Logik

Wird in verschiedenen Wissenschaftsbereichen – teilweise mit verschiedenen Intentionen – untersucht und verwendet:

- Philosophie: Theorie des korrekten Argumentierens: welche Schlüsse kann man aus gegebenen Annahmen ziehen?
- Mathematik: Formalisierung und Automatisierung mathematischen Schließens.
- Informatik: formale Modellierung informatischer Systeme und Verifikation von Eigenschaften dieser Systeme.

Aussagenlogik

betrachtet atomare Aussagen
und deren logische Verknüpfung

Atomare Aussagen: können gelten oder nicht.

- A_1: Dresden hat viele Weihnachtsmärkte.

  A_2: Dresden hat im Dezember viele Besucher.

  A_3: Dresdens Hotels sind im Dezember ausgebucht.

  A_4: In Dresden liegt im Dezember nie Schnee.

- B_1: Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist regulär.

  B_2: Für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ gibt es eine Zahl n_0, die die im Pumping-Lemma (Lemma 3.1) formulierten Eigenschaften erfüllt.

- C_1: Der Mond besteht aus grünem Käse.

Aussagenlogik

Atomare Aussagen:

können mittels logischer Operatoren (Junktoren) zu Formeln verknüpft werden

Hat Dresden viele Weihnachtsmärkte, so hat es im Dezember viele Besucher. $A_1 \rightarrow A_2$

Hat Dresden im Dezember viele Besucher, so sind dort die Hotels im Dezember ausgebucht. $A_2 \rightarrow A_3$

Liegt in Dresden im Dezember nie Schnee, so hat es nicht viele Weihnachtsmärkte. $A_4 \rightarrow \neg A_1$

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ regulär, so gibt es für sie eine Zahl n_0, die die im Pumping-Lemma (Lemma 3.1) formulierten Eigenschaften erfüllt. $B_1 \rightarrow B_2$

Besteht der Mond aus grünem Käse, so liegt in Dresden im Dezember nie Schnee. $C_1 \rightarrow A_4$

Aussagenlogik

Aus gegebenen Formeln kann man andere folgern:

- Aus der Gültigkeit der Formeln

  $$A_1, \quad A_1 \rightarrow A_2, \quad A_2 \rightarrow A_3, \quad A_4 \rightarrow \neg A_1$$

  kann man folgern, daß auch die Formel

  $$A_3 \wedge \neg A_4$$

  gilt.

Wieso eigentlich?

- Aus der Gültigkeit der Formeln

  $$\neg B_2, \quad B_1 \rightarrow B_2,$$

  kann man folgern, daß auch die Formel

  $$\neg B_1$$

  gilt.

Ist doch logisch!

Dresden

Aussagenlogik

Wie rechtfertigt man, daß gewisse Schlußfolgerungen korrekt sind und andere nicht?

- Angabe einer formalen Semantik für die verwendeten Junktoren, die eine formale Definition des Gültigkeitsbegriffs liefert.

  Zeige dann, daß die Folgerungen gültigkeitserhaltend sind.

- Angabe eines Kalküls, der aus unmittelbar einleuchtenden Axiomen und Schlußregeln besteht.

  Zeige dann, daß die Folgerungen in diesem Kalkül hergeleitet werden können.

$\boxed{A \rightarrow A}$ ist intuitiv gültig.

Axiom

$\boxed{\text{Gilt } A \text{ und } A \rightarrow B, \text{ so auch } B.}$

Schlußregel

Dresden

§ 13. Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Definition 13.1 (Syntax)

Es sei $\mathcal{P}$ eine abzählbar unendliche Menge von atomaren Aussagen (aussagenlogischen Variablen).

Die Menge der aussagenlogischen Formeln ist induktiv definiert:

1. Jedes $p \in \mathcal{P}$ ist eine aussagenlogische Formel (atomare Formel).

2. Sind ϕ, ψ aussagenlogische Formeln, so auch

   $(\phi \wedge \psi)$ (Konjunktion)

   $(\phi \vee \psi)$ (Disjunktion)

   $\neg\phi$ (Negation)

   $(\phi \rightarrow \psi)$ (Implikation)

   $(\phi \leftrightarrow \psi)$ (Äquivalenz)

Wir lassen häufig das „aussagenlogisch“ weg und sagen einfach „Formel“ und „Variable“.

Beispiel

Sind p, q aussagenlogische Variablen, so sind

$$p, \quad \neg p, \quad (\neg p \vee q), \quad (p \rightarrow q), \quad ((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)), \quad (p \wedge \neg p)$$

aussagenlogische Formeln.

Dresden

Definition 13.2 (Variablen und Unterformeln einer Formel)

Die Menge der aussagenlogischen Variablen $Var(\phi)$ und der Unterformeln $Unt(\phi)$ einer aussagenlogischen Formel ϕ sind induktiv definiert:

1. Ist $\phi = p \in \mathcal{P}$, so ist $Var(\phi) = \{p\} = Unt(\phi)$.

2. Ist $\phi = (\phi_1 \circ \phi_2)$ für aussagenlogische Formeln ϕ_1, ϕ_2 und einen binären Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so ist

$$Var(\phi) = Var(\phi_1) \cup Var(\phi_2)$$

$$Unt(\phi) = \{\phi\} \cup Unt(\phi_1) \cup Unt(\phi_2)$$

3. Ist $\phi = \neg\psi$ für eine aussagenlogische Formeln ψ, so ist

$$Var(\phi) = Var(\psi)$$

$$Unt(\phi) = \{\phi\} \cup Unt(\psi)$$

Dresden

Beispiel

Sind p, q aussagenlogische Variablen, so sind

$$p, \quad \neg p, \quad (\neg p \vee q), \quad (p \rightarrow q), \quad \underline{((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)),} \quad (p \wedge \neg p)$$

aussagenlogische Formeln.

$$Var(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) = \{p, q\}$$

$$Unt(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) =$$

$$\{((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)), (\neg p \vee q), \quad (p \rightarrow q), \neg p, \ p, \ q\}$$

Beachte:

$$\boxed{Var(\phi) = Unt(\phi) \cap \mathcal{P}}$$

Dresden

Semantik

Atomare Aussagen:

können gelten (d.h. wahr sein) oder nicht (d.h. falsch sein).

- Um festzulegen, welche Aussagen in der betrachteten Situation gelten und welche nicht, verwenden wir Wertzuweisungen.
- Eine Wertzuweisung weist jeder Aussagenvariablen einen Wahrheitswert zu. Wir verwenden den Wert 1 für „wahr“ und den Wert 0 für „falsch“.
- Formal ist also eine Wertzuweisung w eine Funktion $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$.

Semantik

Formeln:

um diesen ebenfalls einen Wahrheitswert zuweisen zu können, muß die Semantik der Junktoren fixiert werden.

- Jeder zweistellige (binäre) Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ wird durch die zweistellige Boolesche Funktion $\circ^S : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ interpretiert.

- Der einstellige (unäre) Junktor $\neg$ wird durch die einstellige Boolesche Funktion $\neg^S : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ interpretiert.

x	y	$\wedge^S(x,y)$	$\vee^S(x,y)$	$\rightarrow^S(x,y)$	$\leftrightarrow^S(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0

Beachte: während für aussagenlogische Variablen alle möglichen Wertzuweisungen betrachtet werden, ist die Interpretation der Junktoren fixiert.

Semantik

warum gerade so definiert?

x	y	$\wedge^S(x,y)$	$\vee^S(x,y)$	$\rightarrow^S(x,y)$	$\leftrightarrow^S(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0

Beachte:

diese Interpretation der Junktoren entspricht ihrer intuitiven Bedeutung:

- $\wedge$ entspricht „und“.
- $\vee$ entspricht „oder“. *Nicht exklusiv!*
- $\neg$ entspricht „nicht“.
- $\rightarrow$ entspricht „wenn … dann“. *Stets wahr, wenn die Vorbedingung falsch ist!*
- $\leftrightarrow$ entspricht „genau dann wenn“.

Definition 13.3 (Semantik der Aussagenlogik)

Es sei $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$ eine Wertzuweisung und ϕ eine aussagenlogische Formel. Der Wahrheitswert $\widehat{w}(\phi)$ der Formel ϕ unter der Wertzuweisung w ist induktiv definiert:

1. Ist $\phi = p \in \mathcal{P}$, so ist
$$\widehat{w}(\phi) = w(p).$$

2. Ist $\phi = (\phi_1 \circ \phi_2)$ für aussagenlogische Formeln ϕ_1, ϕ_2 und einen binären Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so ist
$$\widehat{w}(\phi) = \circ^S(\widehat{w}(\phi_1), \widehat{w}(\phi_2)).$$

3. Ist $\phi = \neg\psi$ für eine aussagenlogische Formeln ψ, so ist
$$\widehat{w}(\phi) = \neg^S(\widehat{w}(\psi)).$$

Wir schreiben im Folgenden auch für Formeln ϕ einfach $w(\phi)$ anstelle von $\widehat{w}(\phi)$.

Beispiel

Wir betrachten die Formel $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$ aus unserem Beispiel.

Für die Wertzuweisung w mit $w(p) = 1$ und $w(q) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
w(((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))) &= \leftrightarrow^S(w((\neg p \vee q)), w((p \rightarrow q))) \\
&= \leftrightarrow^S(\vee^S(w(\neg p), w(q)), \rightarrow^S(w(p), w(q))) \\
&= \leftrightarrow^S(\vee^S(\neg^S(w(p)), w(q)), \rightarrow^S(w(p), w(q))) \\
&= \leftrightarrow^S(\vee^S(\neg^S(1), 0), \rightarrow^S(1, 0)) \\
&= \leftrightarrow^S(\vee^S(0, 0), \rightarrow^S(1, 0)) \\
&= \leftrightarrow^S(0, 0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

x	y	$\wedge^S(x,y)$	$\vee^S(x,y)$	$\rightarrow^S(x,y)$	$\leftrightarrow^S(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	$\neg^S(x)$
0	1
1	0

Dresden

Beachte:

Für die Bestimmung des Wahrheitswertes einer Formel ϕ sind nur die Wahrheitswerte der aussagenlogischen Variablen in $Var(\phi)$ relevant.

Es genügt daher, nur diesen Variablen Werte zuzuweisen. Wir werden daher im Folgenden meist nur den relevanten (endlichen!) Teil einer Wertzuweisung angeben.

Die Berechnung des Wahrheitswertes einer Formel nennen wir auch deren Auswertung.

Um eine Formel auszuwerten, müssen wir all ihre Unterformeln auswerten:

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
1	1	0	1	1	1

Definition 13.4 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Es sei $w : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$ eine Wertzuweisung und ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. Die Wertzuweisung w ist ein Modell von ϕ gdw. $w(\phi) = 1$ gilt. Wir schreiben dann

   $$w \models \phi$$

   und sagen auch: w erfüllt ϕ.

   Andernfalls (d.h. wenn $w(\phi) = 0$ gilt) schreiben wir

   $$w \not\models \phi.$$

2. Die Formel ϕ ist erfüllbar gdw. sie ein Modell hat, d.h. eine Wertzuweisung w existiert mit $w \models \phi$. Andernfalls ist ϕ unerfüllbar.

3. Die Formel ϕ ist allgemeingültig gdw. jede Wertzuweisung ein Modell von ϕ ist. Allgemeingültige Formeln nennen wir auch Tautologien

Satz 13.5

Die Formel ϕ ist allgemeingültig gdw. ihre Negation $\neg\phi$ unerfüllbar ist.

Beweis:

ϕ ist allgemeingültig

gdw. jede Wertzuweisung w ein Modell von ϕ ist

gdw. für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\phi) = 1$

gdw. für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\neg\phi) = 0$

gdw. keine Wertzuweisung w ein Modell von $\neg\phi$ ist

gdw. $\neg\phi$ unerfüllbar ist.

Wie stellt man fest, ob eine gegebene Formel ϕ allgemeingültig / erfüllbar ist?

Da für die Auswertung einer Formel bzgl. einer Wertzuweisung w nur die Werte der (endlich vielen) Variablen in $Var(\phi)$ relevant sind, genügt es, 2^n Fälle zu betrachten, wobei $n = |Var(\phi)|$.

Man stellt dazu die Wahrheitstafel für ϕ auf:

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tautologie!

Weitere Beispiele:

$(p \wedge \neg p)$	unerfüllbar
$(p \vee \neg p)$	Tautologie
$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	erfüllbar, aber keine Tautologie

Definition 13.6 (semantische Konsequenz)

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. Die Wertzuweisung w ist ein Modell von Γ gdw. $w \models \psi$ für jede Formel $\psi \in \Gamma$ gilt.

   Die Formelmenge Γ ist erfüllbar gdw. sie ein Modell hat.

2. Die Formel ϕ ist eine semantische Konsequenz von Γ gdw. jedes Modell von Γ auch Modell von ϕ ist. Wir schreiben dann

   $$\Gamma \models \phi$$

   und sagen auch: ϕ folgt aus Γ.

   Andernfalls (d.h. wenn ϕ nicht aus Γ folgt) schreiben wir

   $$\Gamma \not\models \phi.$$

Beachte: die Menge Γ kann hier auch unendlich sein!

Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.

2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, so gilt:

   (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.

   (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \to \phi$ allgemeingültig ist.

$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ Abkürzung für $(\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \cdots (\phi_{n-1} \wedge \phi_n) \cdots))$

Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, so gilt:
   (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
   (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

Beweis:

(1) $\Gamma \models \phi$

gdw. jedes Modell von Γ ist auch Modell von ϕ

gdw. kein Modell von Γ ist Modell von $\neg\phi$

gdw. es gibt kein Modell von $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$

gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ist unerfüllbar.

Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, so gilt:
   (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
   (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

Beweis:

(2) folgt aus der Tatsache, daß

$$w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i) = 1 \text{ gdw. } w(\phi_i) = 1 \text{ für alle } i, 1 \leq i \leq n.$$

Semantik von $\wedge$

Dresden

Satz 13.7

Es sei Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Es gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.
2. Ist $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, so gilt:
   (a) Γ ist erfüllbar gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ erfüllbar ist.
   (b) $\Gamma \models \phi$ gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ allgemeingültig ist.

(2a) Γ erfüllbar

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w, die Modell von Γ ist

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w mit $w(\phi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w mit $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i) = 1$

gdw. es gibt eine Wertzuweisung w, die Modell von $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ ist

gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i$ ist erfüllbar.

(2b) $\Gamma \models \phi$

gdw. jedes Modell von Γ ist auch Modell von ϕ

gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: ist $w(\phi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$, so ist $w(\phi) = 1$

gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: ist $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i) = 1$, so ist $w(\phi) = 1$

gdw. für jede Wertzuweisung w gilt: $w(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi) = 1$

gdw. $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i \rightarrow \phi$ ist allgemeingültig.

x	y	$\rightarrow^S(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dresden

Korollar 13.8

Eine Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn sie aus der leeren Formelmenge folgt, d.h.

$$\phi \text{ ist eine Tautologie gdw. } \emptyset \models \phi.$$

Beweis:

$\emptyset \models \phi$

gdw. $\emptyset \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar

gdw. $\neg\phi$ unerfüllbar

gdw. ϕ allgemeingültig

Anstelle von $\emptyset \models \phi$ schreiben wir einfach $\models \phi$, d.h.

„$\models \phi$“ ist gleichbedeutend mit „ϕ ist Tautologie“.