Bemerkungen und Beispiele zu Normalteilern und Auflösbarkeit

1. Wenn G abelsch ist, folgt, $G \rhd \{e\} \wedge G/_{\{e\}} \approxeq G$ ist abelsch.
2. Wenn G einfach und nicht abelsch ist, so ist G auch nicht auflösbar. Die einzige Normalreihe ist $G \rhd \{e\} \wedge G/_{\{e\}}$ und *nicht* auflösbar.
3. $\mathfrak{S}_2$ ist eine auflösbare Gruppe nach Bemerkung 1 (s.o.).
4. $\mathfrak{S}_3$ ist eine auflösbare Gruppe: $\mathfrak{S}_3 \rhd \mathfrak{A}_3 \rhd \{e_3\}$ ist eine Normalreihe und $|\mathfrak{S}_3/_{\mathfrak{A}_3}| = 2 \Rightarrow \mathfrak{S}/_{\mathfrak{A}_3}$ ist abelsch und $\mathfrak{A}_3/_{\{e_3\}} \approxeq \mathfrak{A}_3$ ist auch abelsch.

Beweis zu Hilfssatz 2

„$\Leftarrow$“ Nach der Definition von K^n und der daran angeschlossenen Bemerkung gilt: $G = K^0(G) \rhd K(G) \rhd \cdots \rhd K^i(G) \rhd \ldots$ mit $K^i(G)/_{K^{i+1}(G)}$ abelsch. Nach der Voraussetzung ist $K^n(G) = \{e\} \Rightarrow G$ auflösbar.

„$\Rightarrow$“ G ist auflösbar, d.h. $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = \{e\}$ und $G_i/_{G_{i+1}}$ ist abelsch. Daher genügt es zu zeigen, dass $K^i(G) \subseteq G_i$[1]. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion:
I-Anfang: $i = 0 \quad K^0(G) = G_0 \subseteq G_0$
I-Annahme: Es gilt k für $k > 0$.
I-Beweis: Für $k+1$ ist $G_k/_{G_{k+1}}$ abelsch. Somit folgt $K(G_k) \subseteq G_{k+1}$
$K^k(G) \subseteq G_k$
$K^{k+1}(G) = K(K^k(G)) \subseteq K(G_k) \subseteq G_{k+1}$

□

[1] denn $K^n(G) \subseteq G_n = \{e\} \Rightarrow K^n(G) = \{e\}$