Charakterisierung eines Labyrinthes durch ein Wort über einem zweistelligen Alphabet

Karin Thalwitzer

1. Wir beschreiben ein Labyrinth durch einen Graphen G; G sei endlich, eben und zusammenhängend. Er besitze einen Knotenpunkt P mit der Wertigkeit eins (P wird später als Startknoten für ein Durchforschen von G benutzt.). Die Menge der Graphen G bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$.

Die klassische Theseus-Sage wird als bekannt vorausgesetzt. C.WIENER war der Erste, der das Labyrinthproblem als mathematisches Problem formulierte und einen Algorithmus zur vollständigen Durchforschung eines Graphen G in endlich vielen Schritten angab. Wir verstehen dabei unter einem Schritt das Durchforschen einer Kante; der Graph heißt vollständig durchforscht, wenn jede Kante von G mindestens einmal begangen wurde.

Algorithmus nach WIENER :

0) Gehe von P aus unter Abwickeln des Fadens bis zum nächsten Knoten.
1) Gehe auf der (bezüglich der Ankunftskante) nächsten linken Kante unter Abwickeln des Fadens bis zum nächsten Knoten.
2) Führt über den erreichten Knoten bereits der Faden?
nein: Fortsetzung bei 5)
ja: Fortsetzung bei 3)
3) Gehe längs des Fadens unter Aufwickeln dieses Fadens bis zum vorhergehenden Knoten zurück.
4) Ist P erreicht?
nein: Fortsetzung bei 5)
ja: Stop
5) Liegt entlang der (bezüglich der Ankunftskante) nächsten linken Kante der Faden?
nein: Fortsetzung bei 1)
ja: Fortsetzung bei 3)

Wird beim Zurückgehen der Faden nicht auf- , sondern erneut abgewickelt und zusätzlich festgelegt, daß keine Kante beschritten werden soll, auf der schon zwei Fadenlagen liegen, so erhält man eine Vorschrift, bei der jede Kante genau zweimal durchlaufen wird. Eine solche Vorschrift würde zuerst von TREMAUX angegeben.
Wir vereinbaren nun: Bei jedem Vorwärtsschritt soll sich Theseus eine Eins notieren und bei jedem Rückwärtsschritt eine Null. Auf diese Weise entsteht beim vollständigen Durchforschen eines Graphen G ein Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$.

D e f i n i t i o n : Ein Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ heißt Theseuswort W (bzw. Theseuswort T) des Graphen G genau dann, wenn es beim vollständigen Durchforschen von G nach der Vorschrift von Wiener (bzw. nach der Vorschrift von Trémaux) entstanden ist.

2. Bemerkung: Ein beliebiges Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$, $X = x_1x_2...x_N$, $x_\nu \in \{0,1\}$, $\nu = 1, 2,..., N$ ist Theseuswort genau dann, wenn gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \begin{cases} > \frac{n}{2} & \text{falls } n < N \\ = \frac{n}{2} & \text{falls } n = N \end{cases} \tag{1}$$

(Bei dieser Summation werden die Symbole x_ν als ganze Zahlen aufgefaßt.)
Daß Bedingung (1) notwendig ist, folgt sofort aus der Definition der Theseusworte. Andererseits kann zu jedem Wort X, das (1) genügt, ein Baum angegeben werden, der X als Theseuswort besitzt (Die Worte W und T stimmen für Bäume überein.). Dazu wird zunächst eine Folge von k Kanten gezeichnet, wobei k die Anzahl der Einsen vor der ersten Null im Wort X ist. Für jede folgende Null geht man auf der gezeichneten Kantenfolge einen Schritt zurück, dabei an jeder Verzweigung nach links. Für jede folgende Eins wird im erreichten Knoten links von den bisher gezeichneten Kanten (bezogen auf die letzte Einlaufrichtung) eine neue Kante angefügt.

3. Für das Folgende (wie auch schon bei der Konstruktion des Baumes aus dem Wort X) sei G in die Euklidische Ebene eingebettet. Nach Definition gehören zu jedem Graphen G eindeutig die Theseusworte

W und T. Wir wollen untersuchen, ob G durch W bzw. T schon vollständig bestimmt ist. Zunächst betrachten wir nur Worte W, da sie mehr Information enthalten als die Worte T.

Die Frage, ob G durch W eindeutig bestimmt ist, ist zu verneinen. Abb. 1 zeigt drei Graphen, die das gleiche Theseuswort W besitzen, nämlich

1111111110011000000111111000011000000
1111110011110000000111111001100000000

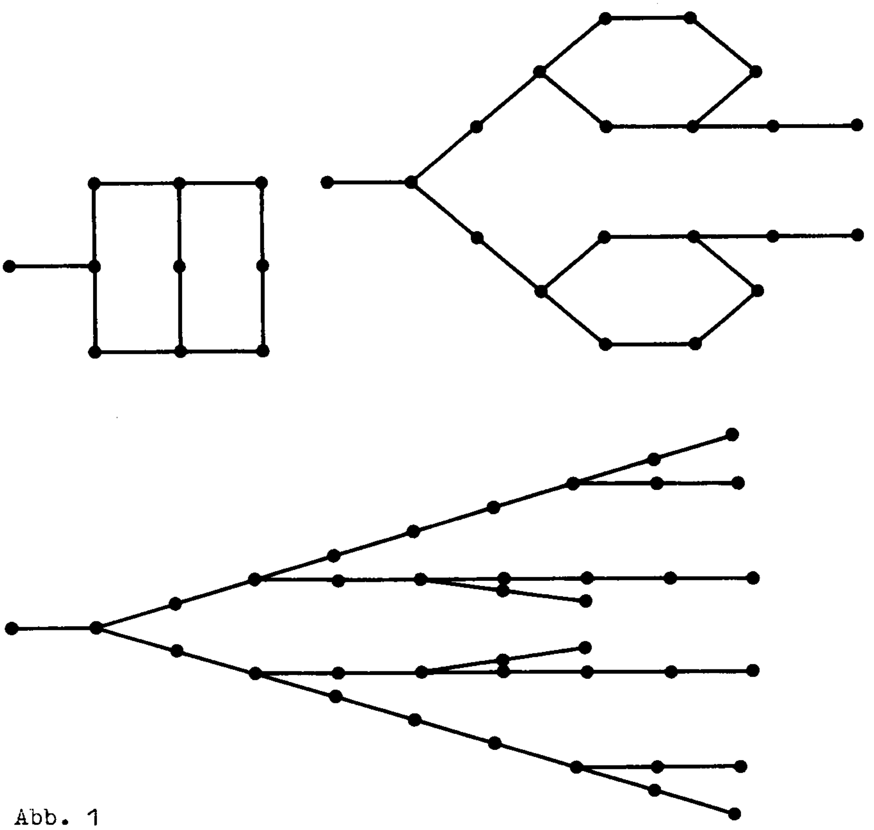

Abb. 1

Man kann zeigen, daß durch geeignete Einschränkungen der betrachteten Graphenmenge Eindeutigkeit erzwungen werden kann.

D e f i n i t i o n : Es sei

$\mathfrak{G}_0$ die Menge aller Bäume aus $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{G}_2$ die Menge aller (nach Entfernen des Knotens P) zweifach zusammenhängenden Graphen aus $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{G}_1$ die Menge aller Graphen aus $\mathfrak{G}$, die nicht zu $\mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_2$ gehören.

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 1: Jeder Graph G aus $\mathfrak{G}_0$ ist durch sein Theseuswort W eindeutig bestimmt.

Als Beweis dient die oben ausgeführte Rekonstruktion des Baumes aus einem Wort X.

Satz 2: Jeder Graph G aus $\mathfrak{G}_2$ ist durch sein Theseuswort W eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes und ein Algorithmus zur Rekonstruktion von G aus dem Wort W werden in der Zeitschrift "Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik" (1967) angegeben.

Satz 3: Ein Graph G aus $\mathfrak{G}_1$ ist nicht eindeutig durch sein Theseuswort W bestimmt.

Zum Beweis geben wir zwei (bei festliegender ebener Einbettung) verschiedene Graphen an, die das gleiche Theseuswort W

111100011100011110000

besitzen. (Abb. 2).

4. Um die Zugehörigkeit eines beliebigen Graphen zu einer der oben eingeführten Klassen der Menge $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, ziehen wir das Theseuswort T heran. Zu $G \in \mathfrak{G}$ bestimmen wir die Worte W und T. Stimmen W und T überein, so gehört G zu $\mathfrak{G}_0$. Ist $W \neq T$, so wird durch Vergleich von W und T festgestellt, ob G außer P noch andere Knoten mit der Wertigkeit Eins besitzt. Ist das der Fall, so gehört G zu $\mathfrak{G}_1$. Andernfalls wird überprüft, ob G Artikulationsknoten besitzt. (Eine Bedingung für Artikulationsknoten ergibt

sich aus dem Rekonstruktionsalgorithmus für Graphen aus $\mathfrak{G}_2$.) Damit kann über die Klassenzugehörigkeit von G entschieden werden.

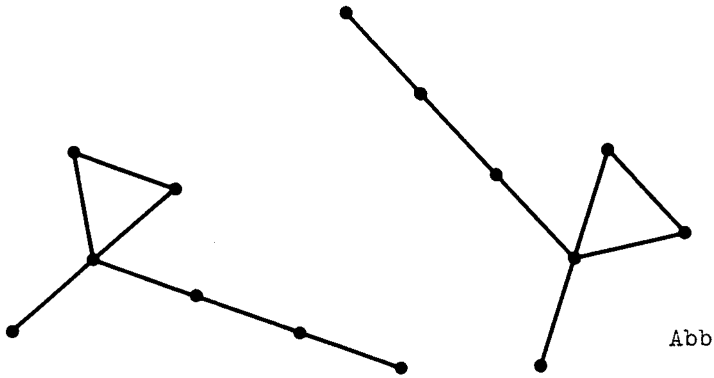

Abb. 2

5. Es wird nun untersucht, ob die Benutzung des Wortes T zusätzlich zu W für die Rekonstruktion von G Vorteile bringt. Zunächst stellen wir fest, daß Graphen $G \in \mathfrak{G}_1$ auch durch W und T nicht vollständig beschrieben werden. So zum Beispiel besitzen die Graphen in Abb. 2 auch das gleiche Theseuswort T :

1111000111 0000

Für Graphen $G \in \mathfrak{G}_2$ kann ein wesentlich einfacherer Rekonstruktionsalgorithmus angegeben werden. Man benutzt T zur Konstruktion eines Baumes. Durch Vergleich mit W stellt man fest, welche Knoten noch Abzweigungen besitzen und beschafft eine geeignete Numerierung dieser Knoten und der Endknoten des Baumes. Um G zu erhalten, hat man nur noch Knoten mit der gleichen Nummer zu identifizieren.

6. Zum Schluß beschäftigen wir uns noch kurz mit der Charakterisierung von Graphen $G \in \mathfrak{G}$ durch ein dreistelliges Alphabet. Wir vereinbaren: Theseus soll den Graphen G nach der Vorschrift von Trémaux durchforschen und wie oben Nullen und Einsen notieren. Er soll ein Symbol * notieren, falls er einen Endknoten erreicht hat oder einen Knoten, dessen nächste linke Kante schon zweimal durchlaufen wurde. Auf diese Weise entsteht beim vollständigen Durchforschen von G ein Wort über dem Alphabet $\{0,1,*\}$, das wir als Theseuswort T^* bezeichnen wollen. Man kann zeigen, daß das Wort T^* jeden Graphen $G \in \mathfrak{G}$ vollständig bestimmt.

(Die hier nicht angegebenen Algorithmen wurden im Rahmen einer Diplomarbeit von H. VÖLKER aufgestellt.)