionen ist gleich der neg. Faltung ihrer Hilbert-Transformierten:

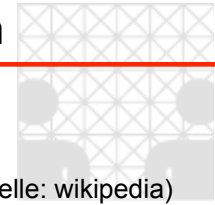
$$f * g = -H \{f\} * H \{g\}$$



Hilbert-Transformation

- Die Hilbert-Transformation einer reellen Funktion ist wieder reell.
- Die Hilbert-Transformation einer imaginären Funktion ist wieder imaginär.
- Die Hilbert-Transformation einer geraden Funktion ist ungerade.
- Die Hilbert-Transformation einer ungeraden Funktion ist gerade.

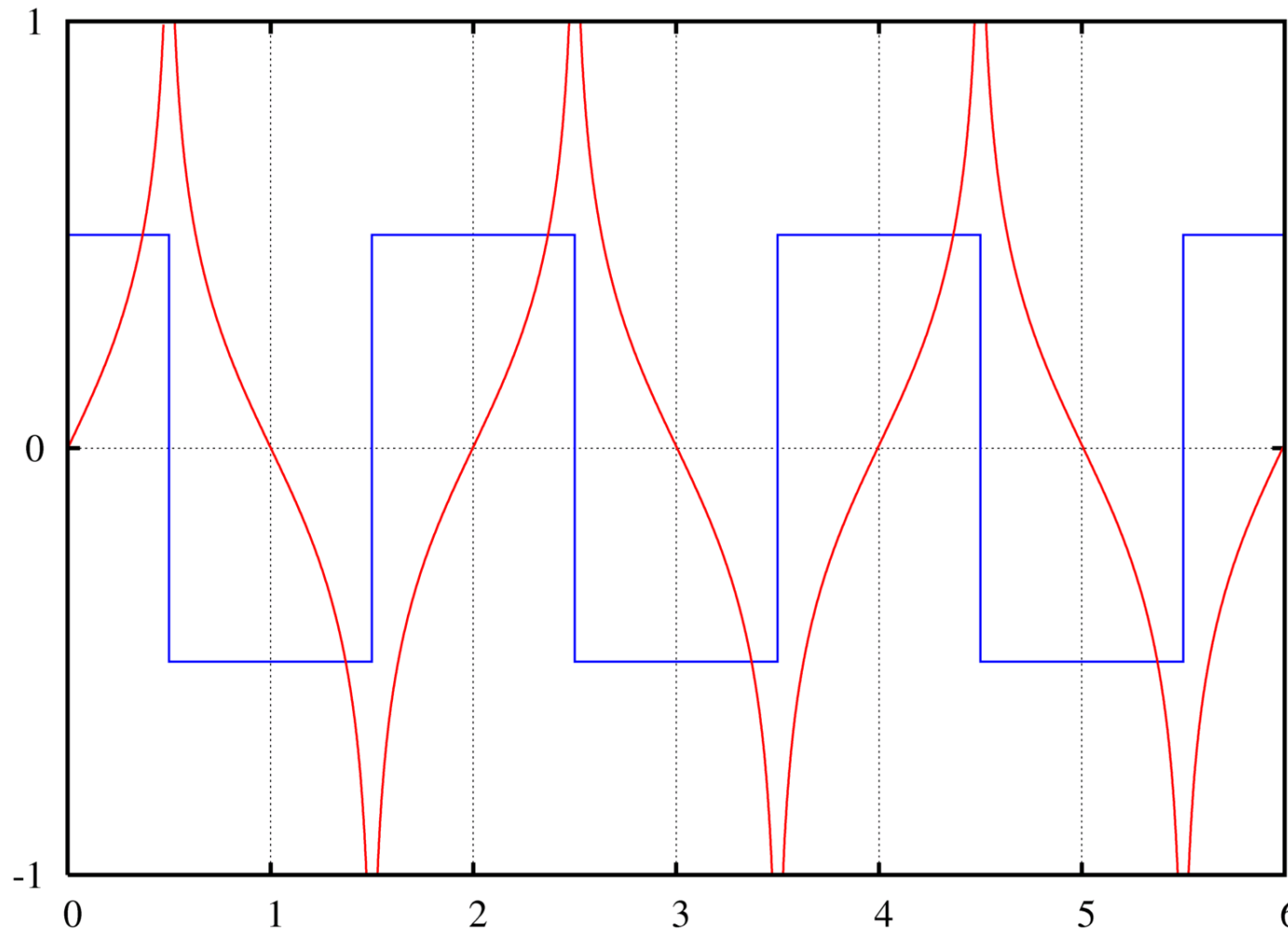
Signal	Hilbert Transformierte
$x(t)$	$\mathcal{H}\{x(t)\}$
$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\frac{1}{t^2 + 1}$	$\frac{t}{t^2 + 1}$
$\frac{\sin(t)}{t}$ Sinc-Funktion	$\frac{1 - \cos(t)}{t}$
$\square(t)$ Rechteck-Funktion	$\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{t + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} \right $
$\delta(t)$ Dirac-Impuls	$\frac{1}{\pi t}$



Hilbert-Transformation

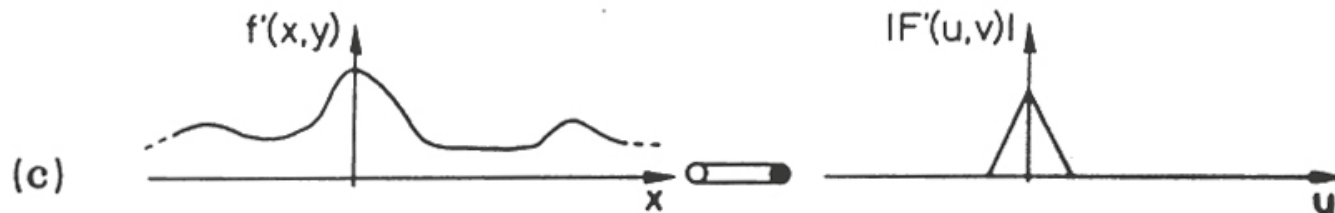
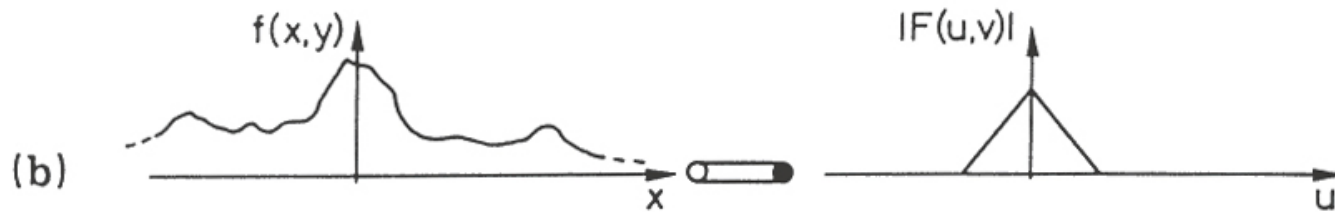
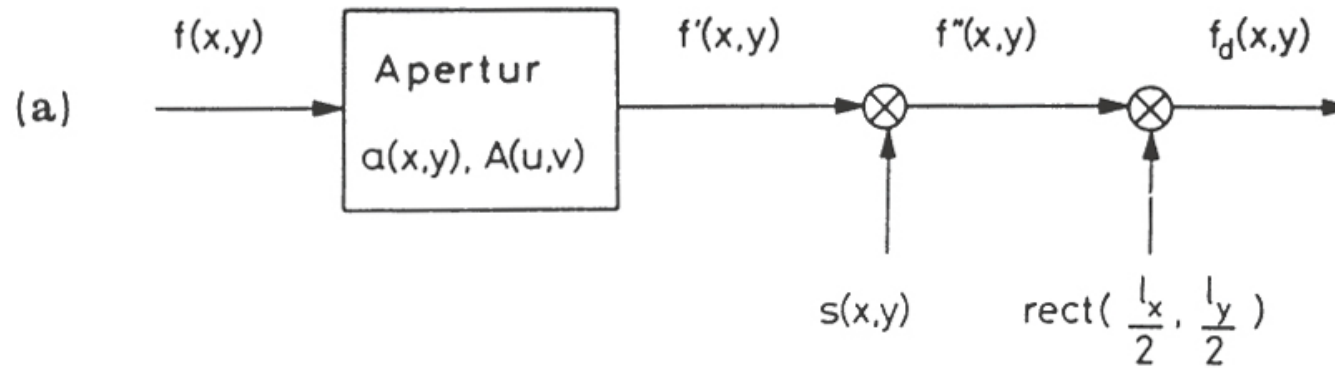
- Rechteck-Signal (blau) und seine Hilbert-Transformierte (rot):

(Quelle: wikipedia)





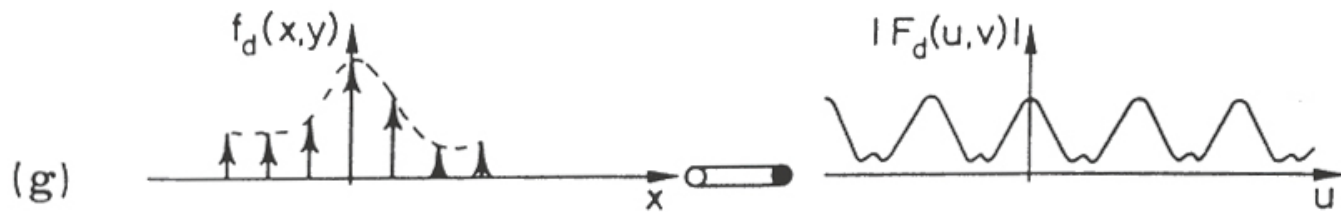
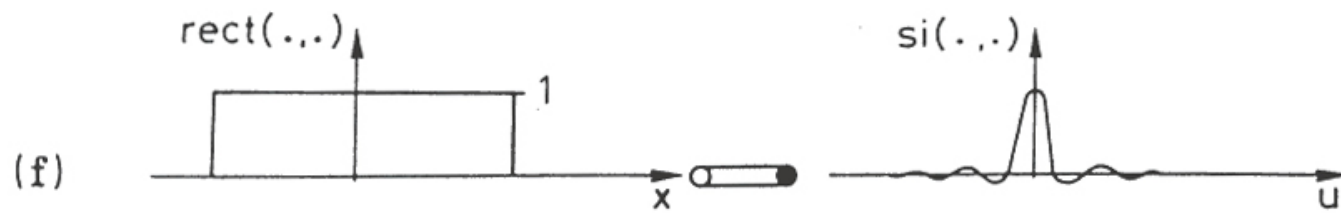
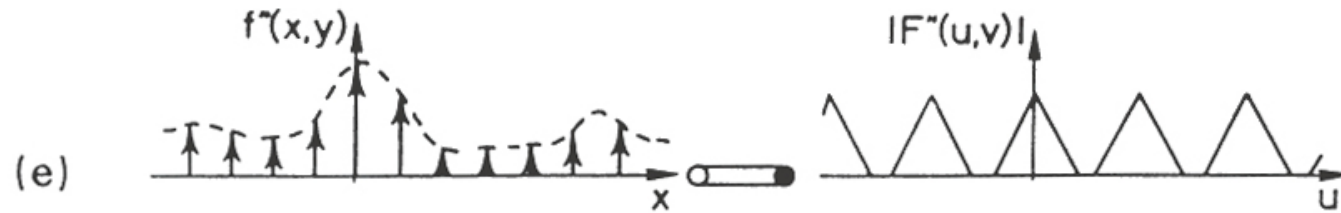
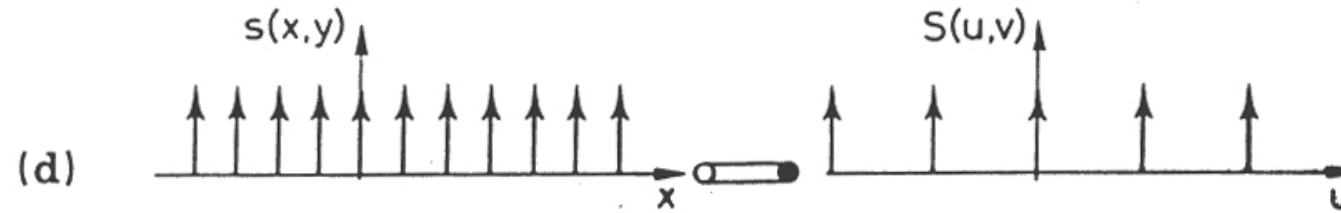
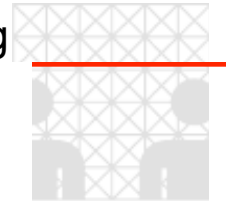
Fallbeispiel: Diskretisierung von Bildsignalen und Bilddarstellung



(aus F. WAHL, 1984, Springer Verlag)

Eigenschaften der 1-D Fouriertransformation

Fallbeispiel: Diskretisierung





„Interessanter Weise stellt sich heraus, dass durch den Abtastvorgang trotz der Tatsache, dass man nur wenige Werte eines bestimmten Messintervalls berücksichtigt, unter bestimmten Voraussetzungen keinerlei Information über das analoge Signal verloren geht. Dieser Sachverhalt ist für die gesamte Digitaltechnik und damit praktisch für die gesamte technische Signalverarbeitung von fundamentaler Bedeutung. In der Literatur wird dies gemeinhin als „Abtasttheorem nach Shannon“ bezeichnet. Historisch wurde 1924 von Harry Nyquist (1889 – 1976) eine erste Formulierung der notwendigen Bandbreite für Informationsübertragung vorgestellt (Nyquist, 1924). Nyquist brachte auch 1928 die erste Formulierung des Abtasttheorems, allerdings noch ohne Beweis (Nyquist, 1928). Dieser wurde erst 21 Jahre später von Claude Elwood Shannon (1916 – 2001) erbracht in seiner klassischen Veröffentlichung von 1949, „Communication in the presence of noise“ (Shannon, 1949). Dieses Papier gilt als Grundlage der Informationstheorie. Andere Bezeichnungen des Abtasttheorems beziehen sich auf die Namen Whittaker, Kotelnikov oder Kramer. Wir nennen es an dieser Stelle kurz „*Abtasttheorem*“, das folgendes aussagt:

Theorem 4.5 (Abtasttheorem / "sampling theorem")

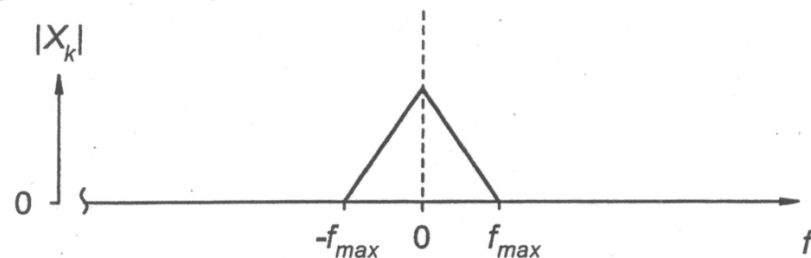
Ein analoges Signal sei bandbegrenzt, d.h. seine Fouriertransformierte verschwindet identisch für $|f| > f_{\max}$. Dann lässt sich aus dem abgetasteten Signal das ursprüngliche Signal komplett und eindeutig wiedergewinnen. Dazu ist die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so groß zu wählen wie f_{\max} .

(aus: A. WENDEMUTH, Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung.
Springer Verlag, 2005)

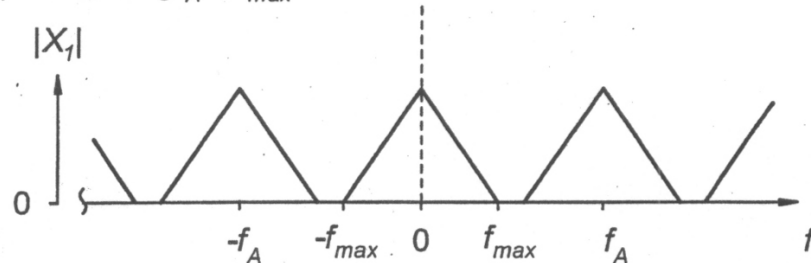
(siehe dazu auch wikipedia: <http://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem>)



(a) Basisband-Spektrum



(b) Abtastung $f_A > 2f_{max}$



(c) Abtastung $f_A < 2f_{max}$

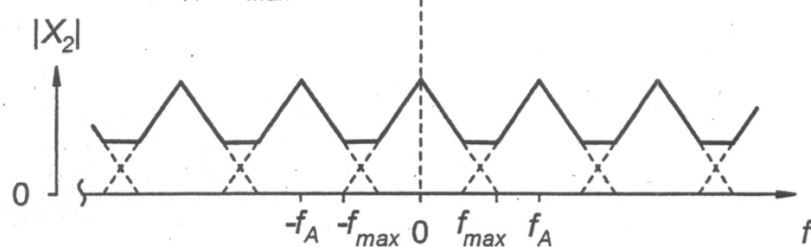


Abbildung 4.4. Spektren eines mit unterschiedlichen Frequenzen abgetasteten Signals

(aus: A. WENDEMUTH, 2005)

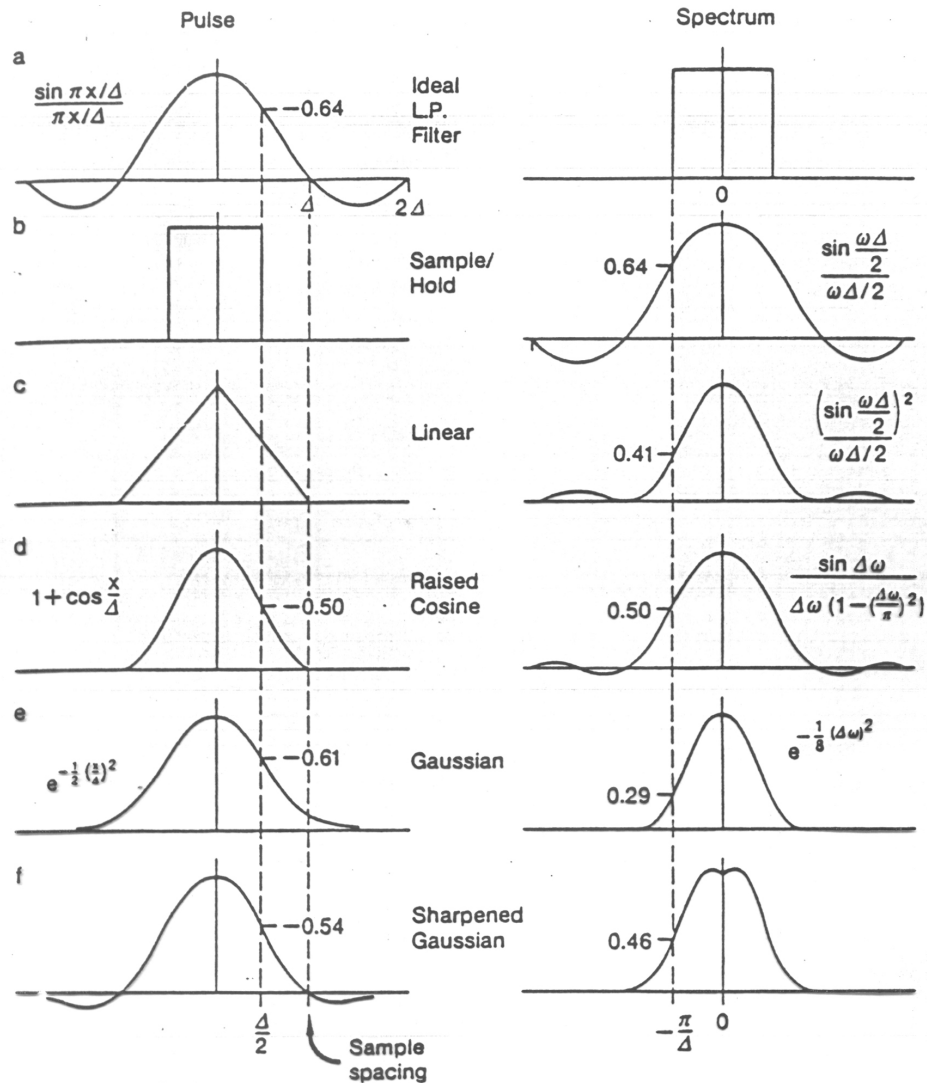
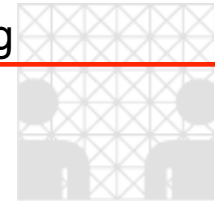


Fig. 4.6a-f. A comparison of interpolation functions: (a) ideal low-pass filter; (b) sample-and-hold; (c) linear; (d) raised cosine; (e) Gaussian; (f) sharpened Gaussian

(aus: W. F. SCHREIBER, Fundamentals of Electronic Imaging Systems. Springer Verlag, 1990)

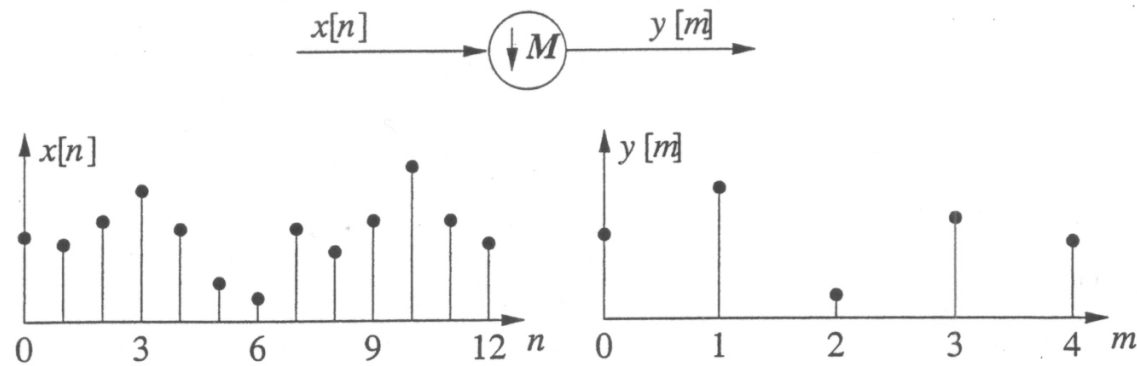
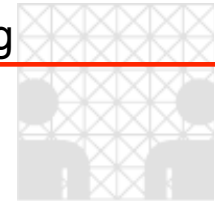


Abbildung 3.2: Unterabtastung mit $M = 3$

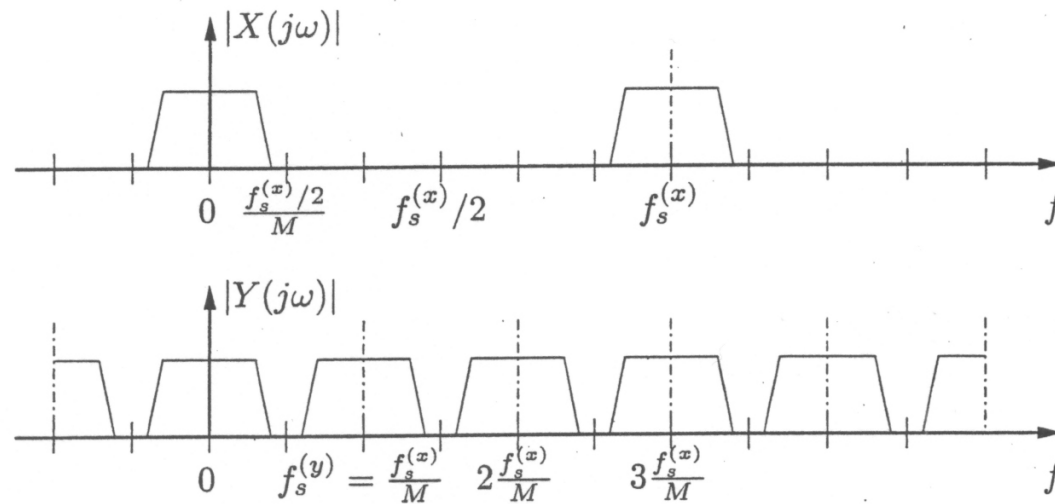


Abbildung 3.3: Betragsspektren vor und nach einer Unterabtastung mit $M = 3$

(aus: T. STRUTZ, Bilddatenkompression. Vieweg Verlag, 2005)

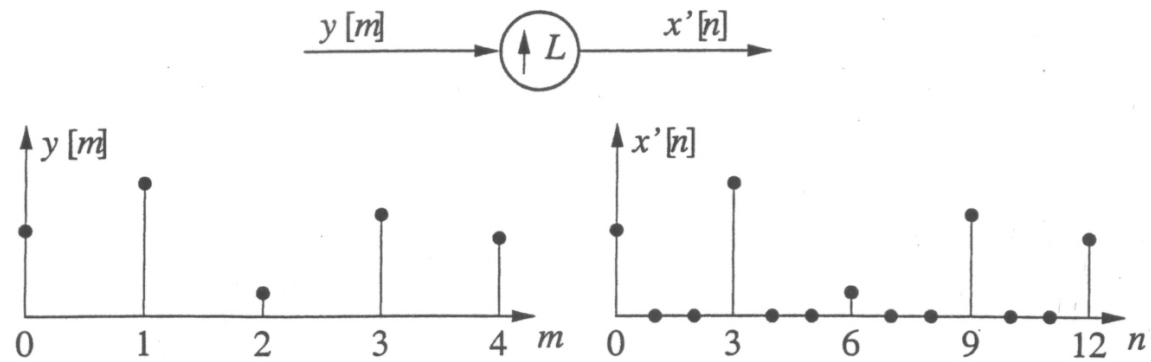
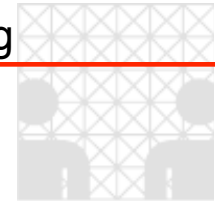


Abbildung 3.4: Aufwärtstastung mit $L = 3$

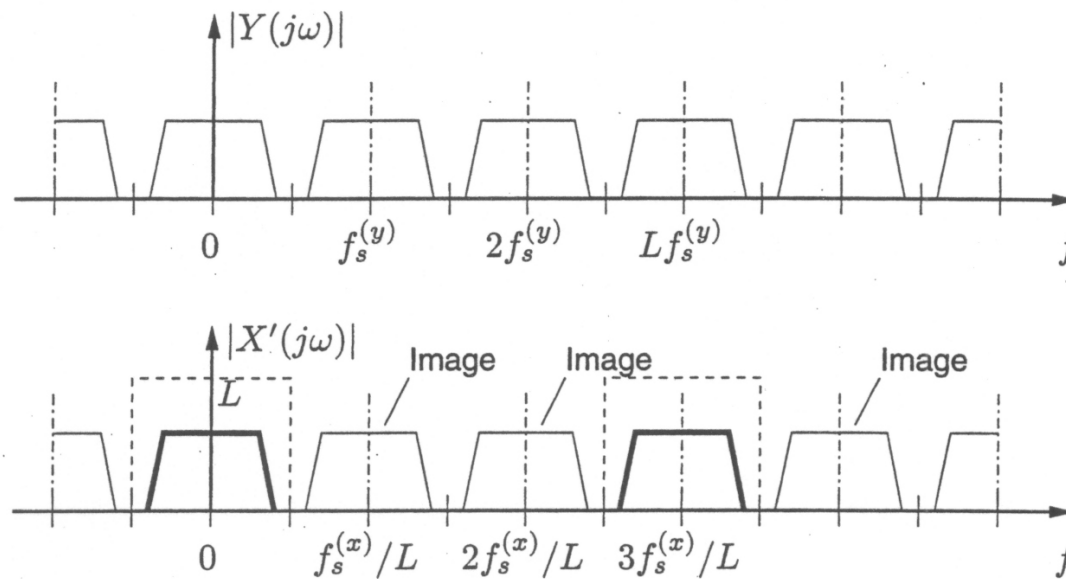


Abbildung 3.5: Betragsspektren vor und nach einer Aufwärtstastung mit $L = 3$

(aus: T. STRUTZ, Bilddatenkompression. Vieweg Verlag, 2005)