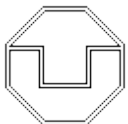


Logik

Wird in verschiedenen Wissenschaftsbereichen – teilweise mit verschiedenen Intentionen – untersucht und verwendet:

- **Philosophie:** Theorie des korrekten Argumentierens: welche Schlüsse kann man aus gegebenen Annahmen ziehen?
- **Mathematik:** Formalisierung und Automatisierung mathematischen Schließens.
- **Informatik:** formale Modellierung informatischer Systeme und Verifikation von Eigenschaften dieser Systeme.

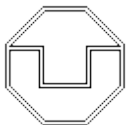


Aussagenlogik

betrachtet **atomare Aussagen**
und deren **logische Verknüpfung**

Atomare Aussagen: können gelten oder nicht.

- A_1 : Dresden hat viele Weihnachtsmärkte.
- A_2 : Dresden hat im Dezember viele Besucher.
- A_3 : Dresdens Hotels sind im Dezember ausgebucht.
- A_4 : In Dresden liegt im Dezember nie Schnee.
- B_1 : Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist regulär.
- B_2 : Für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ gibt es eine Zahl n_0 , die die im Pumping-Lemma (Lemma 3.1) formulierten Eigenschaften erfüllt.
- C_1 : Der Mond besteht aus grünem Käse.



Aussagenlogik

Atomare Aussagen:

können mittels **logischer Operatoren (Junktoren)** zu **Formeln** verknüpft werden

Hat Dresden viele Weihnachtsmärkte, so hat es im Dezember viele Besucher.

$$A_1 \rightarrow A_2$$

Hat Dresden im Dezember viele Besucher, so sind dort die Hotels im Dezember ausgebucht.

$$A_2 \rightarrow A_3$$

Liegt in Dresden im Dezember nie Schnee, so hat es nicht viele Weihnachtsmärkte.

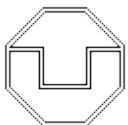
$$A_4 \rightarrow \neg A_1$$

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ regulär, so gibt es für sie eine Zahl n_0 , die die im Pumping-Lemma (Lemma 3.1) formulierten Eigenschaften erfüllt.

$$B_1 \rightarrow B_2$$

Besteht der Mond aus grünem Käse, so liegt in Dresden im Dezember nie Schnee.

$$C_1 \rightarrow A_4$$



Aussagenlogik

Aus gegebenen Formeln kann man andere **folgern**:

- Aus der Gültigkeit der Formeln

$$A_1, A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, A_4 \rightarrow \neg A_1$$

kann man folgern, daß auch die Formel

$$A_3 \wedge \neg A_4$$

gilt.

Wieso eigentlich?

- Aus der Gültigkeit der Formeln

$$\neg B_2, B_1 \rightarrow B_2,$$

kann man folgern, daß auch die Formel

$$\neg B_1$$

gilt.

Ist doch logisch!



Aussagenlogik

Wie rechtfertigt man, daß gewisse **Schlußfolgerungen korrekt** sind und andere nicht?

- Angabe einer formalen **Semantik** für die verwendeten Junktoren, die eine formale Definition des **Gültigkeitsbegriffs** liefert.

Zeige dann, daß die **Folgerungen gültigkeitserhaltend** sind.

- Angabe eines **Kalküls**, der aus unmittelbar einleuchtenden Axiomen und Schlußregeln besteht.

Zeige dann, daß die **Folgerungen** in diesem Kalkül hergeleitet werden können.

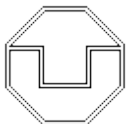
$$A \rightarrow A$$

Axiom

ist intuitiv gültig.

Gilt A und $A \rightarrow B$,
so auch B .

Schlußregel



§ 13. Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Definition 13.1 (Syntax)

Es sei \mathcal{P} eine abzählbar unendliche Menge von **atomaren Aussagen** (aussagenlogischen Variablen).

Die Menge der **aussagenlogischen Formeln** ist induktiv definiert:

1. Jedes $p \in \mathcal{P}$ ist eine aussagenlogische Formel (atomare Formel).

2. Sind ϕ, ψ aussagenlogische Formeln, so auch

$(\phi \wedge \psi)$ (Konjunktion)

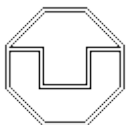
$(\phi \vee \psi)$ (Disjunktion)

$\neg\phi$ (Negation)

$(\phi \rightarrow \psi)$ (Implikation)

$(\phi \leftrightarrow \psi)$ (Äquivalenz)

Wir lassen häufig das „**aussagenlogisch**“ weg und sagen einfach „**Formel**“ und „**Variable**“.

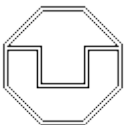


Beispiel

Sind p, q aussagenlogische Variablen, so sind

$$p, \neg p, (\neg p \vee q), (p \rightarrow q), ((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)), (p \wedge \neg p)$$

aussagenlogische Formeln.



Definition 13.2 (Variablen und Unterformeln einer Formel)

Die Menge der aussagenlogischen Variablen $Var(\phi)$ und der Unterformeln $Unt(\phi)$ einer aussagenlogischen Formel ϕ sind induktiv definiert:

1. Ist $\phi = p \in \mathcal{P}$, so ist $Var(\phi) = \{p\} = Unt(\phi)$.
2. Ist $\phi = (\phi_1 \circ \phi_2)$ für aussagenlogische Formeln ϕ_1, ϕ_2 und einen binären Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so ist

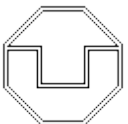
$$Var(\phi) = Var(\phi_1) \cup Var(\phi_2)$$

$$Unt(\phi) = \{\phi\} \cup Unt(\phi_1) \cup Unt(\phi_2)$$

3. Ist $\phi = \neg\psi$ für eine aussagenlogische Formeln ψ , so ist

$$Var(\phi) = Var(\psi)$$

$$Unt(\phi) = \{\phi\} \cup Unt(\psi)$$



Beispiel

Sind p, q aussagenlogische Variablen, so sind

$$p, \neg p, (\neg p \vee q), (p \rightarrow q), \underline{((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))}, (p \wedge \neg p)$$

aussagenlogische Formeln.

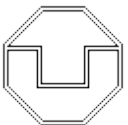
$$\text{Var}(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) = \{p, q\}$$

$$\text{Unt}(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) =$$

$$\{((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)), (\neg p \vee q), (p \rightarrow q), \neg p, p, q\}$$

Beachte:

$$\text{Var}(\phi) = \text{Unt}(\phi) \cap \mathcal{P}$$

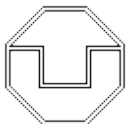


Semantik

Atomare Aussagen:

können gelten (d.h. wahr sein) oder nicht (d.h. falsch sein).

- Um festzulegen, welche Aussagen in der betrachteten Situation gelten und welche nicht, verwenden wir **Wertzuweisungen**.
- Eine **Wertzuweisung** weist jeder Aussagenvariablen einen **Wahrheitswert** zu. Wir verwenden den Wert 1 für „wahr“ und den Wert 0 für „falsch“.
- Formal ist also eine **Wertzuweisung** w eine Funktion $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$.



Semantik

Formeln:

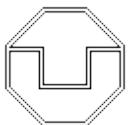
um diesen ebenfalls einen Wahrheitswert zuweisen zu können, muß die **Semantik der Junktoren** fixiert werden.

- Jeder zweistellige (binäre) Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ wird durch die zweistellige Boolesche Funktion $\circ^S : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ interpretiert.
- Der einstellige (unäre) Junktor \neg wird durch die einstellige Boolesche Funktion $\neg^S : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ interpretiert.

x	y	$\wedge^S(x, y)$	$\vee^S(x, y)$	$\rightarrow^S(x, y)$	$\leftrightarrow^S(x, y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0

Beachte: während für aussagenlogische Variablen alle möglichen Wertzuweisungen betrachtet werden, ist die **Interpretation der Junktoren** fixiert.



Semantik

warum gerade so definiert?

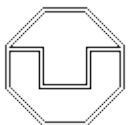
x	y	$\wedge^S(x, y)$	$\vee^S(x, y)$	$\rightarrow^S(x, y)$	$\leftrightarrow^S(x, y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0

Beachte:

diese Interpretation der Junktoren entspricht ihrer **intuitiven Bedeutung**:

- \wedge entspricht „und“.
- \vee entspricht „oder“. *Nicht exklusiv!*
- \neg entspricht „nicht“.
- \rightarrow entspricht „wenn ... dann“. *Stets wahr, wenn die Vorbedingung falsch ist!*
- \leftrightarrow entspricht „genau dann wenn“.



Definition 13.3 (Semantik der Aussagenlogik)

Es sei $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertzuweisung und ϕ eine aussagenlogische Formel. Der **Wahrheitswert** $\widehat{w}(\phi)$ der Formel ϕ unter der Wertzuweisung w ist induktiv definiert:

1. Ist $\phi = p \in \mathcal{P}$, so ist

$$\widehat{w}(\phi) = w(p).$$

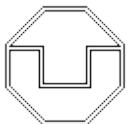
2. Ist $\phi = (\phi_1 \circ \phi_2)$ für aussagenlogische Formeln ϕ_1, ϕ_2 und einen binären Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so ist

$$\widehat{w}(\phi) = \circ^S(\widehat{w}(\phi_1), \widehat{w}(\phi_2)).$$

3. Ist $\phi = \neg\psi$ für eine aussagenlogische Formeln ψ , so ist

$$\widehat{w}(\phi) = \neg^S(\widehat{w}(\psi)).$$

Wir schreiben im Folgenden auch für Formeln ϕ einfach $w(\phi)$ anstelle von $\widehat{w}(\phi)$.



Beispiel

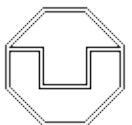
Wir betrachten die Formel $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$ aus unserem Beispiel.

Für die Wertzuweisung w mit $w(p) = 1$ und $w(q) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}w(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) &= \leftrightarrow^S(w((\neg p \vee q)), w((p \rightarrow q))) \\ &= \leftrightarrow^S(\vee^S(w(\neg p), w(q)), \rightarrow^S(w(p), w(q))) \\ &= \leftrightarrow^S(\vee^S(\neg^S(w(p)), w(q)), \rightarrow^S(w(p), w(q))) \\ &= \leftrightarrow^S(\vee^S(\neg^S(1), 0), \rightarrow^S(1, 0)) \\ &= \leftrightarrow^S(\vee^S(0, 0), \rightarrow^S(1, 0)) \\ &= \leftrightarrow^S(0, 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

x	y	$\wedge^S(x, y)$	$\vee^S(x, y)$	$\rightarrow^S(x, y)$	$\leftrightarrow^S(x, y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0



Beachte:

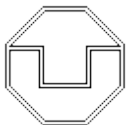
Für die Bestimmung des Wahrheitswertes einer **Formel** ϕ sind nur die Wahrheitswerte der aussagenlogischen **Variablen** in $Var(\phi)$ relevant.

Es genügt daher, **nur diesen Variablen Werte** zuzuweisen. Wir werden daher im Folgenden meist nur den relevanten (**endlichen!**) Teil einer Wertzuweisung angeben.

Die Berechnung des Wahrheitswertes einer Formel nennen wir auch deren **Auswertung**.

Um eine Formel auszuwerten, müssen wir all ihre **Unterformeln auswerten**:

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
1	1	0	1	1	1



Definition 13.4 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Es sei $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertzuweisung und ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. Die Wertzuweisung w ist ein **Modell von ϕ** gdw. $w(\phi) = 1$ gilt. Wir schreiben dann

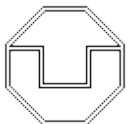
$$w \models \phi$$

und sagen auch: w **erfüllt ϕ** .

Andernfalls (d.h. wenn $w(\phi) = 0$ gilt) schreiben wir

$$w \not\models \phi.$$

2. Die Formel ϕ ist **erfüllbar** gdw. sie ein Modell hat, d.h. eine Wertzuweisung w **existiert** mit $w \models \phi$. Andernfalls ist ϕ **unerfüllbar**.
3. Die Formel ϕ ist **allgemeingültig** gdw. **jede Wertzuweisung ein Modell von ϕ ist**. Allgemeingültige Formeln nennen wir auch **Tautologien**



Satz 13.5

Die Formel ϕ ist **allgemeingültig** gdw. ihre Negation $\neg\phi$ **unerfüllbar** ist.

Beweis:

ϕ ist **allgemeingültig**

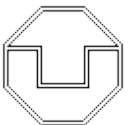
gdw. jede Wertzuweisung w ein Modell von ϕ ist

gdw. für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\phi) = 1$

gdw. für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\neg\phi) = 0$

gdw. keine Wertzuweisung w ein Modell von $\neg\phi$ ist

gdw. $\neg\phi$ **unerfüllbar** ist.



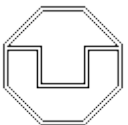
Wie stellt man fest, ob eine gegebene Formel ϕ **allgemeingültig / erfüllbar** ist?

Da für die Auswertung einer Formel bzgl. einer Wertzuweisung w **nur die Werte der (endlich vielen) Variablen in $Var(\phi)$** relevant sind, genügt es, 2^n Fälle zu betrachten, wobei $n = |Var(\phi)|$.

Man stellt dazu die **Wahrheitstafel** für ϕ auf:

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tautologie!

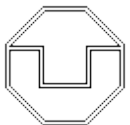


Weitere Beispiele:

$(p \wedge \neg p)$ unerfüllbar

$(p \vee \neg p)$ Tautologie

$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ erfüllbar, aber keine Tautologie



Definition 13.6 (semantische Konsequenz)

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. Die Wertzuweisung w ist ein **Modell von Γ** gdw. $w \models \psi$ für jede Formel $\psi \in \Gamma$ gilt.

Die Formelmenge Γ ist **erfüllbar** gdw. sie ein Modell hat.

2. Die Formel ϕ ist eine **semantische Konsequenz von Γ** gdw. jedes Modell von Γ auch Modell von ϕ ist. Wir schreiben dann

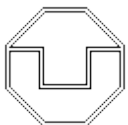
$$\Gamma \models \phi$$

und sagen auch: ϕ folgt aus Γ .

Andernfalls (d.h. wenn ϕ nicht aus Γ folgt) schreiben wir

$$\Gamma \not\models \phi.$$

Beachte: die Menge Γ kann hier auch unendlich sein!

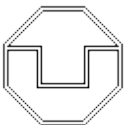


Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, so gilt:
 - (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
 - (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ Abkürzung für $(\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \dots (\phi_{n-1} \wedge \phi_n) \dots))$



Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, so gilt:
 - (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
 - (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

Beweis:

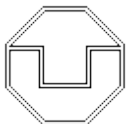
(1) $\Gamma \models \phi$

gdw. jedes Modell von Γ ist auch Modell von ϕ

gdw. kein Modell von Γ ist Modell von $\neg\phi$

gdw. es gibt kein Modell von $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$

gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ist unerfüllbar.



Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, so gilt:
 - (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
 - (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

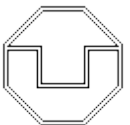
Beweis:

(2) folgt aus der Tatsache, daß

$$w\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i\right) = 1 \text{ gdw. } w(\phi_i) = 1 \text{ für alle } i, 1 \leq i \leq n.$$



Semantik von \wedge



Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, so gilt:
 - (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
 - (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

(2a) Γ erfüllbar

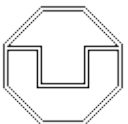
gdw. es gibt eine Wertzuweisung w , die Modell von Γ ist

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w mit $w(\phi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w mit $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i) = 1$

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w , die Modell von $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ ist

gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ ist erfüllbar.



(2b) $\Gamma \models \phi$

gdw. jedes Modell von Γ ist auch Modell von ϕ

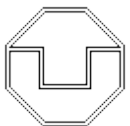
gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: ist $w(\phi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$,
so ist $w(\phi) = 1$

gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: ist $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i) = 1$, so ist $w(\phi) = 1$

gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi) = 1$

gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ ist allgemeingültig.

x	y	$\rightarrow^S(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Korollar 13.8

Eine Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn sie aus der leeren Formelmengemenge folgt, d.h.

ϕ ist eine Tautologie gdw. $\emptyset \models \phi$.

Beweis:

$\emptyset \models \phi$

gdw. $\emptyset \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar

gdw. $\neg\phi$ unerfüllbar

gdw. ϕ allgemeingültig

Anstelle von $\emptyset \models \phi$ schreiben wir einfach $\models \phi$, d.h.

„ $\models \phi$ “ ist gleichbedeutend mit „ ϕ ist Tautologie“.

