

Christoph Xaver Schnurr

# Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven Regelung mit der Anwendung auf eine permanenterregte Synchronmaschine



Christoph Xaver Schnurr

**Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven  
Regelung mit der Anwendung auf eine permanenterregte  
Synchronmaschine**

Karlsruher Beiträge zur  
Regelungs- und Steuerungstechnik  
Karlsruher Institut für Technologie

Band 11

# **Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven Regelung mit der Anwendung auf eine permanenterregte Synchronmaschine**

von  
Christoph Xaver Schnurr

Karlsruher Institut für Technologie  
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven Regelung  
mit der Anwendung auf eine permanenterregte Synchronmaschine

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs  
von der KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) genehmigte Dissertation

von Christoph Xaver Schnurr, M.Sc.

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 2020  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.  
Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding parts marked otherwise, the cover, pictures and graphs –  
is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2022 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2511-6312

ISBN 978-3-7315-1095-6

DOI 10.5445/KSP/1000131520







# Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Bereits zu Beginn beschäftigte mich die Frage, wie die Ziele der Antriebsregelung systematisch in die modellprädiktive Regelung integriert werden können. Mein innerer Antrieb Grundsätze zu hinterfragen und systematische Lösungen zu suchen hielt mein Interesse an dieser Frage aufrecht, sodass aus meinen Erkenntnissen diese Dissertation entstehen konnte. Ermöglicht hat dies vielseitige Unterstützung in meinem privaten und beruflichen Umfeld, wofür ich mich bei allen Beteiligten bedanken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann, dem Hauptreferenten meines Promotionsverfahrens und Institutsleiter des IRS. Seine fachliche und persönliche Betreuung gab mir während der vergangenen Jahre Unterstützung und Rückhalt. Ich bedanke mich ebenfalls für die gegebene Freiheit in jeder Phase meiner Arbeit und das damit entgegengebrachte Vertrauen. Dem Korreferenten Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher vom Institut für Regelungstechnik der Technische Universität Braunschweig danke ich herzlich für sein Interesse an meiner Dissertation und deren Begutachtung sowie die dabei entstandenen Anmerkungen.

Bei den Angestellten des langjährigen Projektpartners Schaeffler Technologies AG & Co. KG bedanke ich mich für die Unterstützung und enge Zusammenarbeit, allen voran Dr.-Ing. Johannes Kolb. Ich danke allen Beteiligten für ihr Engagement im Schaeffler Hub for Advanced Research (SHARE) am KIT und den wertvollen fachlichem Austausch, insbesondere den Doktoranden des elektrotechnischen Instituts (ETI) am KIT.

Zum Gelingen dieser Arbeit haben nicht zuletzt die Studierenden und das Kollegium am IRS beigetragen. Bemerkenswert an der Arbeitsatmosphäre war die gegenseitige fachliche Unterstützung im Kollegium, welche durch wechselseitiges Interesse an den diversen Forschungsfragen getragen wurde. Namentlich möchte ich mich bei Dr.-Ing. Stefan Krebs für die Durchsicht meiner Arbeit und alle dabei entstandenen Anmerkungen bedanken sowie bei Dr.-Ing. Julian Ludwig für die kultivierten Diskussionen und die gemeinsame Zeit in unserem Büro.

Für die Übernahme des Lektorats dieser Arbeit danke ich Cathrin Schnurr und Lisa Traier. Abschließend möchte ich mich bei Freunden, Familie und Partnerin für deren Unterstützung und Verzicht in der arbeitsreichen Zeit bedanken.

Karlsruhe, im Oktober 2020

*„Der höchste und schwierigste Berg ist immer  
der, den wir in uns tragen. Denn letztlich  
schaffen wir unsere Berge und das Verlangen sie  
zu bezwingen selbst.“*

*Walter Bonatti*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	<b>I</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	<b>XI</b>
<b>Abkürzungen und Symbole</b> .....	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Motivation und Ziele der Arbeit .....	1
1.2 Aufbau der Arbeit .....	3
1.3 Einführung der Maschinenmodellierung .....	5
1.4 Stand der Wissenschaft .....	8
1.4.1 Klassifizierungen von prädiktiven Regelverfahren in der Antriebstechnik .....	8
1.4.2 Klassifizierung und Bewertung der relevanten Ansätze mit Modulator ..	11
1.5 Fazit .....	22
<b>2 Modelle einer PSM für MPC</b> .....	<b>25</b>
2.1 Entwurf eines affinen zeitdiskreten Zustandsraummodells .....	25
2.1.1 Affine Approximation der Zustandsdynamik und der Ausgangsgleichung .....	25
2.1.2 Approximation der Ausgangsgleichung zweiter Ordnung .....	29
2.1.3 Diskretisierung des kontinuierlichen Zustandsraummodells .....	32
2.2 Entwurf des Prädiktionsmodells .....	33
2.3 Zusammenfassung .....	35
<b>3 Unbeschränkte lexikographische MPC-Optimierungsprobleme für eine PSM</b> .....	<b>37</b>
3.1 Einführung und mathematische Grundlagen zur multikriteriellen Optimierung und deren Anwendung unter regelungstechnischen Gesichtspunkten .....	37
3.1.1 Definition des multikriteriellen Optimierungsproblems .....	38
3.1.2 Definition des lexikographischen Optimierungsproblems und Abgrenzung zu anderen MOP-Klassen .....	40
3.1.3 Sequentielle Lösung des lexikographischen Optimierungsproblems ....	43
3.2 Unbeschränkte lexikographische Optimierung durch Transformation .....	44

3.2.1	Teil I: Optimierung einer Summe von Gütefunktionen . . . . .	46
3.2.2	Teil II: Übertragung des lexikographischen Ordnungskegels in eine lexikographische Abstiegsrichtung im Lösungsraum . . . . .	48
3.2.3	Teil III: Optimalitätskriterien für die Optimierung konvexer Funktionen unter Gleichheitsnebenbedingungen . . . . .	51
3.2.4	Motivation, Formulierung und Beweis des zentralen Satzes . . . . .	52
3.3	Übertragung auf unbeschränkte lexikographische MPC-Optimierungsprobleme . . . . .	57
3.3.1	Nomenklatur und Einführung für MPC . . . . .	57
3.3.2	Lösung des MPC-Optimierungsproblems durch vektorielle Zusammenfassung und <i>Condensing</i> . . . . .	58
3.3.3	Betrachtung einschrittiger und mehrschrittiger MPC-Ansätze . . . . .	60
3.4	Lexikographisches MPC-Optimierungsproblem für eine PSM . . . . .	68
3.4.1	Bewertung der Verluste . . . . .	69
3.4.2	Bewertung der Erreichung des Solldrehmoments durch die affin approximierte Ausgangsgleichung . . . . .	70
3.4.3	Bewertung der Erreichung des Solldrehmoments durch die quadratisch approximierte Ausgangsgleichung . . . . .	71
3.4.4	Verwendung der affin approximierten Drehmomentgleichung für das primäre Regelziel . . . . .	83
3.4.5	Verwendung der quadratisch approximierten Drehmomentgleichung für das primäre Regelziel . . . . .	89
3.5	Zusammenfassung . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Beschränkte Optimierung im lexikographischen MPC zur Regelung der PSM</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1	Einführung der <i>Projected Fast Gradient Method</i> zur Lösung des Optimierungsproblems im MPC . . . . .	93
4.2	Projektionsoperator in die Eingangsbeschränkung . . . . .	97
4.3	Integration von Zustandsbeschränkungen . . . . .	99
4.3.1	Transformation der Zustandsbeschränkung in den Eingangsraum . . . . .	99
4.3.2	Projektionsoperator für die projizierte Zustandsbeschränkung . . . . .	101
4.3.3	Projektionsoperator in die Schnittmenge aus Eingangs- und Zustandsbeschränkung . . . . .	102
4.4	Auswirkungen der Beschränkung auf die lexikographische Gütefunktion . . . . .	105
4.5	Konditionierung der Gütefunktion und Einstellung des dynamischen Verhaltens . . . . .	106
4.6	Zusammenfassung . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Anwendung der vorgestellten Methode auf eine PSM mit vergrabenen Magneten</b> . . . . .	<b>109</b>
5.1	Versuchsbeschreibung . . . . .	109
5.1.1	Betrachtetes Antriebssystem . . . . .	110
5.1.2	Beschreibung der Simulationsumgebung . . . . .	111

5.1.3	Vorstellung des Vergleichsreglers .....	112
5.2	Validierung des Prädiktionsmodells .....	113
5.3	Übersicht des MPC und Implementierungsaspekte .....	117
5.4	Szenarien und Kennzahlen zur Bewertung des Regelergebnisses .....	118
5.5	Parametrierung des MPC und deren Analyse .....	121
5.5.1	Parametrierung der Abbruchkriterien der PFGM .....	122
5.5.2	Wahl des Gewichtungsfaktors in der Gütefunktion .....	123
5.5.3	Wahl der Länge des Prädiktionshorizonts .....	125
5.5.4	Wahl der maximalen Iterationszahl der PFGM .....	126
5.5.5	Zusammenfassung der Parametrierung .....	126
5.5.6	Analyse der Abbruchkriterien der Parametrierung der PFGM .....	127
5.5.7	Analyse der Berechnungszeiten der Parametrierung .....	130
5.6	Bewertung der Regelergebnisse des MPC im ungestörten Fall und Vergleich zum PI-Zustandsregler .....	134
5.6.1	Betrieb an der Stromgrenze .....	136
5.7	Bewertung der Regelergebnisse bei Parameterfehlern .....	139
5.8	Bewertung der Regelergebnisse bei Messfehlern .....	144
5.8.1	Fehlerhafte Rotorwinkelmessung .....	144
5.8.2	Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung ..	146
5.8.3	Additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung ..	148
5.9	Bewertung der Regelergebnisse bei oszillierenden Sollwerten .....	150
5.10	Zusammenfassung .....	158
<b>6</b>	<b>Resümee .....</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>XXI</b>
A.1	Ergänzende Erläuterungen zu den Optimierungsverfahren im Stand der Wissenschaft .....	XXI
A.2	Verwendete Definitionen .....	XXIII
A.2.1	Definition des mehrdimensionalen Taylorpolynoms .....	XXIII
A.2.2	Definition einer konvexen Funktion .....	XXIII
A.2.3	Definition einer streng konvexen Funktion .....	XXIII
A.2.4	Definition der Komplement-Menge .....	XXIV
A.2.5	Definition des Inneren einer Menge .....	XXIV
A.2.6	Definition der konvexen Hülle einer Menge .....	XXIV
A.2.7	Definition des Randes einer Menge .....	XXIV
A.2.8	Definition der abgeschlossenen Hülle einer Menge .....	XXV
A.3	Kleinste konvexe Erweiterung einer konvexen Funktion .....	XXV
A.4	Transformation auf Hyperbelnormalform .....	XXVI
A.5	Voraussetzung für die stabile Einregelung von Arbeitspunkten bei PSM ...	XXVII
A.6	Ergänzende Informationen zur Simulationsumgebung .....	XXVIII
A.6.1	Flusskennfelder der simulierten PSM .....	XXVIII

A.6.2	Leistungsmerkmale des Simulationsrechners . . . . .	XXIX
A.6.3	Bezugswerte für die Normierung des Systems . . . . .	XXIX
A.7	Ergänzende Simulationsergebnisse . . . . .	XXX
A.7.1	Regularität der Dynamikmatrix des zeitdiskreten Maschinenmodells	XXX
A.7.2	Bestimmung der Diskretisierungsordnung . . . . .	XXXI
A.7.3	Detaillierte Auflistung der Sollströme des Prüf Szenarios . . . . .	XXXIII
A.7.4	Regelergbnis bei der Variation des Gewichtungsfaktors der Verluste in der Gütefunktion . . . . .	XXXIV
A.7.5	Regelergbnis bei der Variation des Prädiktionshorizonts und der maximalen Iterationszahl . . . . .	XXXV
A.7.6	Analyse der Abbruchkriterien der PFGM . . . . .	XXXVIII
A.7.7	Analyse der Berechnungszeiten der Parametrierung . . . . .	XXXIX
A.7.8	Regelergbnisse bei Messfehlern . . . . .	XL
A.7.9	Regelergbnisse bei oszillierenden Sollwerten . . . . .	XLIV
<b>Literaturverzeichnis</b>	. . . . .	<b>XLVII</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zentrale Bestandteile des MPC und die zugehörigen Kapitel .....	4
1.2	Spannungs- und Strombegrenzung eines elektrischen Antriebs .....	8
1.3	Anzahl der Veröffentlichungen pro Jahr .....	9
1.4	Klassifizierung von Methoden der Klasse <i>Predictive Control</i> in der Antriebstechnik .....	10
1.5	Regelkaskade eines Antriebssystems .....	12
1.6	Klassifizierung der relevanten MPC-Ansätze für MPC mit Modulator .....	13
2.1	Ausgangsgleichung über dem Zustandsraum .....	29
3.1	Veranschaulichung der Kegel $\mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta})$ und $\mathcal{D}_{i,\max}(\boldsymbol{\theta})$ .....	50
3.2	Geometrische Motivation des zentralen Satzes 3.4 .....	52
3.3	Graphische Veranschaulichung der Transformation der Gütefunktion .....	68
3.4	Gütefunktion über dem Zustandsraum .....	72
3.5	Einteilung der Teilmengen zur Konvexifizierung .....	75
3.6	Programmablaufplan für die Identifizierung der aktiven Menge .....	82
3.7	Vergleich von $J_{1q}$ und $\hat{J}_{1q}$ über dem Eingangsraum .....	83
4.1	Schematische Darstellung der PFGM .....	96
4.2	Transformation der Zustandsbeschränkung .....	100
4.3	Projektion für Eingangs- und Zustandsbeschränkung .....	103
4.4	Algorithmus zur Projektion in die Schnittmenge zweier konvexer Mengen .....	104
5.1	Aufbau des Regelkreises in der Simulation .....	111
5.2	Sprungantwort des PI-Zustandsreglers für verschiedene Werte der integralen Verstärkung des <i>Back Calculation and Tracking</i> .....	113
5.3	Validierung des Maschinenmodells während einer Drehzahlrampe .....	114
5.4	Validierung des Maschinenmodells mit $n_d = 2$ im Stillstand .....	115
5.5	Validierung des Maschinenmodells mit $n_d = 2$ bei $12\,000\text{ min}^{-1}$ .....	116
5.6	Übersicht der Architektur des MPC .....	117
5.7	Darstellung der Szenarien im $M$ - $\Omega$ -Diagramm .....	119
5.8	Darstellung der Szenarien über der Zeit .....	120
5.9	Stationäre Abweichung für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren .....	124
5.10	Verlauf des q-Stroms für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren .....	125
5.11	Verlauf des q-Stroms für verschiedene maximale Iterationszahlen .....	126

5.12	Erreichtes Abbruchkriterium der PFGM . . . . .	128
5.13	Anzahl an Iterationen in der PFGM bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums . . .	129
5.14	Im betrachteten Zeitraum akkumulierte Iterationen der PFGM . . . . .	129
5.15	Berechnungszeit der Optimierung . . . . .	131
5.16	Gesamte Berechnungszeit ( $T_{bg} = T_{bo} + 2(T_{bl} + T_{bd}) + T_{bp}$ ) . . . . .	132
5.17	Berechnungszeit der sequentiellen Optimierung des LOPs mit einem <i>Interior Point</i> Algorithmus . . . . .	134
5.18	Aufsummierte Anzahl an Iterationen des <i>Interior Point</i> Algorithmus . . . . .	134
5.19	Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschwingers . . . . .	135
5.20	Verhalten an der Stromgrenze bei konstantem Solldrehmoment . . . . .	136
5.21	Verhalten an der Stromgrenze bei Solldrehmomentsprüngen . . . . .	137
5.22	Verhalten an der Stromgrenze bei Solldrehmomentsprüngen . . . . .	138
5.23	Verhalten an der Stromgrenze bei Solldrehmomentsprüngen und nachgeführtem Solldrehmoment . . . . .	139
5.24	Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschwingers für Fehler im Statorwiderstand . . . . .	141
5.25	Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschwingers für Fehler im q-Flusskennfeld . . . . .	142
5.26	Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschwingers für Fehler im d-Flusskennfeld . . . . .	143
5.27	Zeitlicher Verlauf des Drehmoments für fehlerhafte Rotorwinkel bei $4800 \text{ min}^{-1}$ .	146
5.28	90 %-Anregelzeit für Fehler in der Strangstrommessung . . . . .	148
5.29	Drehmomentverlauf für Rauschen in der Strangstrommessung . . . . .	149
5.30	Auswertung für den MPC bei $\widehat{M}_{\text{soll}} = 5\% \overline{M}_{\text{soll}}$ . . . . .	152
5.31	Auswertung für den MPC bei $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \overline{M}_{\text{soll}}$ . . . . .	154
5.32	Auswertung für den MPC bei $\widehat{M}_{\text{soll}} = 15\% \overline{M}_{\text{soll}}$ . . . . .	154
5.33	Beispielhafte Drehmomentverläufe . . . . .	155
5.34	Beispielhafte Trajektorien im Zustands- und Eingangsraum . . . . .	156
5.35	Vergleich des MPC und des PIZR bei $\widehat{M}_{\text{soll}} = 5\% \overline{M}_{\text{soll}}$ . . . . .	157
5.36	Vergleich des MPC und des PIZR bei $\widehat{M}_{\text{soll}} = 15\% \overline{M}_{\text{soll}}$ . . . . .	158
A.1	Flusskennfeld für $\Psi_d$ . . . . .	XXVIII
A.2	Flusskennfeld für $\Psi_q$ . . . . .	XXIX
A.3	Kondition der Dynamikmatrix $\kappa(\mathbf{A}_d)$ über dem Zustandsraum . . . . .	XXX
A.4	Validierung des Maschinenmodells mit $n_d = 3$ bei $12\,000 \text{ min}^{-1}$ und im Stillstand . . . . .	XXXII
A.5	90 %-Anregelzeit für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren . . . . .	XXXIV
A.6	Überschwinger für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren . . . . .	XXXIV
A.7	90 %-Anregelzeit für verschiedene Prädiktionshorizonte . . . . .	XXXV
A.8	Stationäre Abweichung für verschiedene Prädiktionshorizonte . . . . .	XXXV



A.9	Überschwinger für verschiedene Prädiktionshorizonte	XXXVI
A.10	90 %-Anregelzeit für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl	XXXVI
A.11	Stationäre Abweichung für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl	XXXVII
A.12	Überschwinger für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl	XXXVII
A.13	Erreichtes Abbruchkriterium der PFGM während des in Abschnitt 5.4 vorgestellten Szenarios	XXXVIII
A.14	Anzahl an Iterationen in der PFGM bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums	XXXVIII
A.15	Berechnungszeit der Optimierung $T_{bo}$ , des Prädiktionsmodells $T_{bp}$ , der Linearisierung $T_{bl}$ und der Diskretisierung $T_{bd}$	XXXIX
A.16	90 %-Anregelzeit für fehlerhafte Rotorwinkel	XL
A.17	Stationäre Abweichung für fehlerhafte Rotorwinkel	XL
A.18	Überschwinger für fehlerhafte Rotorwinkel	XLI
A.19	Zeitlicher Verlauf des Drehmoments für fehlerhafte Rotorwinkel bei $2400 \text{ min}^{-1}$	XLI
A.20	Stationäre Abweichung für Fehler in der Strangstrommessung	XLII
A.21	Überschwinger für Fehler in der Strangstrommessung	XLII
A.22	90 %-Anregelzeit für Rauschen in der Strangstrommessung	XLIII
A.23	Stationäre Abweichung für Rauschen in der Strangstrommessung	XLIII
A.24	Überschwinger für Rauschen in der Strangstrommessung	XLIV
A.25	Auswertung für den PIZR bei $\widehat{M}_{soll} = 5\% \overline{M}_{soll}$	XLIV
A.26	Auswertung für den PIZR bei $\widehat{M}_{soll} = 10\% \overline{M}_{soll}$	XLV
A.27	Auswertung für den PIZR bei $\widehat{M}_{soll} = 15\% \overline{M}_{soll}$	XLV
A.28	Vergleich des MPC und des PIZR bei $\widehat{M}_{soll} = 10\% \overline{M}_{soll}$	XLVI



# Tabellenverzeichnis

1.1	Klassifikation von MPC-Ansätzen für die Regelung von PSM mit Modulator . . . . .	17
2.1	Maximale Anzahl der Rechenoperationen . . . . .	28
2.2	Anzahl der Rechenoperationen zur Berechnung des jeweiligen Elements der Ausgangsgleichung (2.17) . . . . .	32
5.1	Daten des FEM Modells der PSM der Simulation . . . . .	110
5.2	Daten des simulierten Wechselrichters . . . . .	110
5.3	Charakterisierung der Sprünge zur Auswertung der Regelergebnisse und Parametrierung des MPC . . . . .	120
5.4	Berechnungszeiten des MPC . . . . .	132
A.1	Leistungsmerkmale des Simulationsrechners . . . . .	XXIX
A.2	Primäre Bezugswerte . . . . .	XXIX
A.3	Abgeleitete Bezugswerte . . . . .	XXX
A.4	Detaillierte Auflistung der Zustände des Prüfzenarios . . . . .	XXXIII



# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

AL	<i>Augmented Lagrangian</i>
analyt.	Analytisch
CCS	<i>Continuous Control Set</i>
DDM	<i>Double Description Method</i>
DMPC	<i>Direct Model Predictive Controller</i> : MPC ohne Modulator
DSC	<i>Direct Self Control</i>
DTC	<i>Direct Torque Control</i>
EMPC	<i>Explicit Model Predictive Controller</i>
ETI	Elektrotechnisches Institut des KIT
FCS	<i>Finite Control Set</i>
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FGM	<i>Fast Gradient Method</i>
FPGA	<i>Field Programmable Gate Array</i>
FPI	<i>Fixed-Point Iteration</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
grad.	Gradientenbasiert
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i>
KIT	Karlsruher Institut für Technologie
KKE	Kleinste konvexe Erweiterung
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
kon.	Konstant
LOP	Lexikographisches Optimierungsproblem
LQ	Linear-quadratisch
MMPA	Maximales Drehmoment pro Ampere
MOP	Multikriterielles Optimierungsproblem
MPC	<i>Model Predictive Controller</i>
MPT	<i>Multi-Parametric Toolbox</i>
n. a.	Nicht angegeben
NB	Nebenbedingung eines Optimierungsproblems
PD	<i>Primal-Dual</i>

PFGM	<i>Projected Fast Gradient Method</i>
PI	Proportional-Integral-Glied
PIZR	PI-Zustandsregler
Proj.	Projektion
PSM	Permanentmagneterregte Synchronmaschine
PT2	Verzögerungsglied 2. Ordnung
PWM	Pulsweitenmodulation
rot.	Rotierend
SHARE	Schaeffler Hub for Advanced Research
w.	Weich
WR	Wechselrichter

## Lateinische Buchstaben

<b>A</b>	Dynamikmatrix der Zustandsraumdarstellung/des Prädiktionsmodells
<i>a</i>	Koeffizient der Hyperbelgleichung in Normalform
<b>B</b>	Eingangsmatrix der Zustandsraumdarstellung/des Prädiktionsmodells
<i>b</i>	Koeffizient der Hyperbelgleichung in Normalform
<b>C</b>	Matrix der Ausgangsgleichung der Zustandsraumdarstellung/des Prädiktionsmodells
<i>c</i>	Koeffizient der Hyperbelgleichung in Normalform
<i>c</i>	Zeile einer Matrix der Ausgangsgleichung der Zustandsraumdarstellung
<i>d</i>	Differentialoperator
<b>d</b>	Argument der quadrierten 2-Norm der Gütefunktion (Vektor)
<b>E</b>	Kleinste konvexe Erweiterung (KKE) (Operator)
<i>e</i>	Gleichungsfehler
<i>F</i>	Affiner Anteil der Ausgangsgleichung der Zustandsraumdarstellung
<b>F</b>	Affiner Anteil der Ausgangsgleichung des Prädiktionsmodells
<b>G</b>	Affiner Anteil der Zustandsraumdarstellung/des Prädiktionsmodells
<b>G<sub>u</sub></b>	Matrix zur Beschreibung der affinen Eingangsbegrenzung
<b>g<sub>u</sub></b>	Vektor zur Beschreibung der affinen Eingangsbegrenzung
<b>H</b>	Gewichtungsmatrix einer Gütefunktion
<i>h</i>	Konstanter Anteil einer Gütefunktion
<b>h</b>	Gewichtungsvektor einer Gütefunktion
<i>I</i>	Strom in A
<b>I</b>	Stromraumzeiger in A
<b>I</b>	Einheitsmatrix
<i>i</i>	Normierter Strom in pu
<i>J</i>	Gütefunktion (Skalar)
<b>J<sub>T</sub></b>	Massenträgheitsmoment in kg m <sup>2</sup>

<b>J</b>	Gütefunktionsvektor eines MOP
$j$	Komplexe Einheit
$k$	Zeitschritt bei zeitdiskreten Systemen / Iterationsindex im Optimierungsalgorithmus
$k_A$	Steigung der Asymptote
$k_{\Delta u}$	Verstärkungsfaktor für <i>Back Calculation and Tracking</i> in $s^{-1}$
$k_{\Gamma}$	Funktionswert der Wurzel der Gütefunktion an der Konvexitätsgrenze
$k_v$	Gewichtungsfaktor der Verluste
$k_{vk}$	Gewichtungsfaktor zur Vorkonditionierung
$L$	Lipschitzkonstante
$l$	Normierte Induktivität in pu
$M$	Drehmoment in Nm
$M_L$	Lastmoment in Nm
$\overline{M}$	Mittleres Drehmoment in Nm
$\widehat{M}$	Amplitude des Drehmoments in Nm
$m$	Normiertes Drehmoment in pu
$m_i$	Dimension der Funktion $\mathbf{d}_i(\mathbf{x})$
<b>N</b>	Normierungsmatrix
$n_D$	Differenz zwischen der Dimension des Lösungsraums und der Zeilenanzahl von <b>W</b>
$n_d$	Diskretisierungsordnung
$n_h$	Länge des Prädiktionshorizonts: $n_h \in \mathbb{N}$
$n_i$	Anzahl der Iterationen der PFGM im Taktschritt $i$
$n_J$	Anzahl der skalaren Gütefunktionen in einem MOP
$n_L$	Dimension des Lösungsraums eines MOP
$n_{\max i}$	Maximale Anzahl an Iterationen der PFGM
$n_u$	Anzahl der Eingänge
$n_x$	Anzahl der Zustände
$n_y$	Anzahl der Ausgänge
$o_i$	Dimension der Bildmenge der Funktion $\mathbf{d}_i$ geteilt durch die Länge des Prädiktionshorizonts
$P$	Dimension der geordneten Menge in einem MOP
$p$	Polpaarzahl
$p_V$	Normierte ohmsche Verluste in pu
$Q_{\text{SNR}}$	Signalrauschabstand in dB
$q$	Summe der Dimensionen aller Funktionen $\mathbf{d}_i(\mathbf{x})$
$R$	Widerstand in $\Omega$
<b>R</b>	Orthogonale Rotationsmatrix
$\mathbf{R}_{\gamma_{el}}$	Drehmatrix um den Winkel $\gamma_{el}$
$r$	Normierter Widerstand in pu / Rang der Koeffizientenmatrix
<b>r</b>	Normalenvektor einer Hyperebene

$T$	Periodendauer in s / Berechnungszeit in s
$\widehat{T}$	Mittlere Berechnungszeit in s
$\overline{T}$	Maximale Berechnungszeit in s
$T_{\Delta u}$	Zeitkonstante für <i>Back Calculation and Tracking</i> in s
$t$	Zeit in s
$t_i$	Koeffizienten einer Ellipsengleichung ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ )
$t_{Tr}$	Translationsvektor einer Transformation
$U$	Spannung in V
$\mathbf{U}$	Spannungsraumzeiger in V
$u$	Normierte Spannung in pu
$\mathbf{u}$	Eingangsvektor
$v$	Konstanter Anteil der Funktion $d(\mathbf{x})$ (Skalar)
$\mathbf{v}$	Konstanter Anteil der Funktion $d(\mathbf{x})$ (Vektor)
$\mathbf{W}$	Gewichtungsmatrix in der Funktion $d(\mathbf{x})$
$\mathbf{w}$	Zeile der Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}$
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$y$	Ausgang
$\mathbf{y}$	Ausgangsvektor
$z$	Zusammenfassung von Zustands- und Eingangsvektor

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Schrittweite des Gradientenschritts der PFGM
$\beta$	Schrittweite des Prädiktionsschritts der PFGM
$\Gamma$	Wurzel der Gütefunktion
$\gamma$	Verdrehungswinkel einer Hyperbel zu ihrer Normalform in rad
$\gamma_{el}$	Rotorwinkel in rad
$\Delta$	Differenz der gefolgten Größe
$\Delta h$	Höhe des Überschwingers in Nm
$\Delta \overline{M}$	Differenz Drehmomentmittelwert zum Sollwert in Nm
$\delta \widehat{M}$	Differenz Drehmomentamplitudenerreichung von MPC und PIZR in Nm
$\zeta$	Hilfsvariable (Skalar)
$\boldsymbol{\zeta}$	Hilfsvariable (Vektor)
$\boldsymbol{\theta}$	Optimierungsvariable
$\vartheta$	Modellabbildung eines MOP
$\kappa$	Konditionszahl einer Matrix (Operator)
$\Lambda$	Menge der Eigenwerte einer Matrix (Operator)
$\lambda$	Eigenwert einer Matrix / Faktor
$\mu$	Konvexitätsparameter
$\nu$	Ordnungszahl



$\xi$	Entwicklungspunkt der Linearisierung
$\Pi$	Projektionsoperator
$\rho$	Bezugspunkt bei Erstellung der KKE
$\sigma$	Standardabweichung
$\Psi$	Magnetische Flussverkettung in Wb
$\Psi$	Raumzeiger der magnetischen Flussverkettung in Wb
$\psi$	Normierte magnetische Flussverkettung in pu
$\Omega$	Mechanische Winkelgeschwindigkeit in $\text{rad s}^{-1}$
$\Omega_{\text{el}}$	Elektrische Winkelgeschwindigkeit in $\text{rad s}^{-1}$
$\omega_{\text{el}}$	Normierte elektrische Winkelgeschwindigkeit in pu

## Kalligraphische und sonstige Symbole

$A$	Menge / Definitionsmenge einer Funktion
$C^n(\mathbb{M})$	Menge der über der Menge $\mathbb{M}$ $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathcal{D}$	Richtung im Lösungsraum
$\mathcal{H}$	Hessematrix einer Funktion (Operator)
$\Im$	Imaginärteil
$\mathcal{I}_k$	Endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen von 1 bis $k$
$\mathcal{J}$	Jacobimatrix einer Funktion (Operator)
$\mathcal{K}$	Ordnungskegel
$\mathcal{L}$	Zulässiger Lösungsraum in einem Optimierungsproblem
$\mathcal{M}$	Untermenge des Optimierungsraums
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathcal{N}$	Normalverteilung (Operator)
$\mathcal{P}$	<i>Control Invariant Set</i>
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathcal{S}$	Zulässige Menge eines Optimierungsproblems / Untermenge des Optimierungsraums
$\mathcal{T}$	Taylorpolynom einer Funktion an einem Entwicklungspunkt (Operator)
$\mathcal{U}$	Menge der erlaubten Eingänge (Stellgrößenbegrenzung)
$\mathcal{U}_m$	Menge der erlaubten Eingänge zum Zeitschritt $m$
$\mathcal{W}$	Menge der erlaubten Eingänge ohne jene, die im nächsten Abtastschritt zum Verlassen der Zustandsbegrenzung führen
$\mathcal{X}$	Menge der erlaubten Zustände (Zustandsbegrenzung) / allg. Menge
$\mathcal{X}_u$	Eingänge, die im nächsten Abtastschritt zur Einhaltung der Zustandsbegrenzung führen

$\nabla$	Nabla-Operator (gleichbedeutend mit $\text{grad}(\cdot)$ )
$\partial$	Partieller Differentialoperator / Rand einer Menge (Operator)

## Indizes und Hochstellungen

$\alpha$	$\alpha$ -Komponente eines Raumzeigers im $\alpha\beta$ -Koordinatensystem
a	Affin / Anregelzeit
A	Abtastung
$\alpha\beta$	Raumzeiger im $\alpha\beta$ -Koordinatensystem
AP	Arbeitspunkt
$\beta$	$\beta$ -Komponente eines Raumzeigers im $\alpha\beta$ -Koordinatensystem
b	Beginn
bd	Berechnung Diskretisierung
bl	Berechnung Linearisierung
bo	Berechnung Optimierung
Box	<i>Box Constraint</i>
bp	Berechnung Prädiktionsmodell
C	Konvex
$\mathcal{C}$	Komplementmenge
d	d-Komponente eines Raumzeigers im dq-Koordinatensystem / zeitdiskret
dd	Selbstinduktivität in d-Achse im dq-Koordinatensystem
dq	Raumzeiger im dq-Koordinatensystem / Kreuzinduktivität
e	Ende
eff	Effektivwert
g	Gesamt
H	Hilfsfunktion
$i$	Index ( $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ )
$i, j$	Element der gleichnamigen Matrix in Zeile $i$ und Spalte $j$
ist	Istwert
k	Konstant
l	Linear
LUT	<i>Look-Up-Tabelle</i>
M	Mittelpunkt
max	Bezugswert einer Normierung / Maximalwert einer Größe
min	Minimaler Wert einer Größe
MPC	<i>Model Predictive Controller</i>
$\mathcal{M}_x$	Menge $\mathcal{M}_x$
N	Nennwert
$\psi$	Magnetische Flussverkettung
PIZR	PI-Zustandsregler

---

PM	Permanentmagnet
q	q-Komponente eines Raumzeigers im dq-Koordinatensystem / quadratisch
qd	Kreuzinduktivität
qq	Selbstinduktivität in q-Achse im dq-Koordinatensystem
S	Stator
s	Vektor aus gestapelten Variablen über dem Prädiktionshorizont
soll	Sollwert
T	Temperatur / Transformation
T	Transponieren einer Matrix
Tmax	Temperaturbedingtes Maximum
u	Eingang / Eingangsraum
U	Phase U / Untersuchung
UVW	Größe im dreiphasigen Koordinatensystem
V	Phase V / Verluste
W	Phase W
x	Zustand / Zustandsraum
y	Ausgang
ZW	Gleichspannungszwischenkreis
2T	Transformation der Gütefunktion $J_2$
*	Optimum oder optimale Lösungsmenge eines Optimierungsproblems
*lex	Optimum oder optimale Lösungsmenge eines LOP
*typ	Optimum oder optimale Lösungsmenge eines MOP der Klasse typ



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

Die Regelung von elektrischen Antrieben ist ein altes und sich dennoch stetig weiterentwickelndes Gebiet der Regelungstechnik. Der Wandel wird im Wesentlichen durch zwei Aspekte vorangetrieben. Zum einen ermöglichen Fortschritte in der Signalverarbeitung und Algorithmen komplexere Regler, zum anderen ergeben neue Anwendungsfelder andere Anforderungen an ein Antriebssystem. Dies führt einerseits direkt zu dem Bedarf nach neuen Regelverfahren, andererseits werden dadurch die elektrischen Maschinen weiterentwickelt. Die neu entwickelten Maschinen erfordern ebenfalls neue Regelverfahren oder zumindest die Erweiterung der bestehenden Verfahren. Ausgelöst durch die Elektromobilität ist in der aktuellen Situation ein verstärktes Forschungsinteresse in diesem Gebiet vorhanden. Dabei wird das Ziel verfolgt, die gravimetrische sowie die volumetrische Leistungsdichte der elektrischen Maschinen zu erhöhen. Hierfür wird die Maschine nicht nur in Bereichen betrieben, in denen der magnetische Kreis lineares Verhalten aufweist. Zusätzlich zu dieser Herausforderung hat die Regelung des Antriebs zwei Ziele: die Drehmomenterzeugung zur Traktion und die Steigerung des Wirkungsgrades durch entsprechende Wahl des Betriebspunktes. Außerdem kommen neben diesen beiden Hauptzielen zusätzliche Aufgaben für den Antrieb hinzu. Dazu zählen der Beitrag zu Fahrsicherheitsaufgaben, insbesondere bei Einzelradantrieben, und die Minimierung von Vibrationen im Antriebsstrang. Dafür ist ein hoch dynamischer Betrieb der elektrischen Maschine notwendig. Dieser hoch dynamische Betrieb wird in allen Betriebsbereichen angestrebt und daher aufgrund der hohen Ausnutzung der Maschinen ebenso in Bereichen nahe der Betriebsgrenzen. Eine Garantie für die Einhaltung der Betriebsgrenzen wird aus diesem Grund wichtiger, bei gleichzeitiger Vermeidung von großen Sicherheitsreserven. Dies führt zusammen mit leistungsfähigerer Signalverarbeitung aktuell zu Forschungsbedarf auf diesem Gebiet im Allgemeinen. Die Auswahl eines passenden Antriebs für ein Elektro- oder Hybridfahrzeug ist eine komplexe und vielschichtige Frage. Permanentmagneterregte Synchronmaschinen (PSM) sind eine oft getroffene Wahl für diese Anwendung ([Hof11, S. 122]), denn sie zeigen im Vergleich die höchste Leistungsdichte ([YPK14]). Daher wird die PSM ausgewählt, um in dieser Arbeit ein neues Regelungskonzept für einen elektrischen Antrieb vorzustellen. Dieser ist in seinem Design und seiner Leistungsklasse von 90 kW passend für die Verwendung in einem Elektrofahrzeug der Mittelklasse ([Hof11, S. 145], [YPK14]) und eignet sich daher, um die Grenzen der klassischen Methoden aufzuzeigen.

Der vorgestellte Regler basiert auf *Model Predictive Control*<sup>1</sup>, alle Regler dieser Klasse werden im Folgenden als MPC bezeichnet. In der Fachsprache ist der englische Begriff verbreitet und eindeutiger als die deutschen Bezeichnungen<sup>2</sup>, darum wird hier die Abkürzung MPC verwendet. MPC haben im Allgemeinen einen höheren Berechnungsaufwand als klassische Regler aus linearen Übertragungsgliedern. Das verhinderte in der Vergangenheit deren Einsatz für Systeme mit kleinen Zeitkonstanten. Die erwähnten Weiterentwicklungen von Algorithmen und Signalverarbeitung verschieben diese Grenze jedoch zunehmend in Anwendungsbereiche, die vormals undenkbar waren.

Ein großer Motivator für die Verwendung eines MPC ist die Möglichkeit zur inhärenten und systematischen Berücksichtigung von Betriebsgrenzen. Ein zweiter Motivator ist die Tatsache, dass ein MPC direkt auf einem Streckenmodell basiert, er zählt zu den modellbasierten Regelungsmethoden. Dieser Aspekt ergibt zwei wesentliche Vorteile in der Antriebsregelung. Zum einen kann ein MPC leicht während des Betriebs an veränderte Parameter der Maschine angepasst werden. Beispielsweise kann aufgrund von Alterung in einer PSM eine unerwünschte Entmagnetisierung der Permanentmagnete auftreten ([FMR<sup>+</sup>20]). Wird der verringerte magnetische Fluss der Permanentmagnete als Parameter identifiziert, kann er unmittelbar im Streckenmodell des MPC angepasst werden. Zum anderen kann ein MPC leicht auf ein neues Design einer Maschine angepasst werden. Die Parametervielfalt ist in der Elektromobilität durch die verschiedenen Fahrzeugklassen und Antriebskonzepte groß. Bei konventionellen Regelansätzen ist die Parametrierung für veränderte Stecken oft arbeitsintensiv und dadurch zeitaufwendig. Dies gilt insbesondere für den Einsatz des Antriebs nahe an seinen Betriebsgrenzen.

Im beschriebenen Anwendungsfeld wird die Maschine als elektrisch-mechanischer Energiewandler betrieben, wobei die mechanische Anwendung als Regelziel ein Solldrehmoment vorgibt. Bei PSM gibt es mehrere elektrische Betriebspunkte, die dieses Solldrehmoment erzeugen, darum wird die Verlustminimierung als ein zweites Regelziel verfolgt. Diese beiden Regelziele stehen für sich betrachtet im Widerspruch: Eine reine Minimierung der Verluste führt zu einem Betriebspunkt mit möglichst geringem Stromfluss und minimiert somit ebenfalls das innere Drehmoment der Maschine. Konventionell wird dieser Widerspruch durch eine Stromregelung mit einer vorgeschalteten und zuvor berechneten Zuordnung von Solldrehmoment zu Sollströmen gelöst (z.B. [Sch13, Kap. 16.7.6], [Gem15, Ric15, PB15]), dies gilt ebenso für MPC-Ansätze<sup>3</sup>. Die Zuordnung berechnet stationäre Ströme, die verlustminimal das geforderte Drehmoment erzeugen. Dadurch wird das ursprüngliche Ziel der Drehmomenterzeugung für dynamische Vorgänge verfälscht. Es wurde durch das Regelziel der Erreichung von einem stationären Zustand, in dem dieses Drehmoment verlustminimal erzeugt wird, ersetzt.

<sup>1</sup> *Model Predictive Control* ist eine Methode in der Regelungstechnik. Die Ursprünge des Verfahrens gehen zurück auf [RRTP78] und [CR80], etablierte Grundlagenliteratur ist [CB99] und [RM09] eine kurze Einführung ist in Unterabschnitt 3.3.1 zu finden.

<sup>2</sup> Es werden die Begriffe *Modellprädiktive Regelung* ([GEK10]), *Modellbasierte prädiktive Regelung* ([DP04]) und *Prädiktive Regelung* ([DP06]) verwendet, wobei letzteres zum Teil andere Verfahren als MPC bezeichnet.

<sup>3</sup> Literatur hierfür ist in Abschnitt 1.4 (insbesondere Tabelle 1.1) bezüglich der Wahl der Regelgröße diskutiert.

Ein wesentlicher Vorteil des MPC wird nicht voll ausgeschöpft: Eine direkte Optimierung der Stellgröße bezüglich des mechanischen Regelziels durch dessen direkte Bewertung in der Gütefunktion des MPC. Des Weiteren ist eine statische Zuordnung nachteilig, da diese Parameterschwankungen während des Betriebs nicht berücksichtigen kann.

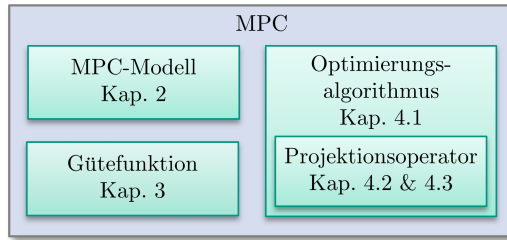
**Aus dieser Ausgangslage leitet sich die zentrale Forschungsfrage dieser Arbeit ab: Wie kann ein MPC entworfen werden, durch den die Ziele Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung simultan optimiert werden, und wie können die gesteigerten Anforderungen der Elektromobilität durch diesen Ansatz erfüllt werden?**

Daraus leiten sich die drei zentralen Aspekte dieser Arbeit ab. Erstens: der Entwurf eines MPC zur Regelung auf zwei konträre Ziele. Dies wird durch die Betrachtung von multikriteriellen Optimierungsproblemen, insbesondere durch die Unterform der lexikographischen Optimierungsprobleme, ermöglicht. Dabei wird eine strenge Priorisierung der Regelziele vorgenommen. Zur Lösung eines lexikographischen Optimierungsproblems ist im Allgemeinen die sequentielle Lösung mehrerer Optimierungsprobleme notwendig. Um diesen Aufwand zu reduzieren wird für die Integration des lexikographischen Ansatzes in den MPC eine neue Methode vorgeschlagen, die beide Regelziele in eine Gütefunktion transformiert. Zweitens: die Anpassung dieses MPC an die Anforderungen im beschriebenen Anwendungsfall der PSM. Die Ziele sind die Berücksichtigung des nichtlinearen magnetischen Kreises durch die Verwendung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Strömen und magnetischen Flüssen, sowie die Berücksichtigung der Spannungs- und Strombegrenzung. Drittens: die Analyse der Tauglichkeit und der Potentiale dieses Ansatzes unter praktischen Gesichtspunkten des Anwendungsfalls. Dieser Aspekt wird durch die Untersuchung des erzielbaren Ergebnisses in anwendungsnahen Szenarien untersucht.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Zur Einleitung des Themas folgen in diesem Kapitel drei weitere Abschnitte. Zunächst werden in Abschnitt 1.3 die Grundlagen der Maschinenmodellierung vorgestellt und die betrachtete Modellierungstiefe wird beschrieben. Dieser Abschnitt ist als vorbereitende Einführung für die darauf folgende Beschreibung des Stands der Wissenschaft in Abschnitt 1.4 wichtig. Ausgehend von den dortigen Erkenntnissen über Stärken und Schwächen bestehender Ansätze wird in Abschnitt 1.5 die oben formulierte Forschungsfrage konkretisiert. Die Kapitel 2 bis 4 bereiten die Bestandteile des MPC vor. Sie sind in der Übersicht in Abbildung 1.1 dargestellt. In Kapitel 2 wird das Prädiktionsmodell für die PSM erstellt, welches im MPC als internes Streckenmodell verwendet wird. Dabei werden für die Ausgangsgleichung ein affiner und ein quadratischer Ansatz vorgestellt.

In Kapitel 3 erfolgt der Übergang von einer semantischen Zieldefinition zu einer formalen Gütefunktion, welche die Zielerreichung quantifiziert. Der erste Abschnitt stellt zunächst die



**Abbildung 1.1:** Zentrale Bestandteile des MPC und die zugehörigen Kapitel

Grundlagen der lexikographischen Mehrzieloptimierung vor. Darauf aufbauend erfolgt die Vorstellung des zentralen Beitrags dieser Arbeit in den Abschnitten 3.2 und 3.3: die Formulierung eines unbeschränkten lexikographischen Optimierungsproblems durch Abbildung mehrerer priorisierter Regelziele in eine Gütefunktion für einen MPC. Diese Abschnitte sind unabhängig von der Anwendung auf die Antriebsregelung. Sie beschreiben ein neues Verfahren für die Komposition mehrerer Regelziele zu einer Gütefunktion in einem MPC und dessen Voraussetzungen. In Abschnitt 3.4 werden die beiden Regelziele der Drehmomentregelung einer PSM formalisiert und das vorgestellte Verfahren wird auf die Regelziele der PSM angewendet.

In Kapitel 4 wird die beschränkte Optimierung der vorgestellten Gütefunktion durchgeführt. Dies beinhaltet neben weiteren Aspekten die Erklärung des Optimierungsverfahrens sowie die benötigten Projektionsoperatoren für die Einhaltung der Begrenzungen. Hierbei ist Abschnitt 4.3 hervorzuheben, der einen weiteren Beitrag dieser Arbeit darstellt. Er zeigt eine Möglichkeit zur Integration von Zustandsbeschränkungen in das verwendete Optimierungsverfahren.

In Kapitel 5 wird das Verhalten des entworfenen MPC in der Anwendung auf die Drehmomentregelung einer PSM untersucht. Das Kapitel behandelt eingangs die Modellvalidierung und die Diskussion von Implementierungsaspekten. Darauf folgt die Einführung der Kriterien zur Ergebnisbewertung, mit denen im Anschluss die Parametrierung des MPC durchgeführt wird. Ebenso werden diese Kriterien zur Auswertung der Regelergebnisse bei Parameterfehlern (Abschnitt 5.7) und Messfehlern (Abschnitt 5.8) verwendet. In Abschnitt 5.9 wird abschließend das Potential des Reglers für die Kompensation von Getriebschwingungen in einem PKW-Antriebsstrang bewertet.



## 1.3 Einführung der Maschinenmodellierung

Die Modellierung in dieser Arbeit bezieht sich auf eine dreiphasige symmetrische PSM mit nicht angeschlossenem Sternpunkt und symmetrischer Speisung. Ausgangspunkt für die Modellierung ist die Beschreibung der PSM in einem rotierenden Koordinatensystem. Wird bei einer PSM dieses Koordinatensystem an der Flussrichtung des Permanentmagneten ausgerichtet, wird es als dq-Koordinatensystem bezeichnet. Für einen mechanischen stationären Betrieb der Maschine (konstante Drehzahl und konstantes Drehmoment) liegen dann stationäre elektrische Größen vor, obwohl die physikalisch vorhandenen Phasengrößen ein Drehstromsystem bilden. Daher wenden viele Regelungsmethoden der Antriebstechnik eine Koordinatentransformation aus einem statorfesten  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem in dieses rotorfeste dq-Koordinatensystem an. Auf die Grundlagen dieser Methoden wird hier nicht eingegangen, sie können in der Grundlagenliteratur (z. B. [Sch13, Kap. 5.4]) nachgelesen werden.

Die Modellierung basiert auf dem Grundwellenmodell der Maschine, das bedeutet, dass durch eine sinusförmige Spannung an der Maschine rein sinusförmige Ströme und magnetische Flüsse entstehen. Dieses Modell beinhaltet den Leitungswiderstand in den Wicklungen und berücksichtigt somit die ohmschen Verluste der Maschine. Sie sind mit Abstand der dominanteste Anteil der Verluste im betrachteten Maschinentyp (ausführlichere Betrachtung in Unterabschnitt 3.4.1). Das Grundwellenmodell beinhaltet die Berücksichtigung von Reluktanzeinflüssen. Sie entstehen bei Maschinen mit einem unsymmetrischen Eisenquerschnitt des Rotors, wodurch die Induktivitäten in d- und q-Richtung unterschiedliche Werte annehmen. Dies ist für die Regelung von besonderem Interesse, da durch Ausnutzung dieses Einflusses der Wirkungsgrad gesteigert werden kann ([Sch09, Kap. 16.7]). Berücksichtigt wird zudem das nichtlineare Verhalten des Eisenkreises der Maschine. Es beinhaltet insbesondere die Sättigung des Eisenkreises und die Kreuzverkopplung. Durch die Sättigung des Eisenkreises wird bei zunehmendem Strom die Proportionalitätskonstante zwischen magnetischem Fluss und Strom kleiner. In einem Ersatzschaltbild entspricht das einer kleineren Induktivität der Maschine. Die Kreuzverkopplung verstärkt sich ebenfalls durch die Verringerung des Eisenquerschnitts. Da sich die Flüsse in der d- und q-Achse die gleichen Wege im Eisenkreis der Maschine teilen, beeinflussen sie sich gegenseitig. Beispielsweise bewirkt ein höherer Strom in d-Richtung eine Verringerung von  $\frac{d\Psi}{dt}$  in der q-Richtung. Für hoch ausgenutzte Maschinen verbessert die Berücksichtigung der Sättigung die Effizienz ([HHL02]) und die Berücksichtigung der Kreuzverkopplung verbessert die Regelgüte ([LH17], [Gem15, Kap. 6.6]). Beide Effekte zur Modellierung des nichtlinearen Eisenkreises werden zusätzlich zum Grundwellenmodell berücksichtigt.

## Beschreibung der PSM durch ein Differentialgleichungssystem mit nichtlinearen Funktionen für die magnetischen Flüsse

Das dq-Koordinatensystem ist am elektrischen Rotorwinkel  $\gamma_{el}$  ausgerichtet. Er bezeichnet die Verdrehung zwischen Rotor und Stator bezogen auf eine elektrische Umdrehung. Die d-Achse zeigt dabei in die Richtung des Flusses des Permanentmagneten. Die PSM wird nach [Sch13, Kap. 6] durch die komplexe Differentialgleichung

$$\mathbf{U}_{dq} = R_S \mathbf{I}_{dq} + \dot{\Psi}_{dq} + j\Omega_{el} \Psi_{dq} \quad (1.1)$$

beschrieben.<sup>4</sup>  $\Omega_{el}$  ist die elektrische Kreisfrequenz, die sich aus der Polpaarzahl  $p$  und der mechanischen Drehzahl  $\Omega$  berechnet:  $\Omega_{el} = p\Omega$ . Auf die vollständige Darstellung des Flussraumzeigers

$$\Psi_{dq}(\mathbf{I}_{dq}(t)) = \Psi_d(I_d(t), I_q(t)) + j\Psi_q(I_d(t), I_q(t)) \quad (1.2)$$

inklusive der Abhängigkeit von den Strömen und der Zeit wird zur besseren Lesbarkeit verzichtet. Folglich wird ebenso die Zeitabhängigkeit des Spannungsraumzeigers  $\mathbf{U}_{dq}$  und des Stromraumzeigers  $\mathbf{I}_{dq}$  nicht dargestellt. Die Stromabhängigkeit der Flüsse ist ein wichtiges Merkmal dieser Modellierung. Sie wird hier nicht nur linear durch eine Induktivität, wie im Grundwellenmodell angenommen, sondern durch ein Kennfeld oder eine Funktion des Stromraumzeigers modelliert. Das ermöglicht die Berücksichtigung des Sättigungseffekts im Eisenkreis. Die Berücksichtigung der magnetischen Kreuzverkopplung wird ermöglicht durch die Abhängigkeit des Flusses von den Strömen in beiden Achsen des dq-Koordinatensystems. Die Drehmomentgleichung

$$M = \frac{3}{2} p \Im(\mathbf{I}_{dq} \Psi_{dq}^*) \quad (1.3)$$

enthält das Produkt des Stromraumzeigers mit dem komplex konjugierten Flussraumzeiger und beschreibt die elektrisch-mechanische Schnittstelle. Das mechanische Teilsystem ist beschrieben durch die Differentialgleichung

$$M - M_L = J_T \dot{\Omega} \quad (1.4)$$

mit dem Maschinenmoment  $M$ , dem Lastmoment  $M_L$  und dem Massenträgheitsmoment  $J_T$  der Last. Damit ist die PSM unter den aufgeführten Annahmen als Energiewandler zwischen der mechanischen und elektrischen Domäne vollständig beschrieben.

## Überführung in ein normiertes System

Der Imaginär- und Realteil werden als Komponenten eines Vektors aufgefasst und alle Größen werden in ein normiertes Koordinatensystem überführt. Letzteres verringert den Einfluss

<sup>4</sup> Dabei wird die amplitudeninvariante Raumzeiger Definition nach [Sch13, Kap. 5.3.1] verwendet.

numerischer Fehler auf alle folgenden Berechnungen und ist Voraussetzung für eine Implementierung auf Systemen mit Festkommaarithmetik. Für die Normierung werden zunächst primäre Bezugswerte durch die Modellierung bestimmt. Aus diesen leiten sich die restlichen Bezugswerte ab. Der Maximalstrom wird als primärer Bezugswert so gewählt, dass er dem maximal in der Simulation möglichen Wert entspricht. Das Modell kann nicht außerhalb des Definitionsbereichs der Flussfunktionen<sup>5</sup> betrieben werden. Der maximale Strom, dem ein Fluss zugeordnet werden kann, wird als Bezugswert definiert. Ebenso ergibt sich aus dem Maximum der Flüsse über die beiden Flussfunktionen der Bezugswert für die magnetischen Flüsse. Der Bezugswert der Spannung wird so gewählt, dass er der maximal verfügbaren Spannung im dq-Koordinatensystem entspricht. Dieser Wert wird im nächsten Abschnitt 1.3 nochmals näher beschrieben. In den normierten Größen ergibt sich das Gleichungssystem der elektrischen Größen zu

$$u_d = r_S i_d + \dot{\psi}_d - \omega_{el} \psi_q, \quad (1.5)$$

$$u_q = r_S i_q + \dot{\psi}_q + \omega_{el} \psi_d. \quad (1.6)$$

Hierbei ist  $\omega_{el}$  die normierte elektrische Drehzahl der Maschine:  $\omega_{el} = \frac{\Omega_{el}}{\omega_{max}}$ . Die Polpaarzahl und der Faktor  $\frac{2}{3}$  sind im Bezugswert des Drehmoments enthalten und es ergibt sich

$$m = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (1.7)$$

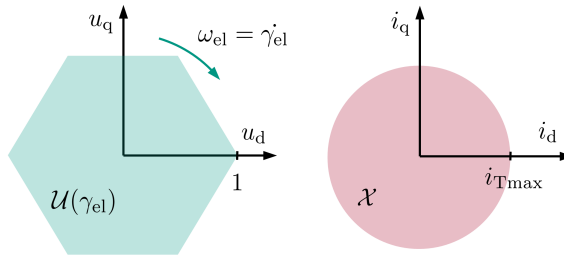
als Drehmomentgleichung.

### Beschränkungen der Zustände und Eingänge

Ein Antriebssystem hat mechanische und elektrische Begrenzungen, die eingehalten werden müssen, um einen zerstörungsfreien Betrieb zu gewährleisten. Die mechanischen Begrenzungen, wie maximale Drehzahl und maximales Drehmoment, werden hier nicht betrachtet. Die elektrischen Begrenzungen beziehen sich auf Strom und Spannung im Antriebssystem. Durch welche Faktoren diese bestimmt sind, hängt von der Auslegung der Leistungselektronik und der elektrischen Maschine ab. Es wird ein in der vorliegenden Leistungsklasse typisches Antriebssystem angenommen und im Folgenden beschrieben. Dabei wird angenommen, dass die maximal mögliche Spannung, welche durch die Leistungselektronik erzeugt werden kann, mit allen weiteren Bauteilen verträglich ist und sie wird als Begrenzung herangezogen. Darum muss hier nicht nur die Maschine sondern ebenfalls die speisende Leistungselektronik definiert werden. Sie wird als Wechselrichter in Sechspuls-Brückenschaltung mit Modulator angenommen, dies ist typisch in der Elektromobilität ([Hof11, S. 145]). Der Wechselrichter kann aufgrund der Schaltungstopologie im rotierenden dq-Koordinatensystem maximal Spannungsraumzeiger innerhalb eines Sechsecks erzielen. Dies ist in normierten Spannungen im

<sup>5</sup> Beispiele für Flussfunktionen sind im Anhang A.6.1 angegeben.

dq-Koordinatensystem im linken Teil der Abbildung 1.2 als Menge  $\mathcal{U}(\gamma_{el}) \subset \mathbb{R}^2$  dargestellt. Aufgrund des rotorfesten Koordinatensystems rotiert dieses Sechseck mit der Geschwindigkeit



**Abbildung 1.2:** Spannungs- und Strombegrenzung eines elektrischen Antriebs. Links: Begrenzung der maximalen Spannung durch eine Sechspuls-Brückenschaltung, rechts: Begrenzung durch einen maximalen Strombetrag

$\omega_{el} = \dot{\gamma}_{el}$  um den Ursprung. Es setzt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken, die im unnormierten dq-Koordinatensystem eine Länge von  $U_{\max} = \frac{2}{3}U_{ZW}$  haben, zusammen, wobei  $U_{ZW}$  die Spannung des Gleichspannungszwischenkreises ist. Dieser Wert  $U_{\max}$  wird für den Bezugswert zur Normierung der Spannung verwendet. Daraus resultiert im normierten dq-Koordinatensystem eine maximale Vektorlänge von eins. Hier wird angenommen, dass der maximale Strom des Antriebssystems durch die maximale Temperatur der Wicklung bestimmt ist. Der Maximalstrom ergibt sich somit aus einer maximalen Temperaturbelastbarkeit der Wicklungsisolation. Das setzt voraus, dass die Halbleiter der Sechspuls-Brücke für diesen Strom ausgelegt sind. In diesem Fall wird durch einen maximalen Strombetrag im dq-Koordinatensystem der maximale Leistungseintrag in die Wicklungen begrenzt, um die Isolation zu schützen. Die zeitinvariante Strombegrenzung ist im rechten Teil der Abbildung 1.2 dargestellt. Es sind alle Ströme erlaubt, die innerhalb der Menge  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$  liegen.

## 1.4 Stand der Wissenschaft

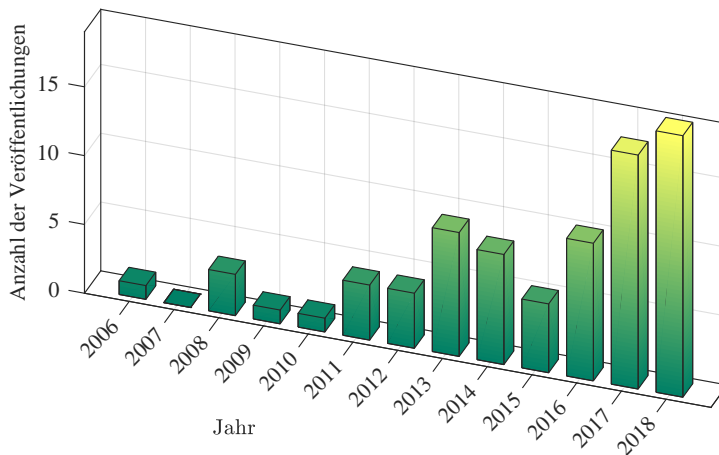
In diesem Abschnitt werden zunächst vorhandene Kategorisierungen von prädiktiven Regelverfahren in der Antriebstechnik vorgestellt, um Schritt für Schritt die Kategorie, welche für diese Arbeit relevant ist, einzugrenzen. Im Anschluss wird eine Klassifikation innerhalb dieser Kategorie vorgestellt, um die strukturierte Diskussion der relevanten Verfahren vornehmen zu können.

### 1.4.1 Klassifizierungen von prädiktiven Regelverfahren in der Antriebstechnik

Unter dem Begriff *Predictive Control* gibt es eine Vielzahl von Verfahren in der Antriebsregelung. Eine Übersicht inklusive der Abhängigkeiten zwischen den Verfahren ist in [KL00]

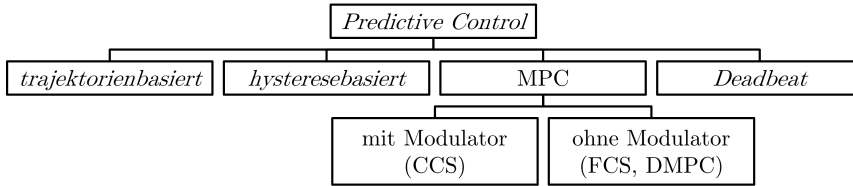
dargestellt. Kennel definiert die Verfahren in Abgrenzung zur *Feldorientierten Regelung* durch die *Vorausberechnung* von Schaltzeitpunkten. Er unterteilt die Verfahren in zwei Klassen: *hysteresebasiert* und *trajektorienbasiert*. Zu diesen Klassen zählen die sehr bekannten und verbreiteten Verfahren wie *Direct Self Control* (DSC) von Depenbrock (*trajektorienbasiert*) und *Direct Torque Control* (DTC) von Takahashi (*hysteresebasiert*) und von ihnen abgeleitete Verfahren. Andere Autoren der Antriebstechnik zählen ebenso die *Deadbeat*-Ansätze zu der Klasse *Predictive Control* ([CKK<sup>+</sup>08], [OKBR14, S. 188]). In [LKKS10] erweitert Linder die Klassifizierung von Kennel um zahlreiche Verfahren und fügt die Klasse *modellbasiert* hinzu, diese ist gleichbedeutend mit MPC. Laut Linder sind die Klassen *hysteresebasiert* und *trajektorienbasiert* eng verwandt, während die Klasse *modellbasiert* klarer abgegrenzt ist: Ansätze dieser Klasse sind im Gegensatz zu den anderen beiden in der Lage unter Berücksichtigung von vergangenen Stellgrößen die zukünftigen, nicht nur für den nächsten Takt, sondern über einem Horizont zu optimieren ([LKKS10, S. 22]).

Verfahren der Klasse MPC stehen im Zentrum dieser Arbeit und sind in der Wissenschaft ein Gebiet mit zunehmendem Interesse. Dies zeigt die steigende Anzahl der in der Datenbank *Scopus* registrierten Veröffentlichungen pro Jahr zur Schnittmenge der Forschungsgebiete MPC und PSM ([Els19]) in Abbildung 1.3, zu der diese Arbeit zählt. Aufgrund dieser hohen An-



**Abbildung 1.3:** Anzahl der Veröffentlichungen pro Jahr zum Schnitt der Themenfelder PSM und MPC ([Els19])

zahl an Veröffentlichungen werden die Verfahren feiner klassifiziert. In [LK05a] führt ebenfalls Linder eine weitere Klassifizierung basierend auf zwei Merkmalen ein: die Verwendung eines Modulators und die Länge des Prädiktionshorizonts. Die Einteilung nach dem ersten Merkmal zusammen mit einer Übersicht der bisherigen Klassifizierung ist in Abbildung 1.4 dargestellt. Diese Unterscheidung nach der Verwendung eines Modulators wird ebenfalls in [CKK<sup>+</sup>08] aufgegriffen, um MPC-Ansätze in zwei Klassen zu unterteilen. Dort werden diese Unterklassen gleichgesetzt mit der Verwendung eines *Finite Control Set* (FCS) und eines *Con-*



**Abbildung 1.4:** Klassifizierung von Methoden der Klasse *Predictive Control* in der Antriebstechnik

*tinuous Control Set* (CCS) im MPC. Für Ansätze mit CCS wird ein Modulator benötigt, falls das Ergebnis der Optimierung im MPC eine beliebige Spannung in der Spannungsebene ist, die zunächst in Schalterstellungen des Wechselrichters durch einen Modulator umgewandelt werden muss. Für Ansätze mit FCS steht der Optimierung im MPC nur eine endliche Anzahl von Optimierungsgrößen bereit, weshalb in [CKK<sup>+</sup>08] davon ausgegangen wird, dass diese direkt die Schalterstellungen des Wechselrichters ergeben. Dieser Zusammenhang ist jedoch nicht zwingend, da ebenfalls Ansätze mit einer endlichen Anzahl an Stellgrößen einen Modulator verwenden müssen, falls die Anzahl der möglichen Stellgrößen aus dem diskreten endlichen Stellgrößenvorrat der Optimierung die Anzahl der möglichen Schalterstellungen des Wechselrichters übersteigt (siehe hierzu die Ansätze [MSK13, YWX<sup>+</sup>16]). Ebenso existieren Ansätze mit CCS ohne Modulator, da der MPC die Schaltzeitpunkte der Halbleiter als kontinuierliche Optimierungsvariablen variiert ([GOPK12, HWB19]). Dennoch hat sich diese Klassifizierung durchgesetzt und wird in den meisten späteren Veröffentlichungen aufgegriffen. Ebenfalls werden Verfahren ohne Modulator als *Direct MPC* (DMPC) bezeichnet, da sie direkt die Schaltzeitpunkte der Halbleiter berechnen ([LK05a, MLSR<sup>+</sup>09], [LKKS10, S. 121]).

Verfahren ohne Modulator werden vornehmlich in höheren Leistungsklassen von Antrieben der Mittelspannungsklasse eingesetzt. In [Gey16] stellt Geyer Verfahren für Antriebe dieser Leistungsklasse vor. Neben den Verfahren ohne Modulator stellt er Verfahren basierend auf PWM vor, dabei beschränkt er sich jedoch auf Verfahren, welche die Pulsmuster optimieren. Das heißt, es wird kein klassischer Modulator verwendet, da der MPC die Schaltzeitpunkte und nicht die Stellgrößen im dq-Koordinatensystem berechnet. Somit stellt der MPC selbst einen optimalen Modulator dar. Geyer ist der zentrale Treiber für die Entwicklung von MPC-Ansätzen und deren industriellen Einsatz für Antriebe der Mittelspannungsklasse. Diese agieren bei niedrigeren Schaltfrequenzen von unter 1 kHz und können ebenfalls für Antriebe der Niederspannungsklasse verwendet werden, wenn dabei ebenfalls die Frequenz der Grundschwingung in der Größenordnung der Schaltfrequenz liegt (vgl. [Gey16, Vorwort]). Für Antriebe der Mittelspannungsklasse zeigt er in [Gey11, SGM13] einen Vergleich zwischen Verfahren mit und ohne Modulator im stationären Betrieb. Mit folgendem Ergebnis: umso kleiner der Anteil der Schaltverluste an den Gesamtverlusten, umso weniger bieten die Verfahren ohne Modulator Vorteile. Des Weiteren stellt er fest, dass insbesondere kurze Prädiktionshorizonte in Kombination mit Verfahren ohne Modulator zu schlechteren Ergebnissen in der Drehmomentwelligkeit führen. Für Antriebe geringerer Leistung sind die Zeitkonstanten wesentlich kleiner und die

Verwendung von längeren Horizonten daher aufgrund der höheren Rechenzeit schwieriger zu realisieren. Für Anwendungen, in denen die Schaltverluste weniger Anteil an den Gesamtverlusten haben und die Welligkeit des Drehmoments wichtiger ist, hat die Verwendung eines Modulators demnach Vorteile. Dies begründet sich durch eine konstante Schaltfrequenz der Halbleiter und der Entkopplung zwischen Schaltzeitpunkt und Abtastrate.

Ebenfalls für den stationären Betrieb vergleicht Preindl in [PB13b] das Verhalten einer PSM der Niederspannungsklasse bei Regelung durch einen MPC mit und ohne Modulator. Er kommt zu dem Ergebnis, dass sich für kleine Modulationsindizes ein Modulator vorteilhaft auf die Welligkeit der Ströme respektive des Drehmoments auswirkt. Preindl kommt daher zu dem Schluss, dass die Entscheidung zwischen MPC mit und ohne Modulator davon abhängt, ob eine konstante Schaltfrequenz oder Stromqualität von Interesse ist. Wobei er die Abtastfrequenzen der Regelansätze so wählt, dass beide Verfahren die gleichen Schaltverluste erzeugen, wozu die Taktrate der Ansätze mit CCS reduziert wird. Er betont daher, dass für Ansätze mit CCS geringerer Rechenaufwand entsteht und sie vielseitiger für breitere Leistungsklassen einsetzbar sind.

In der Elektromobilität kann für sekundäre Aufgaben des Traktionsantriebs der Aspekt der besseren Strom- und Drehmomentqualität ein entscheidender Aspekt sein, beispielsweise wenn die Kompensation von Getriebschwingungen verfolgt wird. Gleichzeitig haben für die betrachtete Maschine die Schaltverluste nur einen kleinen Anteil an den Gesamtverlusten. Dies ist konkret für die betrachtete Maschine in der Masterarbeit [Par17] gezeigt. Vor dem Hintergrund des Einsatzes für Traktionsmaschinen in der Elektromobilität konzentriert sich die folgende genauere Betrachtung des Stands der Wissenschaft auf Ansätze mit Modulator und einem Wechselrichter in Sechspuls-Brückenschaltung.<sup>6</sup>

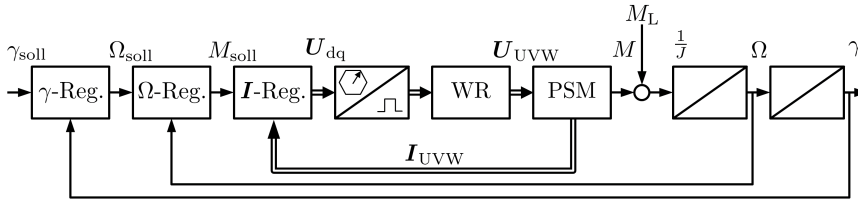
### 1.4.2 Klassifizierung und Bewertung der relevanten Ansätze mit Modulator

Nachdem im vorigen Abschnitt die Eingrenzung der relevanten Verfahren auf MPC mit Modulator begründet ist, erfolgt zunächst eine feinere Klassifizierung dieser Verfahren, um im Anschluss die Eigenschaften der verschiedenen Unterklassen zu beschreiben.

In [VRR<sup>+</sup>17] wird eine weitere Klassifizierung für MPC mit CCS vorgeschlagen. Dort werden die Verfahren zusätzlich hinsichtlich des verwendeten Optimierungsverfahrens eingeteilt, wobei nur die beiden laut Autor verbreiteten Algorithmen *Explicit MPC* (EMPC) und *Generalized Predictive Control* (GPC) aufgeführt werden. Diese Einteilung ist sinnvoll, da aufgrund des Optimierungsverfahrens methodisch bedingte Vor- und Nachteile für die Ansätze resultieren. Diese Idee soll daher aufgegriffen und im Folgenden um weitere und neuere relevante Veröffentlichungen aktualisiert werden.

---

<sup>6</sup> Eine Übersicht über Verfahren ohne Modulator ist in [RKE<sup>+</sup>13b] zu finden.



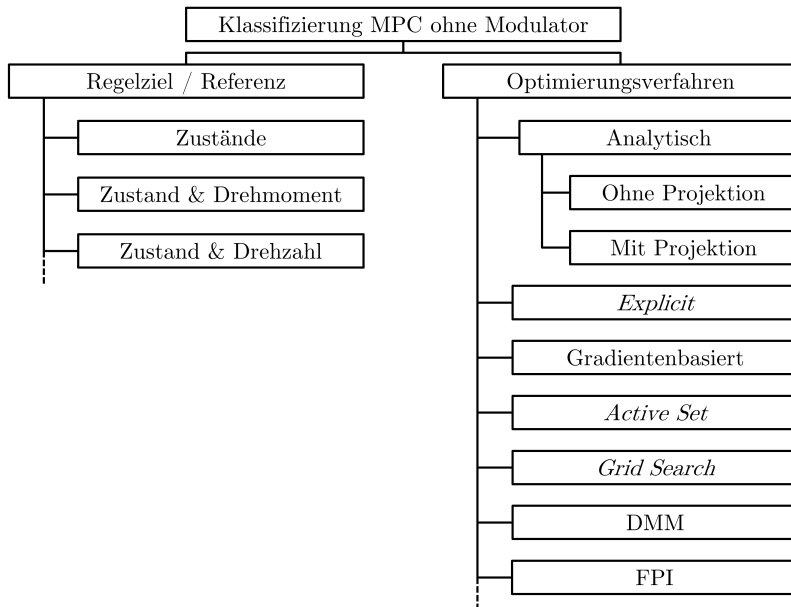
**Abbildung 1.5:** Regelkaskade eines Antriebssystems bestehend aus Reglern<sup>7</sup> für den mechanischen Rotorwinkel ( $\gamma$ -Reg.), die Drehzahl ( $\Omega$ -Reg.) und den Strom ( $I$ -Reg.).

Welche Schleife der konventionellen Kaskade durch den MPC ersetzt wird, beeinflusst entscheidend die erzielbaren Ergebnisse. Eine klassische Regelkaskade in der Antriebstechnik besteht von innen nach außen betrachtet aus einer Strom-, Drehzahl- und Lageregel Schleife. In Abbildung 1.5 ist zur Veranschaulichung eine Regelkaskade für einen Antrieb bestehend aus Wechselrichter (WR) und Maschine (PSM) dargestellt. Die zu ersetzende Schleife in der Kaskade gibt demnach vor, welchen Sollwert der Regler benötigt und welche Größe als Stellgröße von ihm berechnet werden muss. Im Fokus dieser Arbeit steht die Drehmoment- beziehungsweise die Stromregelung. Daher werden Ansätze betrachtet, die im Sinne der konventionellen Regelkaskade entweder nur die innerste oder die zwei innersten Schleifen durch einen MPC ersetzen. Das bedeutet, dass der MPC direkt die Spannungen im dq-Koordinatensystem oder im  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem als Ausgangsgröße, respektive als Optimierungsvariable, besitzt. Aufgrund der Tragweite dieses Unterschieds wird in dieser Arbeit eine zusätzliche Klassifizierung anhand des Regelziels vorgenommen. Das Regelziel wird hier anhand des Eingangs des Reglers und damit anhand des Sollwerts, welcher in der Gütefunktion als Referenz verwendet wird, differenziert. Dies geschieht durch Bestrafung der Abweichung von den Sollwerten, deren Erreichung das Regelziel darstellt. Eine ähnliche Idee ist in [CKL<sup>+</sup>09] für Ansätze mit FCS verfolgt, dort sind die Verfahren nach der verwendeten Gütefunktion und der darin eingesetzten Gewichtungsfaktoren klassifiziert. In dieser Arbeit wird jedoch nicht die genaue Gütefunktion betrachtet, sondern welche Sollwerte der MPC von einer übergeordneten Struktur benötigt.

In Abbildung 1.6 ist die Klassifizierung der relevanten MPC-Ansätze für MPC mit Modulator durch zwei unabhängige Merkmale dargestellt. Jedes Verfahren lässt sich jeweils einer Ausprägung der beiden Merkmale zuordnen. Dies hilft bei der folgenden Darstellung des Stands der Wissenschaft, da die Vor- und Nachteile jeweils repräsentativ für alle Verfahren des gleichen Merkmals erörtert werden können. Da nur Ausprägungen aktuell publizierter Verfahren aufgelistet sind, ist zu erwarten, dass der Aufzählung in Abbildung 1.6 in Zukunft weitere Ausprägungen hinzukommen.

<sup>7</sup> Vereinfachend ist jeweils die Berechnung der Regeldifferenz in den Reglerblöcken integriert. Beim Stromregler gilt dies ebenfalls für die Koordinatentransformationen der Messung sowie die Umrechnung von Soll Drehmoment zu Sollströmen des Eingangs. Abhängig vom verwendeten Modulator ist zusätzlich eine Koordinatentransformation für den Ausgang des Stromreglers nötig.





**Abbildung 1.6:** Klassifizierung der relevanten MPC-Ansätze für MPC mit Modulator durch zwei unabhängige Merkmale.

### Hybride MPC-Ansätze

Die oben beschriebene Unschärfe bei der Unterscheidung nach FCS und CCS führt zu *hybriden* Ansätzen, die einen Modulator verwenden, aber ein FCS oder eine Kombination aus einem FCS und einem CCS nutzen. Diese Verfahren werden hier gesondert betrachtet, da deren Optimierungsalgorithmen sehr spezifisch für die Anwendung entwickelt wurden und daher aufgrund ihrer Unterschiedlichkeit eine zusammenfassende Beschreibung nicht sinnvoll ist. Sie sind aus diesem Grund nicht in Abbildung 1.6 aufgeführt.

In [MSK13, MSK14] wird ein für die Asynchronmaschine entworfenes Verfahren ([SK12]) auf die PSM angewendet. Für die Formulierung des Regelziels in der Gütefunktion werden Sollwerte für den Betrag des Statorflussraumzeigers  $|\Psi_{dq}|$  und für das Drehmoment  $M$  verwendet. Mit einem definierten Spannungsvektor  $\mathbf{U}_{dq}$  wird gestartet und dessen Amplitude und Phasenlage variiert, sodass in dessen Umgebung 18 Kandidaten-Vektoren entstehen ([MSK14]). Für alle Kandidaten wird die Gütefunktion ausgewertet. Um den Kandidaten mit dem niedrigsten Gütefunktionswert wird wieder erneut eine Umgebung durch Erstellung von 18 neuen Vektoren sondiert. Die Umgebung wird dabei so gewählt, dass nach der feststehenden Anzahl an Iterationen die gesamte Spannungsebene innerhalb der Begrenzung abgedeckt ist. Damit dieses Vorgehen nachweislich das globale Optimum der Gütefunktion findet, darf diese keine Nebenminima aufweisen. Auf diese Problematik wird in der Veröffentlichung jedoch nicht eingegangen. Das Verfahren ist nur für ein Maschinenmodell ohne Berücksichtigung des nicht-

linearen magnetischen Kreises implementiert und berücksichtigt die Spannungsbegrenzung nur approximativ durch den Inkreis des Sechsecks. Ebenfalls wird eine Strombegrenzung in die Gütefunktion integriert. Es sind nur Spannungen erlaubt, die nach dem verwendeten Maschinenmodell einen Strom erzeugen, dessen Betrag die maximale Stromamplitude nicht übersteigt. Der MPC hat demnach ein großes FCS mit sehr vielen Elementen und ist daher Ansätzen mit CCS ähnlicher als Ansätzen mit FCS, welche nur die sechs möglichen Spannungszeiger der Vollaussteuerung und den Nullvektor berücksichtigen.

Ein weiterer *hybrider* Ansatz in [YWX<sup>+</sup>16] verwendet eine Kombination aus einem FCS und einem CCS. Hierbei wird das Optimierungsproblem im MPC in zwei Schritten gelöst. Im ersten Schritt wird der Modulationsindex, respektive der Betrag des Spannungsraumzeigers  $U_{dq}$ , optimiert. Dies erfolgt analytisch anhand einer Gütefunktion, die den Abstand zu einem Sollwert für den Stromzeiger  $I_{dq}$  bestraft. Die Wahl des Modulationsindex erfolgt aufgrund der analytischen Lösung aus einem CCS. Vorteilhaft dabei ist, dass die Optimierung nach der analytischen Lösung aufgrund ihrer eindimensionalen Optimierungsvariable einfach auf die physikalisch realisierbaren Werte im Intervall  $[0, 1]$  begrenzt werden kann. Im Anschluss wird für den Spannungsvektor mit dieser festgelegten Länge ein Winkel aus einem FCS ausgewählt. Das FCS enthält die Winkel der sechs Vektoren der Vollaussteuerung und zusätzlich maximal acht Winkel, welche jeweils äquidistant zwischen diesen verteilt sind. Problematisch ist der fehlende Nachweis der Optimalität, da ein zweidimensionales Optimierungsproblem schrittweise in jeder Dimension gelöst wird ohne zu iterieren. Das führt im Allgemeinen nicht zum globalen Optimum, jedoch werden die dafür notwendigen Voraussetzungen in der Veröffentlichung nicht diskutiert. Aufgrund des Verfahrens kann nur ein Spannungsraumzeiger aus dem Inkreis des möglichen Sechsecks ausgewählt werden, da der Winkel optimiert wird, nachdem der Modulationsindex festgelegt wurde. Das verwendete Maschinenmodell berücksichtigt nur einen linearen magnetischen Kreis, des Weiteren werden keine Strombegrenzungen betrachtet.

### MPC-Ansätze mit analytischer Lösung ohne Projektion

Als nächste Klasse werden die Ansätze mit einer analytischen Lösung des Optimierungsproblems ohne methodische Berücksichtigung der Spannungsbegrenzung betrachtet. Sie bilden eine umfangreiche Klasse und sind daher ebenfalls gesondert beschrieben, bevor die Beschreibung anhand der Klassifizierung in Abbildung 1.6 erfolgt. Die bekannten Verfahren dieser Klasse bauen auf dem Ansatz *Generalized Predictive Control* (GPC) aus [CMT87] auf<sup>8</sup>. Er kann als ein LQ-Regler über einem endlichen und gleitenden Horizont betrachtet werden ([CMT87]). Die geringe Rechenzeit und die einfache Methodik des Verfahrens führten dazu, dass die Anwendung von GPC die ersten Veröffentlichungen der Klasse MPC nach Ab-

<sup>8</sup> Dieser beruhte zunächst auf CARIMA-Modellen (*Controlled Autoregressive Integrated Moving Average*), wurde aber später auf Zustandsraummodelle übertragen und in der Antriebstechnik eingesetzt.

bildung 1.4 darstellten. Zunächst wurde das Verfahren aufgrund der geringen Zeitkonstanten für die Drehzahl- und Positionsregelung eingesetzt ([DB94, DBE96]), später in [KLL01] für die Stromregelung einer Asynchronmaschine. Die umfangreichsten Untersuchungen zum Einsatz von GPC stellte wiederum Linder in [LKKS10, Kap. 8] für eine Asynchronmaschine vor. Er kommt jedoch abschließend zu dem Ergebnis, dass der Einsatz von GPC in der Stromregelung keine Vorteile im Vergleich zu PI-Regelansätzen bringt. Ein Problem für das Verfahren zur kombinierten Strom- und Drehzahlregelung sind die Produkte aus den verwendeten Zuständen (Strom und Drehzahl). Bisher wurde kein Weg aufgezeigt, das MPC-Problem unter Beachtung des Produkts der Zustände des Streckenmodells analytisch zu lösen. Damit die Terme durch GPC berücksichtigt werden können, müssen die drehzahlabhängigen Terme als Störung betrachtet werden. Das heißt die Genauigkeit des Prädiktionsmodells muss zur Anwendung des Verfahrens erheblich reduziert werden. Dies widerspricht dem Ziel dem MPC das verfügbare Modellwissen bereitzustellen, um es bei der Optimierung berücksichtigen zu können. Einen Weg die nichtlinearen Terme dennoch zu berücksichtigen, zeigt Errouissi in [EADML17, EOCT12a, EYCAD16, EO10, EOCT12b], indem die Dynamik des Systems um den aktuellen Systemzustand linearisiert wird. Er untersucht ebenso die kombinierte Drehzahl- und Stromregelung von PSM. Hierfür werden Sollwerte für den d-Strom und die Drehzahl benötigt. Trotz der Verwendung von nichtlinearem GPC wurden bisher nur Maschinenmodelle mit einem linearen magnetischen Kreis untersucht.

Die analytische Lösung ermöglicht inhärent keine Begrenzungen. In [EOCT12a] wird daher der Einsatz von Begrenzungsgliedern außerhalb des MPC eingehend behandelt. Die einfachen skalaren Begrenzungsglieder für Strom und Spannung reduzieren die Komponenten der Raumzeiger auf die zulässigen Werte. Der Einfluss der Begrenzung der Stellgröße wird durch einen Störbeobachter kompensiert. In [EADML17] wird gezeigt, dass der Einfluss der Verstärkungsfaktoren des Störbeobachters auf die Strombegrenzung erheblich ist und bei deren Wahl berücksichtigt werden muss. In [ZXLM17] wird eine Methode zur Spannungsbegrenzung in Verbindung mit GPC vorgestellt. Diese Veröffentlichung nimmt unter den Verfahren mit analytischer Lösung eine Sonderstellung ein, da der MPC im statorfesten  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem implementiert ist und alle anderen im rotorfesten dq-Koordinatensystem. Das Vorgehen der Spannungsbegrenzung ist jedoch bei allen bis jetzt genannten GPC-Ansätzen unabhängig vom eingesetzten Regler, weshalb ebenso Verfahren aus dem Stand der Technik der Antriebstechnik eingesetzt werden können.

Es ist bisher unbekannt wie nichtlineare magnetische Maschinenmodelle in diesen Ansatz integriert werden können. Der Ansatz ermöglicht zwar aufgrund der analytischen Lösung längere Prädiktionshorizonte als bei Verwendung der anderen Optimierungsverfahren, jedoch können diese Verfahren nicht inhärent Beschränkungen der Spannungen und Ströme bei der Optimierung berücksichtigen. Das stellt eine drastische Limitierung dar, da die inhärente Berücksichtigungen von Beschränkungen wesentlicher Vorteil von MPC-Ansätzen ist und zu deren Potential bezüglich Leistungssteigerung und einfacher Parametrierung beiträgt. Aus diesem Grund werden die in diesem Abschnitt gesondert beschriebenen Verfahren nicht in die folgende Übersicht aufgenommen. Eine Ausnahme bilden Verfahren, welche die analy-

tische Lösung unter Berücksichtigung der verwendeten Gütefunktion begrenzen. Bei diesen Verfahren ist die Begrenzung in den Optimierungsalgorithmus integriert und ist somit Teil der Methode. Diese Verfahren ([Pre13, KKZ<sup>+</sup>19]) sind daher in die folgende Übersicht integriert.

### **Ansätze mit Optimierung der Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung**

Des Weiteren wird der Ansatz aus [SDJK11] vorgestellt. Dieser Ansatz optimiert jedoch nicht die Spannungen, wie eingangs gefordert sondern die Stromtrajektorie. Er wird daher gesondert beschrieben, bevor im nächsten Abschnitt die Beschreibung anhand der Klassifizierung in Abbildung 1.6 erfolgt. Er ist für die vorliegende Arbeit von Bedeutung, da er in der Kategorie mit Modulator eine Besonderheit darstellt: Er verwendet das Drehmoment und die Verluste zur Formulierung des Regelziels in der Gütefunktion ohne Sollströme einzusetzen. Beide Regelziele werden in der Gütefunktion durch eine gewichtete Summe bewertet, was wiederum zu einer Kompromisslösung führt, da insbesondere diese beiden Ziele konträr sind. Des Weiteren nimmt die dort vorgestellte Methode eine Sonderrolle ein, da es sich um einen kontinuierlichen MPC handelt. Eine Kombination aus Basisfunktionen wird so variiert, dass sich eine optimale Zustandstrajektorie im Sinne der Gütefunktion ergibt. Gelöst wird das linear formulierte Optimierungsproblem durch einen Simplex-Algorithmus, welcher jeweils Strom- und Spannungsbegrenzungen durch konstante Vierecke im dq-Koordinatensystem approximiert. Diese Zustandstrajektorie wird anschließend über ein flaches Modell in die optimale Stellgrößentrajektorie umgerechnet, weshalb der Ansatz als *Flatness-Based Predictive Control* bezeichnet wird. Der Ansatz berücksichtigt nur einen linearen magnetischen Kreis und vernachlässigt das Reluktanzmoment in der Ausgangsgleichung. Zur Begrenzung in der Strom- und Spannungsebenen kommen Vierecke zum Einsatz.

### **Klassifizierte Übersicht und Bewertung der relevanten Verfahren**

Auf die drei Sonderfälle der vorigen Abschnitte folgt in Tabelle 1.1 die Behandlung der verbleibenden relevanten Verfahren und deren Zuordnung zu den Klassen aus Abbildung 1.6. Die Tabelle bewertet die Verfahren aus dem Stand der Wissenschaft hinsichtlich ihrer Modellgenauigkeit. Modellgenauigkeit bezieht sich neben dem Maschinenmodell ebenso auf die Modellierung der Begrenzungen des Antriebssystems. Alle in der Tabelle aufgeführten Veröffentlichungen enthalten MPC-Ansätze für Synchronmaschinen mit Permanentmagneten. Die Sortierung der Tabelle richtet sich nach der Klassifizierung anhand der Referenz, die zur Formulierung des Regelziels in der Gütefunktion eingesetzt wird. Die Reihenfolge der Regelziele in der Tabelle ergibt sich bei Betrachtung der klassischen Regelkaskade von innen nach außen. Zunächst erfolgen Erläuterungen zu den Spalten sowie den verwendeten Begriffen und Abkürzungen in der Tabelle.

Die ersten drei Spalten enthalten die Klassifizierung nach Abbildung 1.6. Die ersten beiden enthalten die Klassifizierung anhand der Referenz zur Formulierung des Regelziels, zuerst in

Klassifizierung			nichtlin.	inhärente Begrenzung	
Referenzgröße (Regelziel)	Optimierungs- verfahren		mag. Kreis	Spannung	Strom
Zustände	$I_d, I_q$	<i>Explicit</i> [MDM09], [MDM12]	✗	kon. 8-Eck	Box
		<i>Grid Search</i> (PD) [CWR13a]	✗	Box	✗
		DDM [CL13]	✗	kon. 12-Eck	7-Eck
		analyt. [KKZ <sup>+</sup> 19]	✗	rot. 6-Eck	✗
		<i>Active Set</i> (PD) [TCFB19]	✗	rot. 6-Eck	✗
	$I_\alpha, I_\beta$	<i>Explicit</i> [PB13b]	✗	rot. 6-Eck	Box
		analyt.+Proj. [Pre13, Kp. 5]	✗	rot. 6-Eck	✗
$\Psi_\alpha, \Psi_\beta$	<i>Explicit</i> [Pre16a]	✓	rot. 6-Eck	✗	
Zustand & Drehmoment	grad.+Proj.	[PBD13]	✗	Inkreis	✗
		n. a. [CBBL15]	✗	kon. 8-Eck	5-Eck
	$I_d, M$	<i>Explicit</i> [YXY <sup>+</sup> 17]	✗	Box	Box
		AL+grad. (PD) [EGG17]	✓	Inkreis	Kreis (w.)
		AL+FPI (PD) [EG18b]	✓	Inkreis	Kreis
Zustand & Drehzahl	$I_d, \Omega$	[BBPZ08], <i>Explicit</i> [BBPZ09], [BKKP11]	✗	kon. 8-Eck	Box
		<i>Explicit</i> [CFI <sup>+</sup> 13]	✗	Box	Box
		n. a. [GBP13]	✗	Kreis	Kreis
		<i>Explicit</i> [MVV16]	✗	kon. 6-Eck	6-Eck

**Tabelle 1.1:** Klassifikation von MPC-Ansätzen für die Regelung von PSM mit Modulator

Verwendete Abkürzungen: rot.: rotierend, kon.: konstant, w.: weiche Nebenbedingung, n. a.: nicht angegeben, grad.: gradientenbasiert, analyt.: analytisch, Proj.: Projektion, PD: *Primal-Dual*, DDM: *Double Description Method*, AL: *Augmented Lagrangian*, FPI: *Fixed-Point Iteration*.

Worten wie in Abbildung 1.6 und dann in der zweiten Spalte konkretisiert. Hierfür werden die Größen angegeben, die im jeweiligen MPC-Ansatz als Sollwert in der Gütefunktion eingesetzt werden. In der dritten Spalte ist die Klassifizierung nach dem Optimierungsverfahren aufgeführt und mit «PD» gekennzeichnet, falls diese zu den *Primal-Dual-Verfahren*<sup>9</sup> gehören. Die einzelnen Einträge, respektive die Optimierungsalgorithmen, werden weiter unten im Text erläutert.

Zur Bewertung der Modellgüte der Maschine ist in der Tabelle die Spalte «nichtlin. mag. Kreis» aufgeführt. Diese gibt an, ob die Berücksichtigung der Effekte Sättigung und Kreuzverkopplung in der Veröffentlichung beschrieben wird. Ein Haken in dieser Spalte zeigt demnach an, dass die nichtlinearen Flussfunktionen nach Gleichung (1.2) berücksichtigt werden können. Ein Kreuz zeigt an, dass die Induktivitäten lediglich als konstante Systemparameter berücksichtigt werden.

In der sechsten Spalte wird die verwendete Spannungsbegrenzung des Ansatzes charakterisiert. Der Eintrag «n-Eck» gibt an, wie viele Ecken das verwendete Polygon zur Modellierung der Spannungsbegrenzung hat. Da alle Veröffentlichungen die gleiche Schaltungstopologie verwenden, ist der Idealzustand der Einsatz eines rotierenden («rot.») Sechsecks zur Begrenzung (siehe Abschnitt 1.3). Zu den einfachsten Formen von Beschränkungen gehören achsparallele Ungleichungen. Sie werden als *Box Constraint* bezeichnet und daher mit «Box» abgekürzt. Wenn in der Spalte «kon.» eingetragen ist, wird in diesem Verfahren nur eine konstante Begrenzung im dq-Koordinatensystem verwendet und keine rotierende. Mit «Inkreis» werden Verfahren gekennzeichnet, falls sie die größte innere konstante Approximation des rotierenden Sechsecks werden. Für die Strombegrenzung ist im dq-Koordinatensystem ein Kreis die ideale Beschreibung (siehe Abschnitt 1.3). Die Strombegrenzung entspricht einer Zustandsbegrenzung, daher kommt zusätzlich die Option hinzu, dass sie weich oder hart implementiert werden kann. Als weich werden Beschränkungen bezeichnet, falls die Ungleichheitsnebenbedingungen durch eine Bestrafungsfunktion in der Gütefunktion integriert werden ([ZM95]). Wie der Name weich nahe legt, werden die Begrenzungen nicht ausgeschöpft oder verletzt, sie sind in beiden Fällen nicht exakt berücksichtigt. Wie stark dies ausfällt, hängt von der Parametrierung und dem Verfahren zur Erstellung der Bestrafungsfunktion ab. In der Tabelle sind nur die weichen Begrenzungen gekennzeichnet. Alle Begrenzungen ohne Zusatz sind hart.

Nach den Erläuterungen zum Aufbau der Tabelle erfolgt jetzt unter Berücksichtigung der vorgestellten Klassifizierung die Beschreibung der Verfahren mit dem Augenmerk auf ihre Vor- und Nachteile bezüglich der Modellgenauigkeit. Die Verfahren werden zum einen gruppiert nach dem Optimierungsverfahren und zum anderen gruppiert nach dem Regelziel diskutiert.

Bei den analytischen Verfahren ohne Projektion ist [KKZ<sup>+</sup>19] hervorzuheben, da dort kein GPC verwendet wird, sondern ein speziell für die Anwendung entworfener Ansatz. Zunächst

<sup>9</sup> Eine kurze Erklärung hierzu befindet sich im Anhang A.1.

wird die unbeschränkte analytische Lösung berechnet und im Falle von verletzten Spannungsbeschränkungen die Lösung auf der aktiven Begrenzung durch die analytische Lösung der Lagrange-Funktion berechnet. Der dort vorgestellte Algorithmus zur Berechnung der aktiven Begrenzung setzt jedoch eine symmetrische Eingangsmatrix des Maschinenmodells voraus. Dies schließt die Berücksichtigung magnetischer Asymmetrie in der Maschine ( $L_d \neq L_q$ ) aus. Vorteil der Methode ist jedoch, dass die Spannungsbegrenzung exakt durch ein rotierendes Sechseck im dq-Koordinatensystem berücksichtigt werden kann.

Letztgenannter Vorteil gilt ebenfalls für den Ansatz von Preindl in [Pre13, Kp. 5], wo eine Kombination aus analytischer Lösung und Projektion verwendet wird, jedoch im statorfesten  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem. Damit dieser Algorithmus angewendet werden kann, wird ein einfaches diskretes Maschinenmodell  $\Psi_{dq}(k+1) = \Psi_{dq}(k) + T_A U_{dq}(k)$  verwendet, in dem der ohmsche Spannungsabfall vernachlässigt ist. Dieser muss außerhalb des MPC durch eine Vorsteuerung kompensiert werden, dadurch sind die berechneten Spannungen nicht optimal<sup>10</sup>. Ein Vorteil dieses Vorgehens ist, dass nichtlineare Zusammenhänge zwischen Strömen und Flüssen außerhalb des MPC berücksichtigt werden können, jedoch wird diese Möglichkeit in [Pre13, Kp. 5] nur erwähnt, aber nicht gezeigt.

EMPC ist mit Abstand die Klasse mit den meisten Veröffentlichungen, weshalb sie im Folgenden am detailliertesten ausgeführt wird. Das Vorgehen zum Entwurf eines EMPC unterscheidet sich wesentlich von anderen MPC, da die Optimierung der Gütefunktion nicht zur Laufzeit des Reglers stattfindet.<sup>11</sup>

Zur Anwendung des Verfahrens müssen sowohl das Streckenmodell sowie die Begrenzungen durch affine und zeitinvariante Funktionen beschrieben sein. Daraus resultiert, dass bereits die drehzahlabhängigen Terme der Differentialgleichung der PSM gesondert berücksichtigt werden müssen. Daher müssen diese Terme bei diesem Verfahren als Störung betrachtet werden, die entweder durch eine Vorsteuerung oder einen Störbeobachter kompensiert werden. Dies kann umgangen werden, wenn der MPC im  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem anstatt im dq-Koordinatensystem eingesetzt wird. Die Regelung im  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem wirkt sich ebenfalls positiv auf die Spannungsbegrenzung aus, worauf später eingegangen wird.

In der Veröffentlichung [BKPP11] wird der vorgestellte EMPC aus [BBPZ09, BBPZ08] um die Berücksichtigung des Reluktanzmoments erweitert. Da dieses einen nichtlinearen Term in der Ausgangsgleichung im Bezug auf die Ströme darstellt, können EMPC Regler ihn nicht berücksichtigen. In [BKPP11] wird das durch eine Linearisierung dieses Terms im Sollwert ermöglicht.

Trotz des oben beschriebenen Nachteils verwendet die Mehrzahl der EMPC-Veröffentlichungen das dq-Koordinatensystem. Was dazu führt, dass das zeitvariante rotierende Sechseck der Spannungsbegrenzung nur approximativ berücksichtigt werden kann. Hierfür sind zwei Ansätze vorhanden. Zum einen kann die vom Wechselrichter zur Verfügung gestellte Spannung

<sup>10</sup> Untersuchungen zu den Auswirkungen der Vernachlässigung des Statorwiderstands sind in [PHL16]) zu finden. Wie groß die Auswirkungen sind, hängt von den Parametern der PSM ab.

<sup>11</sup> Eine kurze Erklärung des Verfahrens ist im Anhang A.1 im ersten Absatz zu finden.

voll ausgenutzt werden, wenn eine äußere Einschließung des rotierenden Sechsecks durch affine Gleichungen vorgenommen wird. Dann ist jedoch die berechnete Stellgröße des MPC gegebenenfalls zu groß und muss zusätzlich mit konventionellen Methoden begrenzt werden, wie in [BKKP11]. Dies bringt den Nachteil mit sich, dass die Stellgröße nicht als optimal betrachtet werden kann, da die Optimierung dies nicht berücksichtigt. Dieses Vorgehen hat jedoch den Vorteil, dass die Spannung des Wechselrichters voll ausgenutzt werden kann. Zum anderen kann eine innere Approximation des rotierenden Sechsecks durch affine Gleichungen vorgenommen werden, dann bestimmt der MPC nur realisierbare Spannungen, jedoch nutzt dieses Vorgehen nicht das vollständige Potential des Wechselrichters. Die fehlende Spannung führt zu langsamerer Dynamik und höheren Strömen, durch die höhere Verluste entstehen. Die Approximation der zeitvarianten Spannungsbegrenzung kann vermieden werden, indem im statorfesten  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem geregelt wird, da darin die Spannungsbegrenzung nicht zeitvariant ist ([PB13b, Pre16a]).

Preindl stellt in [Pre16a] einen EMPC vor mit dem gleichen einfachen Modell wie bei dem analytischen Ansatz [Pre13, Kap. 5] und dem daraus resultierenden Vorteil einer exakten Modellierung der Spannungsbegrenzung im statorfesten  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem. Dies ist der einzige EMPC, der die Spannungsbegrenzung exakt berücksichtigen kann. Wie oben beschrieben, wird die Spannung zwar voll ausgenutzt, aber das Optimierungsproblem berücksichtigt nicht den ohmschen Spannungsabfall. Auf eine Integration einer Strombegrenzung in diesen EMPC wird nicht eingegangen. Hierfür müsste die Strombegrenzung in die statorfeste Flussebene transformiert und dann affin approximiert werden. Des Weiteren ist bei diesem Ansatz eine Gewichtung von Stellgrößen notwendig, daher muss eine Kompromisslösung eingestellt werden, da in der Antriebsregelung eine Bestrafung der Spannung oder der Spannungsänderung keine Zielvorgabe der Anwendung ist. Eine falsche Einstellung der Stellgrößengewichtung kann jedoch zu Problemen beim numerischen Lösen führen ([PB13b]).

Alle verbleibenden Ansätze der Tabelle nutzen zur Laufzeit ausgeführte Optimierungsalgorithmen. Eine detailliertere Beschreibung der Optimierungsverfahren, welche in der tabellarischen Übersicht Tabelle 1.1 aufgelistet sind, ist im Anhang A.1 gegeben. Diese Optimierungsverfahren bieten im Allgemeinen die Möglichkeit, Parameter der Strecke online zu verändern und die nichtlinearen Anteile des Maschinenmodells durch lokale Linearisierungen zu modellieren und eine Adaption von Parametern vorzunehmen. Ihre Limitierung bezüglich Modellierungsgenauigkeit kann Tabelle 1.1 entnommen werden und ist im Folgenden zusammenfassend beschrieben.

Bezüglich der Genauigkeit bei der Modellierung der PSM treten drei Ansätze in den Vordergrund. Die beiden Arbeiten von Englert ([EG18b, EGG17]) ermöglichen die Berücksichtigung von nichtlinearen Flussfunktionen, da die Werte der Induktivitäten online adaptiert werden können. Dies ist ähnlich mit der Linearisierung der Flusskennfelder im aktuellen Systemzustand. Ebenfalls ermöglicht die Wahl der Flüsse als Zustände in [Pre16a] die Berücksichtigung von Flussfunktionen. Zusammen mit der exakten Spannungsbegrenzung ist dies das zentrale Alleinstellungsmerkmal dieses EMPC.



Die rein analytischen Lösungsverfahren sind vorab beschrieben und nicht in der Tabelle aufgelistet, damit weisen alle dort aufgeführten Verfahren eine inhärente Spannungsbegrenzung auf. EMPC Ansätze ermöglichen nur eine exakte Berücksichtigung, falls sie im  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem implementiert werden. Alle Ansätze mit projektionsbasierten Optimierungsansätzen berücksichtigen die Spannungsbegrenzung exakt, mit Ausnahme von [PBD13].

Harte Begrenzungen des Stroms sind inhärent, abgesehen von EMPC, nur mit den Optimierungsansätzen DDM und AL vorhanden. Beim erstgenannten Verfahren können nur affine Approximationen des Maximalstromkreises berücksichtigt werden. Beim zweitgenannten gibt es zwei Varianten für die Begrenzung auf den Maximalstromkreis: eine weiche und eine harte. Somit ist die Methode aus [EG18b] die einzige bisher bekannte Möglichkeit mit einer exakten und harten Strombegrenzung. Bei gradientenbasierten Verfahren, welche die primale Variable optimieren, sind diese bisher nicht vorhanden. Keine der bekannten Veröffentlichungen in dieser Klasse ist bisher auf die Implementierung von zeitvarianten Strombegrenzungen eingegangen.

Es folgen zwei zentrale Erkenntnisse zur Klassifizierung anhand des Regelziels. In der Klasse der höchsten Ebene, der Drehzahl- und Stromregelschleife, finden sich nur EMPC Ansätze. Es lässt sich für diese Klasse festhalten, dass das Optimierungsproblem zu komplex wird. So ist es echtzeitfähig bisher nur durch EMPC lösbar, was die beschriebenen Nachteile mit sich bringt. Eine Ausnahme stellt die Untersuchung in [GBP13] dar. Die simulative Untersuchung hat nicht das Ziel echtzeitfähig zu sein und verwendet die native *Optimization Toolbox* von *MATLAB* zur Optimierung. Dennoch zeigen sich dort Schwierigkeiten bei der Einstellung der Gewichtung zwischen den Regelzielen für Drehzahl und Strom und es kommt zu Schwingungen im Betrieb während der Feldschwächung.

In den Klassen der unteren Ebene lässt sich folgende Aussage treffen. Ob zur Formulierung des Regelziels Referenzen für die Zustände oder ein Zustand und das Drehmoment gewählt werden, ist bei den vorhandenen Verfahren nur vordergründig relevant. Bei der Verwendung der zuletzt genannten Kombination wird ebenfalls eine Zuordnung zu einem stationären Zielzustand für den Sollwert des d-Stroms benötigt, falls Maschinen mit magnetischer Asymmetrie geregelt werden sollen ([PBD13]). Selbst wenn Maschinen ohne magnetische Asymmetrie betrachtet werden und der d-Strom stets zu Null geregelt wird, entspricht dies der Vorgabe eines stationären Zielzustandes in der Stromebene. Dies stimmt nicht mit dem Regelziel der Mechanik, einem schnellen Drehmomentaufbau, überein. Das gleiche gilt für die Ansätze die Sollwerte für die Ströme oder Flüsse vorgeben. Daher sind aus dieser mechanischen Sicht alle vorgestellten Ansätze Kompromisslösungen.

## 1.5 Fazit

Im Folgenden werden die Lücken aus dem Stand der Wissenschaft im vorigen Abschnitt aufgegriffen sowie ihre Relevanz erörtert und im Anschluss die Forschungsziele dieser Arbeit formuliert.

MPC aus der Forschung mit experimenteller Erprobung haben sich in der kommerziellen Antriebstechnik im Leistungsspektrum der Elektromobilität noch nicht durchgesetzt. In den vorhandenen Ansätzen wird die Modellierung des Antriebs und der Betriebsgrenzen zum Teil stark vereinfacht, um die Berechnung der Stellgröße innerhalb der geforderten Taktperiode durchführen zu können. Ein MPC kann aufgrund dieser Vereinfachungen weder sein eigenes methodisches Potential noch das des Antriebs voll ausschöpfen. Diesbezüglich sind im Stand der Wissenschaft drei Haupteinschränkungen vorherrschend: das Fehlen oder Approximieren von Strom- und Spannungsbegrenzung sowie die Verwendung von Prädiktionsmodellen, welche lediglich einen linearen magnetischen Kreis annehmen. Maschinenmodelle der PSM, welche einen nichtlinearen magnetischen Kreise berücksichtigen sind Stand der Wissenschaft in der Modellierung. Diese Modellierungstiefe wird bereits leistungssteigernd in Regelansätzen anderer Klassen erreicht ([SSD<sup>+</sup>03, RWD13]), in MPC-Ansätzen jedoch nur vereinzelt verwendet. Neben anderen Kriterien, wie Implementierungs-, Entwicklungsaufwand und Kosten des Endprodukts ist die Vermeidung von Leistungseinbußen ein zentraler Aspekt, in dem MPC-Ansätze in der Leistungselektronik die bestehenden Ansätze erreichen müssen, bevor sie sich im industriellen Umfeld durchsetzen können ([PDA16]).

Antriebe in der Elektromobilität unterliegen im Betrieb großen thermischen Schwankungen ([RH11, FZW<sup>+</sup>10]). Diese führen zu Parameterschwankungen, die einen signifikanten Einfluss auf das elektrische Betriebsverhalten haben. Soll dieser Effekt bei der Verwendung von Zuordnungstabellen zwischen Sollströmen und Söldrehmoment berücksichtigen werden, müssen Kennfelder von hoher Dimension und mit hohem Speicherbedarf verwendet werden ([WBL13]). Es gibt aktuelle Ansätze, welche die Zuordnung online berechnen und somit online identifizierte Parameterschwankungen berücksichtigen können. Diese Ansätze berücksichtigen jedoch nur lineare Modelle des magnetischen Kreises ([EG18a, PHL16, LH16]). In [CL14] werden zwar die Sollströme durch Optimierung unter Berücksichtigung von betriebspunktabhängigen Parametern berechnet, jedoch wird ein Teil des Optimierungsproblems ausgelagert. Dieser Teil wird im Vorfeld optimiert und ist parameterabhängig. Dadurch ist die Onlineadaption von Parametern ausgeschlossen. Eine vollständige Lösung der Sollstrombestimmung zur Laufzeit unter Berücksichtigung von Sättigung ist in [JSHR06] zu finden. Sie erfordert jedoch eine numerische Optimierung, wie es ebenfalls für einen MPC der Fall ist. Dies zeigt, dass Ansätze mit Zuordnungstabellen systembedingt an Grenzen stoßen.

Zeitvariante Strombegrenzungen können für die Anwendung von Vorteil sein, falls der Betrieb an der Stromgrenze angestrebt wird. Bei Antrieben der Elektromobilität ist dies der Fall, da diese hohe Leistungsdichten anstreben und gleichzeitig der Betrieb bei großen thermischen Schwankungen stattfindet. Das Ziel ist eine Masse-, Volumen- und Kostenreduktion des An-

triebs. Jede dieser Bestrebungen geht mit weniger Kühlfläche und -masse einher. Die Stromgrenze ergibt sich aus der thermischen Festigkeit der Isolation der Wicklung oder der verwendeten Permanentmagnete. Zur vollen Ausnutzung der Maschine werden Temperaturen gemessen sowie thermische Modelle verwendet, um die jeweilige Temperatur im Betrieb berechnen zu können ([KHL14]). Der Einsatz einer zeitvarianten Strombegrenzung in der Maschine sichert die Einhaltung der Maximaltemperatur durch die Verringerung des Strombetrags<sup>12</sup>. Dies ist ein methodischer Vorteil gegenüber Regelansätzen, die keine inhärente Möglichkeit bieten den Strom zu begrenzen. Dort kann nur der Sollwert des Stroms angepasst werden, was jedoch keine Aussage über den Strom, der sich einstellt, zulässt. Dieser hängt vom dynamischen Verhalten des Regelkreises und damit von der Parametrierung des Reglers ab. Trotz der beschriebenen Vorteile sind methodische Strombegrenzungen in Ansätzen aus dem Stand der Wissenschaft nur zeitinvariant und meist nur approximativ vorhanden.

Die zusätzliche Kompensation von Drehmomentschwingungen durch die Traktionsmaschine im Antriebsstrang eines PKW ist ein Anwendungsfall, der besondere dynamische Anforderungen im Grenzbereich hat. Die Drehmomentschwingungen haben Auswirkungen auf die Lebensdauer und die Fertigungskosten des Antriebsstranges ([GOS14]). Die dadurch entstehenden Geräusche und Vibrationen sind besonders bei Elektrofahrzeugen negativ wahrnehmbar, da zum einen die elektrische Maschine leiser ist als ein Verbrennungsmotor und zum anderen die Drehzahlen höher sind ([JMZ13, GOS14]). Eine Ursache für Drehmomentoszillationen sind die hochfrequenten Zahneingriffe im Getriebe ([JMZ13, GOS14]), da eine Anregung mit jedem erneuten Zahneingriff erfolgt.

Die Gruppierung der vorhandenen Ansätze nach ihrem Regelziel laut Gütefunktion aus Tabelle 1.1 lässt zusammenfassend eine Zweiteilung zu: einerseits Verfahren, die nur auf der untersten Ebene regeln, unter Verwendung von Strömen, Flüssen oder eines Stroms sowie des Drehmoments der Maschine als Sollwert, andererseits Verfahren, welche die Drehzahl als Zustand aufnehmen und dafür einen Sollwert vorgeben. Sie erfassen das Regelproblem auf einer höheren Ebene, da sie zwei Schleifen des klassischen kaskadierten Ansatzes (vgl. Abbildung 1.5) durch einen MPC ersetzen. Diese Verfahren sind aufgrund ihrer Modellkomplexität für den vorliegenden Anwendungsfall jedoch nicht geeignet. Sie können aktuell und in naher Zukunft nur mit Approximationen, welche zu nicht hinnehmbaren Leistungseinbußen des Antriebssystems führen, implementiert werden.

Zwischen diesen beiden Gruppen ist eine Ebene bisher unbetrachtet: ein MPC, der vollkommen ohne Zustandssollwerte direkt ein Drehmoment als Sollwert verarbeitet. Ein solcher Ansatz eröffnet in der eingeführten Klassifizierung (Abbildung 1.6) anhand des Regelziels eine neue Klasse. **Es gibt bisher keine MPC-Ansätze zur Optimierung der Stellgrößen, welche das Drehmoment als Sollwert und die Verluste als zusätzliches Gütekriterium verwenden.**

---

<sup>12</sup> Im Stillstand sind die Phasenströme konstant und unsymmetrisch verteilt, in diesem speziellen Fall ist ein maximaler Strombetrag im dq-Koordinatensystem nicht ausreichend.

Zusammenfassend ergeben sich aus der Analyse des Stands der Wissenschaft der Antriebsregelung die folgenden Fragestellungen, deren Beantwortung das Ziel dieser Arbeit ist:

- Wie ist es möglich bei der Optimierung der Stellgrößen direkt die zwei konträren Regelziele Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung in der Gütefunktion zu erfassen?
- Wie muss bei der dabei entstehenden Methode und als Ergänzung zu den bestehenden Verfahren die Modellierung gewählt werden? Wie können gleichzeitig zentrale Eigenschaften der PSM berücksichtigt werden:
  - Berücksichtigung von Sättigung und Kreuzverkopplung des Eisenkreises, durch Einbeziehung der Flussfunktionen
  - Nutzung des Reluktanzmoments
  - Integration einer zeitvarianten Strombegrenzung in Kombination mit einer exakten zeitvarianten Spannungsbegrenzung

## 2 Modelle einer PSM für MPC

In diesem Kapitel wird ausgehend von der Beschreibung der PSM durch normierte Differentialgleichungen im dq-Koordinatensystem in Abschnitt 1.3 ein zeitdiskretes Zustandsraummodell entworfen. Für das Prädiktionsmodell der Zustände wird eine affine Gleichung gewählt, die durch Approximation im aktuellen Zustand bestimmt wird. Die entwickelte Methode wird in allgemeiner Form vorgestellt, welche die Kenntnis der Funktionen  $\Psi_d(I_d, I_q)$  und  $\Psi_q(I_d, I_q)$  voraussetzt. Es ist gleichgültig, ob der Zusammenhang analytisch durch zweifach stetige differenzierbare Funktionen oder durch Kennfelder gegeben ist. Mit der Erstellung des Prädiktionsmodells für den MPC endet dieses Kapitel.

### 2.1 Entwurf eines affinen zeitdiskreten Zustandsraummodells

Die Modellierung des dynamischen Verhaltens der PSM erfolgt als affines zeitdiskretes Modell. Die Konvexität der Gütefunktion ist für die vorgestellte Methode von zentraler Bedeutung und motiviert die Verwendung einer affinen Systemmodellierung.<sup>13</sup>

#### 2.1.1 Affine Approximation der Zustandsdynamik und der Ausgangsgleichung

Zur übersichtlichen Darstellung der nächsten Schritte werden [SSD<sup>+</sup>03] folgend die Selbstinduktivitäten  $l_{dd}$  und  $l_{qq}$  und Kreuzinduktivitäten  $l_{dq}$  und  $l_{qd}$  eingeführt:

$$l_{dd} := \frac{d\psi_d}{di_d}, \quad l_{qq} := \frac{d\psi_q}{di_q}, \quad l_{dq} := \frac{d\psi_d}{di_q}, \quad l_{qd} := \frac{d\psi_q}{di_d}, \quad (2.1)$$

wobei  $l_{dq} = l_{qd}$  gilt ([RWD13]). Die zeitliche Differentiation der Flüsse kann durch die Selbst- und Kreuzinduktivität sowie die Stromableitung ausgedrückt werden:

$$\dot{\psi}_d = l_{dd}\dot{i}_d + l_{dq}\dot{i}_q, \quad (2.2)$$

$$\dot{\psi}_q = l_{qd}\dot{i}_d + l_{qq}\dot{i}_q. \quad (2.3)$$

---

<sup>13</sup> Die Affinität des Modells ist ein hinreichendes Kriterium für den Erhalt der Konvexität der Gütefunktion, in welche die Modellgleichung im weiteren Verlauf in Kapitel 3 eingesetzt wird.

Diese Form der Beschreibung ist für hoch ausgenutzte Maschinen bereits in der zitierten Quelle [SSD<sup>+</sup>03] dargestellt und findet bereits in der Modellierung (z. B. [RWD13, PB15, EG18a]) und dem Reglerentwurf (z. B. [RGD14, RBGD15, DRB16, FKK16, LH17]) Verwendung. Die weiterführenden Formulierungen sind Beiträge dieser Arbeit. Sie übertragen die bestehenden detaillierten Modellierungsansätze auf eine Form, die sich für die Umsetzung des MPC in dieser Arbeit eignet. Hierfür werden die Gleichungen (2.1) bis (2.3) in die Spannungsgleichungen (1.5) und (1.6) eingesetzt. Durch jeweiliges Auflösen nach den Stromableitungen und gegenseitiges Einsetzen sowie der Berücksichtigung der Drehmomentgleichung (1.7) entsteht das System in nichtlinearer Zustandsform:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{qq}(u_d - r_S i_d + \omega_{el} \psi_q) - l_{dq}(u_q - r_S i_q - \omega_{el} \psi_d) \\ l_{dd} l_{qq} + l_{dq} l_{qd} \\ l_{dd}(u_q - r_S i_q - \omega_{el} \psi_d) - l_{qd}(u_d - r_S i_d + \omega_{el} \psi_q) \\ l_{dd} l_{qq} + l_{dq} l_{qd} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u})}, \quad (2.4)$$

$$y = \underbrace{\psi_d i_q - \psi_q i_d}_{=: f_y(\mathbf{x})}. \quad (2.5)$$

Zu beachten ist hierbei, dass alle Induktivitäten laut den Definitionen in Gleichung (2.1) sowie die Flüsse Funktionen der Ströme sind. Die Ströme bilden den Zustandsvektor und die Spannungen den Eingangsvektor der Zustandsraumdarstellung:

$$\mathbf{x} = [i_d \quad i_q]^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u} = [u_d \quad u_q]^T \in \mathbb{R}^2. \quad (2.6)$$

Die Wahl der Ströme als Zustände für die Erstellung von Zustandsraummodellen unter Berücksichtigung von Flusstabellen ist ein zentraler Ansatz dieser Arbeit. Wie sich in Kapitel 3 zeigt, erhält diese Wahl der Zustände bei der Erstellung der Gütefunktion unter Berücksichtigung der ohmschen Verluste bestimmte Konvexitätseigenschaften. Die Ausgangsgröße  $y$  ist das Drehmoment, wobei Gleichung (1.7) von den Umformungen unberührt bleibt. Das primäre Regelziel ist hier die Einstellung eines Solldrehmoments. Das Drehmoment hängt über die Ausgangsgleichung direkt von den Strömen der Maschine ab und kann daher maximal die gleiche Änderungsrate wie die Ströme aufweisen. In [Bor14] ist für einen elektrischen Radantrieb eines Elektrofahrzeugs die Zeitkonstante durch Auswertung von Spannungssprüngen berechnet. Zwischen der mechanischen und elektrischen Zeitkonstante liegt dort ein Faktor von 250. Die Betrachtung des Verhaltens bei Drehzahländerungen ist nicht notwendig, da diese Vorgänge 250-mal langsamer sind als die auftretenden Strom- und Drehmomentänderungen, welche hier im Detail analysiert werden. Die Drehzahl wird daher in der gesamten Arbeit als konstant betrachtet und ist kein Zustand des Systems. Dies ist gerechtfertigt durch den in vielen Anwendungen vorliegenden Größenunterschied der mechanischen und elektrischen Zeitkonstante. Um eine affine Systembeschreibung  $(\tilde{\mathbf{f}}_x, \tilde{\mathbf{f}}_y)$  an einem zeitvarianten Arbeitspunkt

$$\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{x}_{AP}^T \quad \mathbf{u}_{AP}^T]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (2.7)$$

zu erhalten, wird für die Systemgleichung eine mehrdimensionale Taylorreihe entwickelt. Hierfür wird die Nomenklatur aus Definition A.1 im Anhang A.2.1 verwendet. Zuvor werden mit dem Vektor  $z = [\mathbf{x}^\top \quad \mathbf{u}^\top]^\top$  die Argumente der Systemgleichungen  $\mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  vektoriell zusammengefasst. Der Entwicklungspunkt  $\xi$  ist zunächst ein beliebiger Ort im Kreuzprodukt aus Zustandsraum und Eingangsraum<sup>14</sup>. Für eine affine Beschreibung der Zustandsdynamik muss die Taylorreihe mit der Ordnung eins gewählt werden und der Rest  $R$  wird vernachlässigt. Somit ergibt sich die Taylor-Approximation erster Ordnung der Funktion  $\mathbf{f}_x(z)$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{f}_x, z, \xi, 1) &= \mathbf{f}_x(z) \Big|_{z=\xi} + \langle (z - \xi), \nabla \rangle \mathbf{f}_x z \Big|_{z=\xi} \\ &= \mathbf{f}_x(z) \Big|_{z=\xi} + \mathcal{J}(\mathbf{f}_x, z, \xi)(z - \xi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei durch

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}_x, z, \xi) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{x1}}{\partial i_d}(\xi) & \frac{\partial f_{x1}}{\partial i_q}(\xi) & \frac{\partial f_{x1}}{\partial u_d}(\xi) & \frac{\partial f_{x1}}{\partial u_q}(\xi) \\ \frac{\partial f_{x2}}{\partial i_d}(\xi) & \frac{\partial f_{x2}}{\partial i_q}(\xi) & \frac{\partial f_{x2}}{\partial u_d}(\xi) & \frac{\partial f_{x2}}{\partial u_q}(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

die Jacobi Matrix der Funktion  $\mathbf{f}_x(z)$  an der Stelle  $\xi$  bestimmt ist. Dieses Vorgehen unterscheidet sich von einer klassischen Linearisierung. Bei dieser wird auf eine Systembeschreibung durch neue Größen, die eine Abweichung von einem zeitinvarianten Arbeitspunkt repräsentieren, gewechselt. Es wird vorausgesetzt, dass dieser zeitinvariante Arbeitspunkt eine Ruhelage ist. Diese Voraussetzung wird hier nicht erfüllt. Die vorgestellte Vorgehensweise ist als eine Näherung der Gleichung (2.4) anzusehen und somit eine affine Approximation der Zustandsänderung im aktuellen Systemzustand, wenn dieser für den zeitvarianten Arbeitspunkt eingesetzt wird. Die Fehlerfunktion der Approximation ist für  $z = \xi$  gleich null. Es wird hier zunächst angenommen, dass der durch das Modell zu präzisierende Zustand ausreichend nahe am Entwicklungspunkt liegt. Diese Annahme ist für die Modellierung nichtlinearer Systeme in MPC-Ansätzen nicht untypisch ([HP10]). Ob diese zulässig ist, ist von der jeweiligen Anwendung abhängig. Die Zulässigkeit für die vorliegende Anwendung ist in der Literatur bestätigt ([GOB15, PB15]<sup>15</sup>) und wird zusätzlich in Abschnitt 5.2 durch Simulation für den vorliegenden Fall untersucht und bestätigt. Analoges Vorgehen erfolgt für die Ausgangsgleichung (2.5) für  $f_y$ . Zur Darstellung in der üblichen Zustandsform wird das Ergebnis nach Zuständen, Eingängen und einem affinen Anteil umgestellt:

<sup>14</sup> Ebenfalls zu einer beliebigen Zeit  $t$ , dies ist durch die vereinfachte Notation nicht zu sehen.

<sup>15</sup> Die Veröffentlichung [PB15] betrachtet Maschinen mit Vergleichbarem Sättigungsverhalten wie in dieser Arbeit. Sie kommt zu dem Ergebnis, dass für die Modellierung des lokalen Verhaltens lineare Modellierung der Induktivitäten ausreichend sind.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_x(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{T}(\mathbf{f}_x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, 1) \\ &= \underbrace{\mathcal{J}(\mathbf{f}_x, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}})}_{=: \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{x} + \underbrace{\mathcal{J}(\mathbf{f}_x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\text{AP}})}_{=: \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{f}_x(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{J}(\mathbf{f}_x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}}_{=: \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})},\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_y(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}}) &= \mathcal{T}(\mathbf{f}_y, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}}, 1) \\ &= \underbrace{\mathcal{J}(\mathbf{f}_y, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}})}_{=: \mathbf{C}(\mathbf{x}_{\text{AP}})} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{f}_y(\mathbf{x}_{\text{AP}}) - \mathcal{J}(\mathbf{f}_y, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}}) \mathbf{x}_{\text{AP}}}_{=: \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{AP}})}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Die Berechnung dieser Matrizen erfolgt mit einem Computeralgebrasystem. Zur einheitlichen Darstellung sind alle Matrizen mit Großbuchstaben bezeichnet, ungeachtet der Tatsache, dass  $\mathbf{G}$  eine  $2 \times 1$ - und  $\mathbf{F}$  eine  $1 \times 1$ -Matrix ist. Die maximale Anzahl der Rechenoperationen zur Berechnung der jeweiligen Elemente ist in Tabelle 2.1 aufgeführt. Eine weitere Vereinfachung der

	Additionen	Multiplikationen	Divisionen
$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$	33	77	2
$\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})$	3	2	2
$\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})$	50	153	2
$\mathbf{C}(\mathbf{x}_{\text{AP}})$	2	2	0
$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{AP}})$	6	3	0

**Tabelle 2.1:** Maximale Anzahl der Rechenoperationen je Element zur Berechnung der Matrizen des Systemmodells

Berechnungen wird hier nicht verfolgt. Besonders für die rechenintensiven Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{G}$  kann eine Faktorisierung nach den Elementen des Arbeitspunktvektors  $\boldsymbol{\xi}$  und der Drehzahl  $\omega_{\text{el}}$  erfolgen. Diese Vorfaktoren sind dann unabhängig vom Arbeitspunkt und können im Vorfeld bestimmt werden. Die Entscheidung für solche weiterführenden Schritte hängt von den Eigenschaften der Hardware ab und ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Abschließend ergibt sich für einen festen Entwicklungspunkt  $\boldsymbol{\xi}$  das affine Zustandsraummodell der PSM

$$\tilde{\mathbf{f}}_x(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.12)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_y(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{AP}}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}_{\text{AP}}) \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{AP}}) \quad (2.13)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x}_{\text{AP}}) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  und dem Skalar  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{AP}}) \in \mathbb{R}$ . Der Entwicklungspunkt wird im MPC immer durch den aktuellen Zustand bestimmt.<sup>16</sup> Im MPC findet daher in jeder Taktperiode die Modellerstellung durch affine Approximation des nichtlinearen Zustandsraummodells in den Gleichungen (2.4) und (2.5) statt. So wird gewährleistet, dass die Modellerstellung innerhalb ihrer strukturellen Vorgabe als affines System die beste lokale Approximation liefert.

<sup>16</sup> Genauere Erläuterungen hierzu sind in Abschnitt 5.3 zu finden.

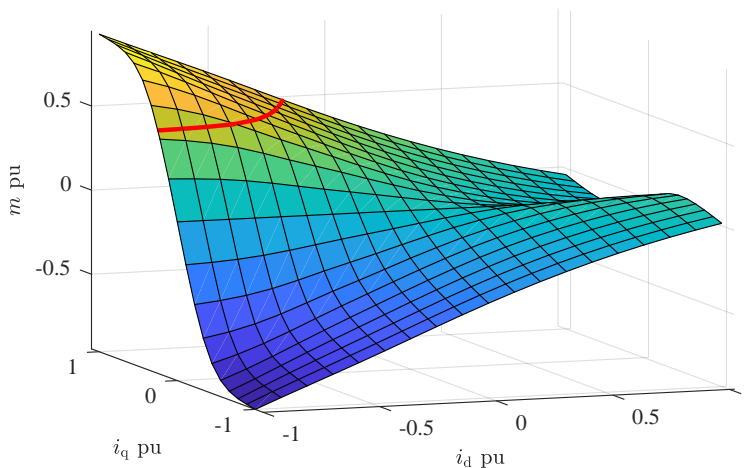


## 2.1.2 Approximation der Ausgangsgleichung zweiter Ordnung

Im Unterschied zur Systemdynamik hat die affine Approximation der Ausgangsgleichung erkennbare Auswirkungen auf die Regelgüte. Diese ergeben sich aus der affinen Approximation der Drehmomentgleichung in Szenarien großer Abweichung zwischen Soll- und Istwert im Drehmoment. Auslöser ist die Abweichung zwischen  $f_y(\mathbf{x})$  und  $\tilde{f}_y(\mathbf{x})$  bei steigender Entfernung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}_{AP}$ . Die Menge der Zustände, die das primäre Regelziel erreichen, werden als primäre Zielzustandsmenge bezeichnet. Es sind folglich alle Zustände, die unter Verwendung der Ausgangsgleichung das aktuelle Solldrehmoment erzeugen. Wird die Drehmomentgleichung (1.3) für ein Maschinenmodell mit linearem Eisenkreis ohne Sättigung und Kreuzverkopplung betrachtet, nimmt die primäre Zustandsmenge im Zustandsraum eine hyperbolische Form an. Sie wird daher als Drehmomenthyperbel ([Ric15, Gem15]) bezeichnet. Für nichtlineare Maschinenmodelle entstehen sehr ähnliche Kurven, dies veranschaulicht das folgende Beispiel.

### Beispiel 2.1:

In Abbildung 2.1 ist die Ausgangsgleichung  $f_y(\mathbf{x}) = \psi_d i_q - \psi_q i_d$  als Fläche über dem Zustandsraum beispielhaft für eine PSM (Maschinendaten siehe Unterabschnitt 5.1.1) veranschaulicht. Zusätzlich ist in Rot eine Drehmomenthyperbel für  $m = 0,5 \text{ pu} = f_y(\mathbf{x})$  eingezeichnet.



**Abbildung 2.1:** Ausgangsgleichung  $f_y(\mathbf{x}) = \psi_d i_q - \psi_q i_d$  über dem Zustandsraum mit einer Drehmomenthyperbel für  $m = 0,5 \text{ pu}$

Um Hyperbeln als primäre Zielzustandsbeschreibung zu erhalten, sind quadratische Approximationen für die Ausgangsgleichung nötig. Um diese zu erhalten kann die Ausgangsgleichung

(2.5) durch eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung  $T(f_y, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{AP}, 2)$  approximiert werden. Diese Funktion nimmt die Form

$$\tilde{f}_y(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{AP}) = \mathcal{T}(f_y, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{AP}, 2) \quad (2.14)$$

$$= \mathbf{x}^\top \mathbf{C}_q(\mathbf{x}_{AP}) \mathbf{x} + \mathbf{C}_l^\top(\mathbf{x}_{AP}) \mathbf{x} + C_k(\mathbf{x}_{AP}) \quad (2.15)$$

an, in der  $\mathbf{C}_q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  den quadratischen,  $\mathbf{C}_l \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  den linearen und  $C_k \in \mathbb{R}$  den konstanten Anteil in Bezug auf  $\mathbf{x}$  beschreibt. Hier führt die dreifache Differentiation der Flusskennfelder zu Problemen. Besonders bei messtechnisch erfassten Kennfeldern ergibt dieses Vorgehen nicht verwendbare Näherungen. Eine Möglichkeit dies zu umgehen wäre eine Approximation durch Regression anhand eines Drehmomentkennfeldes, welches sich unmittelbar aus der Drehmomentgleichung (1.3) und den Flusskennfeldern bestimmen lässt (siehe Abbildung 2.1 für ein Beispiel). Weil die Regression zur Laufzeit des Reglers erfolgen müsste, wird hier eine modifizierte analytische Approximation vorgeschlagen. Sie geht von der quadratischen Form in Gleichung (2.15) aus. Es wird nicht wie bei der Entwicklung des Taylorpolynoms das Ziel verfolgt möglichst viele Ableitungen lokal zur Übereinstimmung zu bringen. Die Idee ist physikalische Kenntnisse über die Drehmenthyperbeln einzubringen, um diese im relevanten Bereich des Zustandsraumes anzunähern. Unter der Annahme der Form in Gleichung (2.15) ergeben sich sechs freie Parameter. Die Nebendiagonalelemente von  $\mathbf{C}_q$  werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit als gleich angenommen<sup>17</sup>. Folglich können sechs Gleichungen als Bedingungen an die Approximation gestellt werden. Die Übereinstimmung im Entwicklungspunkt in nullter und erster Ableitung ist eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz des MPC. Stellt sich im MPC ein stationärer Zustand ein, ist dieser ebenfalls der Entwicklungspunkt, da dieser durch den aktuellen Zustand festgelegt ist. Entspricht die Ausgangsgleichung des Prädiktionsmodells im Entwicklungspunkt nicht der Ausgangsgleichung (2.5), kann durch den MPC nicht die im ursprünglichen Modell gegebene Drehmomentgenauigkeit erreicht werden. Damit sich dieser Zustand stationär einstellen kann, muss ebenfalls die erste Ableitung übereinstimmen. Dies begründet sich in der hier vorgeschlagenen Methode zum Entwurf der Gütefunktion in Kapitel 3. Die Ursache kann anschaulich mit dem MMPA-Verfahren erklärt werden. Beim MMPA-Verfahren wird der d-Stromsollwert so gewählt, dass das geforderte Drehmoment unter Ausnutzung der Reluktanz mit dem kleinsten Strombetrag erreicht wird ([Sch09, Kap. 16.7.1]). Für einen Betriebspunkt nach dem MMPA-Verfahren müssen die Tangenten an die Drehmenthyperbel und den Kreis, dessen Radius der aktuelle Stromraumzeiger ist, übereinstimmen. Dann wird das Drehmoment mit minimaler Leistung bezüglich der ohmschen Verlustleistung erzeugt. Damit dieser Punkt durch den MPC mit der Genauigkeit des ursprünglichen Modells erreicht werden kann, muss folglich die approximierte Ausgangsgleichung  $\tilde{f}_y$  in der ersten Ableitung mit der Drehmenthyperbel  $f_y$  übereinstimmen. Es verbleiben drei Freiheitsgrade. Aus der Betrachtung der Ausgangsgleichung (2.5) über dem

<sup>17</sup> Jede nicht symmetrische Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat ein symmetrisches Pendant  $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sodass gilt:  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{x}$  ([ZF92, vgl. Kap. 11.1]).

Zustandsraum entsteht die Drehmomenthyperbel (genauer der Hyperbelast) für ein bestimmtes Drehmoment durch einen horizontalen Schnitt. Die Drehmomenthyperbel entspricht dem Hyperbelast einer Höhenlinie für positive q-Ströme. Für negative q-Ströme entsteht ebenfalls ein Hyperbelast, in dem das gleiche Drehmoment erzeugt wird. Dieser Betriebspunkt ist in der Praxis nicht relevant, daher wird dieser hier nicht als Zielzustandsmenge betrachtet.

Um die Form der Hyperbel vorzugeben, werden hier zwei zusätzliche Bedingungen vorgeschlagen. Die erste ist die Lage des Sattelpunktes der Ausgangsgleichung  $f_y(\mathbf{x})$  über dem Zustandsraum, dieser entspricht dem Mittelpunkt der Drehmomenthyperbeln. Für die Formulierung als Gleichung werden zunächst unter Vernachlässigung der Entwicklungspunktabhängigkeit die in Gleichung (2.15) verwendeten Matrizen aufgeschlüsselt:

$$\tilde{f}_y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{C}_q \mathbf{x} + \mathbf{C}_1^\top \mathbf{x} + C_k \quad (2.16)$$

$$= \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} c_{q1,1} & \frac{1}{2}c_{q1,2} \\ \frac{1}{2}c_{q1,2} & c_{q2,2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \mathbf{x} + C_k. \quad (2.17)$$

Die Gleichung für den Mittelpunkt der Hyperbel  $\mathbf{x}_M$  ergibt sich nach [BSMM05, Kap. 3.5.2.9] zu

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{c_{q1,1}c_{q2,2} - \frac{1}{4}c_{q1,2}^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_{q1,2}c_{12} - c_{q2,2}c_{11} \\ \frac{1}{2}c_{q1,2}c_{11} - c_{q1,1}c_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Die zweite Bedingung ist eine waagrechte Asymptote der Hyperbel. Diese Annahme ist physikalisch motiviert. Aufgrund der Feldorientierung kommt es bei  $i_q = 0$  zu einer Feldschwächung oder Feldverstärkung des magnetischen Flusses des Permanentmagneten, ohne dass dabei ein Drehmoment entstehen kann. Somit ist ausgeschlossen, dass eine Hyperbel die d-Achse schneidet. Zur Bestimmung der Asymptoten wird Gleichung (2.15) als Funktion von  $x_1$  betrachtet. Die Ergebnisfunktion  $x_2(x_1)$  nähert sich im Unendlichen an die Asymptoten der Hyperbel an, daher berechnet sich die Steigung  $k_A$  durch:

$$k_A = \frac{\lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2(x_1)}{x_1} = \frac{-c_{q1,2} \pm \sqrt{c_{q1,2}^2 - 4c_{q1,1}c_{q2,2}}}{2c_{q1,2}^2}. \quad (2.19)$$

Zusammenfassend ergibt sich ein Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen für

- die waagrechte Asymptote  $k_A = 0$  nach Gleichung (2.19),
- die Definition des Mittelpunktes  $\mathbf{x}_M$  nach Gleichung (2.18),
- die Übereinstimmung im Entwicklungspunkt  $\tilde{f}_y(\mathbf{x}_{AP}, \mathbf{x}_{AP}) = f_y(\mathbf{x}_{AP}, \mathbf{x}_{AP})$  und
- die Übereinstimmung der Ableitungen im Entwicklungspunkt  $\frac{d\tilde{f}_y(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{AP})}{d\mathbf{x}} = \frac{df_y(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{AP})}{d\mathbf{x}}$ .

Diese sechs Gleichungen (skalar gezählt) definieren die sechs Parameter der quadratischen Gleichung nach Gleichung (2.17). Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die analytischen Ausdrücke für die Matrixelemente aus Gleichung (2.17) mit den Berechnungskosten nach Tabelle 2.2. Verglichen mit den Berechnungskosten für  $C(\mathbf{x}_{AP})$  und  $F(\mathbf{x}_{AP})$  in Tabel-

	Additionen	Multiplikationen	Divisionen
$c_{q1,1}$	20	33	1
$c_{q1,2}$	20	33	1
$c_{q3,3}$	26	56	1
$c_{11}$	32	82	1
$c_{12}$	32	73	1
$c_k$	66	208	1

**Tabelle 2.2:** Anzahl der Rechenoperationen zur Berechnung des jeweiligen Elements der Ausgangsgleichung (2.17)

le 2.1 sind diese aufgrund der höheren Anzahl an Parametern (drei gegenüber sechs) und der höheren Anzahl an Rechenoperationen wesentlich höher. Es bestehen die gleichen Optimierungspotentiale wie bereits zuvor bei der affinen Approximation. Durch die hier vorgestellte Art der quadratischen Approximation ist eine schnelle analytische Näherung für die Ausgangsgleichung gefunden, welche unter Ausnutzung physikalischer Rahmenbedingung die direkte Approximation aus gegebenen Flusskennfeldern ermöglicht.

### 2.1.3 Diskretisierung des kontinuierlichen Zustandsraummodells

In diesem Anwendungsfeld sind Eulerapproximationen für hohe Drehzahlen nicht ausreichend. Dies ist für das vorliegende Anwendungsbeispiel durch [GOB15, Com11, VB13] sowie [Mey10, Kap. 6.3] und Untersuchungen zur hier verwendeten Maschine in Abschnitt 5.2 belegt. Eine exakte Diskretisierung ist trotz der analytisch vorliegenden Form der Funktion  $\tilde{f}_x(z, \xi)$  nicht zielführend. Über den Umweg der Laplace-Transformation lässt sich die Lösung der Differentialgleichung nicht in handhabbarem Umfang darstellen. Die exakte Diskretisierung für kontinuierliche affine Zustandsraumdarstellungen basiert auf der Matrixexponentialfunktion, die durch eine unendliche Taylorreihe dargestellt werden kann. Wird diese Reihe nach einer Ordnung  $n_d \geq 1$  abgebrochen, entsteht eine approximative Diskretisierung. Diese ist für lineare Systeme identisch mit der Lösung der Differentialgleichung als Anfangswertaufgabe mit einer Picard-Iteration der Ordnung  $n_d$  ([RMPG07]). Die Matrizen des diskreten Systems bestimmen sich unter Vernachlässigung der Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt für die Abtastzeit  $T_A$  zu

$$\mathbf{A}_d = \sum_{v=0}^{n_d} \frac{(\mathbf{A}T_A)^v}{v!}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{B}_d = \sum_{v=1}^{n_d} \mathbf{A}^{v-1} \frac{T_A^v}{v!} \mathbf{B}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{G}_d = \sum_{v=1}^{n_d} \mathbf{A}^{v-1} \frac{T_A^v}{v!} \mathbf{G}. \quad (2.22)$$

Ebenfalls gilt zu berücksichtigen, dass die Matrizen von der elektrischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{el}$  abhängen. Das vorgestellte Modell wird demnach in jeder Taktperiode des Reglers mit den aktuellen Werte von  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  und  $\omega_{el}$  aktualisiert. Eine Diskussion und die Bestimmung der notwendigen Diskretisierungsordnung  $n_d$  für den vorliegenden Anwendungsfall erfolgt durch die Auswertung der Simulation in Abschnitt 5.2. Als Ergebnis dieses Kapitels steht das affine diskrete Zustandsraummodell der PSM:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d(\mathbf{z}(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d(\mathbf{z}(k)) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}_d(\mathbf{z}(k)). \quad (2.23)$$

Da es sich bei der Ausgangsgleichung nicht um eine Differentialgleichung handelt, bleibt diese von der Diskretisierung unberührt. Es ergibt sich die Ausgangsgleichung in affiner Form

$$y_a(k) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{x}(k) + F(\mathbf{x}(k)) \quad (2.24)$$

und in quadratischer Form

$$y_q(k) = \mathbf{x}(k)^\top \mathbf{C}_q(\mathbf{x}(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_1(\mathbf{x}(k))^\top \mathbf{x}(k) + C_k(\mathbf{x}(k)). \quad (2.25)$$

Hierbei sind die Matrizelemente analytische Funktionen der Flusskennfelder sowie des Zustandes und des Eingangs vom vorherigen Schritt.

## 2.2 Entwurf des Prädiktionsmodells

In diesem Abschnitt wird ausgehend vom zeitdiskreten Zustandsraummodell der PSM aus dem vorigen Abschnitt ein Prädiktionsmodell für einen MPC gebildet. Die Zustandstrajektorie des Systems über dem Prädiktionshorizont kann durch einen Vektor aus konsekutiven Zuständen abgebildet werden. Dies ermöglicht in der Gütefunktion des MPC mit diesem Vektor das Verhalten der Strecke über dem Prädiktionshorizont zu bewerten. Die Länge des Prädiktionshorizonts  $n_h$  ist ein zentraler Parameter eines MPC. Ist er zu lang, wird der Rechenaufwand der Optimierung insgesamt erhöht und die Erreichung der notwendigen numerischen Genauigkeit durch den Optimierungsalgorithmus erschwert ([GP17, Kap. 12.4]). Ein zu kurz gewählter

Prädiktionshorizont kann jedoch zur Instabilität des Regelkreises führen ([GP17, Kap. 6.5]). Die Wahl von  $n_h$  erfolgt für den vorliegenden Anwendungsfall durch die Auswertung der Simulation in Unterabschnitt 5.5.3. Es werden alle Zustände innerhalb des Prädiktionshorizonts in einen Vektor zusammengefasst. Analog wird mit den Eingangs- und Ausgangsgrößen verfahren und es ergibt sich

$$\mathbf{x}_s(k) := [\mathbf{x}(k)^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}(k + n_h - 1)^\top]^\top, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}_s(k) := [\mathbf{u}(k)^\top \quad \dots \quad \mathbf{u}(k + n_h - 1)^\top]^\top, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y}_s(k) := [\mathbf{y}(k)^\top \quad \dots \quad \mathbf{y}(k + n_h - 1)^\top]^\top. \quad (2.28)$$

Da sich bei diesem Vorgang die Zustände des Prädiktionshorizonts in einem Vektor stapeln, erhalten alle Größen dieser Art den Index  $s$ . Werden die diskreten Zustandsgleichungen für die Einträge des Vektors  $\mathbf{x}_s(k)$  übereinander geschrieben, hängt jede Zeile vom Vorgängerzustand ab. Dieser wird jeweils rekursiv mit dessen Zustandsgleichung ersetzt bis jede Zeile nur noch vom Startzustand  $\mathbf{x}(k)$  abhängt. Die Idee dieses Vorgehens verdeutlicht sich anschaulich durch folgende Betrachtung. Ein diskreter Systemzustand  $\mathbf{x}(k)$  ist durch seinen Vorgängerzustand  $\mathbf{x}(k - 1)$  und den Systemeingang  $\mathbf{u}(k - 1)$  zu diesem Zeitschritt eindeutig bestimmt. Diesen Zusammenhang stellt die Systemgleichung her. Mit dieser Überlegung kann der Endzustand des Horizonts  $\mathbf{x}(k + n_h)$  sukzessiv zurückverfolgt werden auf den Ausgangszustand  $\mathbf{x}(k - 1)$  und die Steuerfolge  $\mathbf{u}_s(k)$ . Das Ergebnis ist

$$\mathbf{x}_s(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_d^{n_h} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_s} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_d^{n_h-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^{n_h-2} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{B}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_s} \mathbf{u}_s(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_d \\ \mathbf{A}_d \mathbf{G}_d \\ \vdots \\ \mathbf{A}_d^{n_h-1} \mathbf{G}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_s}. \quad (2.29)$$

Die Ausgangsgleichung in affiner Form berechnet sich durch

$$\mathbf{y}_{as}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_s} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_s} \quad (2.30)$$

und die quadratischer Form durch

$$\mathbf{y}_{\text{qs}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k)^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(k)^\top \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_q & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_q & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{C}_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\text{qs}}} \mathbf{x}_s(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_l \\ \vdots \\ \mathbf{C}_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\text{ls}}} \mathbf{x}_s(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\text{ks}}}. \quad (2.31)$$

## 2.3 Zusammenfassung

Ausgangspunkt für die Modellierung sind die nichtlinearen Differentialgleichungen der PSM, die zwei Flussfunktionen für den Zusammenhang zwischen Strom und Fluss in der Maschine enthalten. Diese werden in einem ersten Schritt durch eine Linearisierung mit einer Taylor-Reihe erster Ordnung an einem Entwicklungspunkt in ein affines Zustandsraummodell überführt. Das affine Zustandsraummodell wird mithilfe einer Picard-Iteration mit einer noch zu wählenden Diskretisierungsordnung in ein zeitdiskretes affines Modell überführt. Für die Ausgangsgleichung wird eine zweite quadratische Form vorgeschlagen, die nicht durch eine Taylorreihe zweiter Ordnung berechnet wird sondern durch geometrisch motivierte Bedingungen. Im Anschluss wird daraus das Prädiktionsmodell für den MPC erstellt. Die Matrizen des Prädiktionsmodells hängen vom Entwicklungspunkt der Linearisierung und der elektrischen Winkelgeschwindigkeit ab. Der Entwicklungspunkt wird stets durch den aktuellen Zustand und Eingang bestimmt, daher werden in jedem Taktzyklus des MPC die Matrizen des Prädiktionsmodells neu berechnet.

Das hier vorgestellte Prädiktionsmodell der PSM für MPC mit der affinen Form der Ausgangsgleichung wurde bereits auf der Konferenz [SHK18a] vorgestellt und in [SHK19] veröffentlicht.

Die in diesem Kapitel vorgeschlagene Modellierung ist auf nichtlineare Systeme anwendbar, deren Zustandsraumgleichungen Lipschitz-stetig bezüglich der Ein- und Ausgänge sind. Das ist die Voraussetzung zur Anwendung der Linearisierung mit Taylor und der anschließenden Picard-Iteration zur Diskretisierung. Es werden Anpassungen für die Anwendung vorgenommen, um die Modellierung zu verbessern. Diese Idee kann auf andere Anwendungen übertragen werden. Hier sei besonders die Approximation der Ausgangsgleichung hervorgehoben. Sie ermöglicht durch physikalisch motivierte Randbedingungen an die Modellierung eine Approximation zweiter Ordnung, für welche die nichtlineare Ausgangsgleichung nur einfach differenziert werden muss.





# 3 Unbeschränkte lexikographische MPC-Optimierungsprobleme für eine PSM

In diesem Kapitel wird ein neues Verfahren für priorisierte Regelziele in MPC-Optimierungsproblemen vorgestellt und auf die PSM angewendet. Nach einleitenden Grundlagen in Abschnitt 3.1 wird in Abschnitt 3.2 das neue Verfahren zur Vereinigung von priorisierten Regelzielen zu einer Gütefunktion vorgestellt. In Abschnitt 3.3 wird diese Idee auf die Anwendung in MPC-Optimierungsproblemen übertragen und die notwendigen Voraussetzungen werden diskutiert. Unter der Annahme eines unbeschränkten einschrittigen ( $n_h = 1$ ) oder stationären mehrschrittigen ( $n_h > 1$ ) MPC-Optimierungsproblems sind die Zusammenhänge zur lexikographischen Optimierung vollständig bewiesen. Das Verfahren zur Vereinigung der Regelziele stellt den Kern dieser Arbeit dar und ist durch den entworfenen Formalismus direkt auf andere Anwendungen übertragbar. In Abschnitt 3.4 werden zunächst die Regelziele für die Anwendung auf die PSM formalisiert und anschließend nach der vorgestellten neuen Methode zu einer Gütefunktion vereint.

## 3.1 Einführung und mathematische Grundlagen zur multikriteriellen Optimierung und deren Anwendung unter regelungstechnischen Gesichtspunkten

Grundlage der lexikographischen Optimierung sind Optimierungsprobleme mit unterschiedlichen Zielen. Sie werden als multikriterielle Optimierungsprobleme (MOP) bezeichnet, da nach mehreren Kriterien optimiert wird. Dabei werden unterschiedliche Gütefunktionen *nebeneinander* optimiert. Wie dieses *nebeneinander* zu verstehen ist, ist zusätzlich zu den einzelnen Gütefunktionen Teil der Definition eines MOP. Die Anfänge der multikriteriellen Optimierung gehen zurück auf geordnete Mengen, wie sie 1887 in der Mathematik eingeführt wurden. In den Wirtschaftswissenschaften wurden früh Probleme mit mehreren Spielern betrachtet, die verschiedene Ziele verfolgen. So kam es bereits 1921 zur ersten Anwendung der mathematischen Grundlagen auf praktische Fragestellungen in der Spieltheorie (vgl. [Sta88, S. 2]).

Durch die frühe Verwendung in den Wirtschaftswissenschaften ist dieses Thema weiterhin stark wirtschaftswissenschaftlich geprägt. Multikriterielle Optimierungsprobleme sind ebenfalls in der Regelungstechnik verbreitet. Der Kompromiss zwischen hoher Dynamik des Regel-

kreises und geringer Schwingneigung, um nur ein Beispiel zu nennen, könnte als eben solches interpretiert werden. In der Regelungstechnik werden diese Kompromisse oft nicht im Voraus festgelegt, sondern anwendungsnah *eingestellt*. Obwohl Entwurfsmethoden in der Regelungstechnik die Formalisierung des Regelziels in einer Gütefunktion voraussetzen, wird dies selten formal als MOP spezifiziert.

Ist ein einzelnes Regelziel in einer Gütefunktion quantifiziert, ist der Begriff *optimal* eindeutig: Er bedeutet die Maximierung bzw. Minimierung der Gütefunktion. Bei mehreren Zielen ist der Begriff *optimal* nicht eindeutig. Meist werden Gewichtungsfaktoren eingeführt, um mehrere skalar quantifizierte Ziele durch eine gewichtete Summe auf ein skalares Maß abzubilden. Die Gewichtungsfaktoren werden im Anschluss abhängig vom Regelergebnis eingestellt. Der Begriff *Optimum* ist in diesen Ansätzen zunächst nicht eindeutig definiert, denn die Lage der Lösung des Optimierungsproblems wird im Nachgang zum Reglerentwurf durch Erprobung verschiedener Gewichtungsfaktoren eingestellt.

### 3.1.1 Definition des multikriteriellen Optimierungsproblems

Im Gegensatz dazu soll hier der Begriff Optimum zunächst formal definiert werden. Diese Herangehensweise ist für viele Gebiete in der Regelungstechnik, wie zum Beispiel die Antriebsregelung, eine neue Sichtweise und stellt eine Formalisierung der bisherigen Vorgehensweise dar. Hierfür wird das MOP allgemein unter Beschränkungen eingeführt, um im Anschluss das lexikographische Optimierungsproblem (LOP) einführen zu können. Dies erfolgt mit kleinen Änderungen nach [Ehr05, S. 17 f.]:

#### Definition 3.1 (Multikriterielles Optimierungsproblem MOP)

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L} \\ \text{typ}, \vartheta}} \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$$

ist ein multikriterielles Optimierungsproblem (MOP) mit folgenden Elementen:

- dem zulässigen Lösungsraum  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^{n_L}$
- dem Zielraum  $\mathbb{R}^{n_J}$
- dem Gütefunktionsvektor  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [J_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})]^T : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^{n_J}$  mit  $n_J > 1$
- der Modellabbildung  $\vartheta(\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})) : \mathbb{R}^{n_J} \rightarrow \mathbb{R}^P$
- der geordneten Menge  $(\mathbb{R}^P, \leq_{\text{typ}})$

Es ist durch die Kurzschreibweise  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / \vartheta / (\mathbb{R}^P, \leq_{\text{typ}})$  vollständig definiert.

Das  $\leq_{\text{typ}}$  steht für eine zu definierende Ordnungsrelation der Art „typ“. Der Gütefunktionsvektor stellt bei dieser Form der Darstellung noch keinen Bezug zwischen den verschiedenen skalaren Gütefunktionen  $J_1$  bis  $J_{n_J}$  her. Dies geschieht durch die Modellabbildung  $\vartheta$ , welche vom Zielraum in die geordnete Menge abbildet, um dort die Ordnungsrelation anwenden zu können. Durch die Modellabbildung  $\vartheta$  können die einzelnen Gütefunktionen umsortiert und gewichtet werden. Vereinfacht gesagt, schafft sie die Möglichkeit den einzelnen Gütefunktionen eine gewünschte *Priorität* oder *Wichtigkeit*, unabhängig von ihrer Reihenfolge oder Größenordnung im Gütefunktionsvektor  $\mathbf{J}$ , zuzuordnen. Die Ordnungsrelation  $\leq_{\text{typ}}$  und die Modellabbildung  $\vartheta$  legen demnach die Klasse des MOP und den Begriff Optimum in diesem Kontext eindeutig fest.

Werden verschiedene Regelziele durch eine gewichtete Summe auf eine skalare Gütefunktion abgebildet, lässt sich dies als ein MOP mit einer Modellabbildung  $\vartheta(\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})) : \mathbb{R}^{n_J} \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen. Als Ordnungsrelation wird die gewöhnliche Ordnungsrelation im  $\mathbb{R}$  verwendet. Die Modellabbildung entspricht der Multiplikation von  $\mathbf{J}$  mit einem Zeilenvektor, der sich aus den Gewichtungsfaktoren zusammensetzt. Durch Einstellen der Gewichtungsfaktoren wird der Begriff Optimum, wie er hier definiert wird, verändert. Die Definition des Regelziels wird durch den Anwender der Methode anhand von Simulation oder Erprobung so angepasst, dass dessen subjektiv unquantifizierten Ziele erfüllt werden. Somit geht ein wesentlicher Vorteil der MPC-Entwurfsverfahren verloren: Die Vermeidung des händischen Einstellens durch den Anwender.

Die Lösung eines MOP ist die formale, eindeutige Definition des Optimums für mehrere Gütefunktionen (vgl. [Ehr05, S. 18]):

**Definition 3.2 (Multikriterielles Optimum  $\boldsymbol{\theta}^{\text{typ}}$ )**

Der Punkt  $\boldsymbol{\theta}^{\text{typ}} \in \mathcal{L}$  heißt Optimum des MOP  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / \vartheta / (\mathbb{R}^P, \leq_{\text{typ}})$  genau dann, wenn

$$\nexists \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L} \setminus \{\boldsymbol{\theta}^{\text{typ}}\} : \vartheta(\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})) \leq_{\text{typ}} \vartheta(\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^{\text{typ}})).$$

Die Definition 3.2 nach [Ehr05] erlaubt nur einem einzigen Punkt des Lösungsraums optimal zu sein, da Definition 3.2 entweder nur für einen oder keinen Punkt erfüllt sein kann, nicht aber für mehrere. Für diese Arbeit ist es notwendig den Begriff des Optimums zu erweitern auf eine optimale Lösungsmenge.

**Definition 3.3 (Multikriteriell optimale Lösungsmenge  $\mathcal{L}^{*\text{typ}}(\cdot, \cdot)$ )**

Ein Punkt  $\theta^{*\text{typ}} \in \mathcal{L}$  ist Teil der multikriteriell optimalen Lösungsmenge  $\mathcal{L}^{*\text{typ}}(\mathbf{J}, \mathcal{X})$  eines MOP  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / \vartheta / (\mathbb{R}^P, \leq_{\text{typ}})$  genau dann, wenn

$$\nexists \theta \in \mathcal{L} \setminus \{\theta^{*\text{typ}}\} : \vartheta(\mathbf{J}(\theta)) <_{\text{typ}} \vartheta(\mathbf{J}(\theta^{*\text{typ}})).$$

Vereinfachend werden die Schreibweisen

$$\theta \text{ liegt im Optimum des MOP} \Leftrightarrow \theta \in \mathcal{L}^{*\text{typ}}(\mathbf{J}, \mathcal{X})$$

verwendet, wenn die Definition des MOP klar aus dem Kontext hervorgeht.

Dafür wird die Relation  $<_{\text{typ}}$  benötigt, die bereits eindeutig aus  $\leq_{\text{typ}}$  hervorgeht.<sup>18</sup> Der Austausch der Relation führt dazu, dass alle gleichwertigen Punkte Teil der Lösungsmenge werden. In Definition 3.2 existiert das Optimum des MOP  $\theta^{*\text{typ}}$  nur, falls keine gleichwertigen Punkte existieren. Mit dieser Definition endet die allgemeine Einführung in die mathematischen Grundlagen und der Nomenklatur der multikriteriellen Optimierung. Im nächsten Abschnitt werden diese angewendet, um das lexikographische Optimierungsproblem zu charakterisieren.

### 3.1.2 Definition des lexikographischen Optimierungsproblems und Abgrenzung zu anderen MOP-Klassen

Der vorige Abschnitt geht bereits auf die Wahl der Modellabbildung und der Ordnungsrelation für den Ansatz mit gewichteten Summen ein. Im Folgenden werden ausschließlich MOP betrachtet, deren Modellabbildung die identische Abbildung  $\vartheta(\mathbf{J}(\theta)) = \mathbf{J}(\theta)$  ist. In diesem Fall kann vereinfachend die Relation direkt auf den Lösungsraum angewendet werden. Die Modellabbildung  $\vartheta$  ist daher zur Vereinfachung der Schreibweise nicht aufgeführt. Für MOPs, deren Modellabbildung auf eine mehrdimensionale Menge abbildet ( $P = n_{\mathbf{J}} > 1$ ), wird im nächsten Schritt die Ordnungsrelation  $<_{\text{typ}}$  definiert. Dies kann durch Ordnungskegel oder zugänglicher durch die komponentenweise Betrachtung der Elemente des als Vektor interpretierten Punktes erfolgen. Ersteres wird im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt und daher werden hier beide Definitionen dargestellt. Dies erfolgt zunächst allgemein, aber zugeschnitten auf das vorliegende MOP und dann speziell für ein lexikographisches Optimierungsproblem. Zunächst daher die Definition eines Kegels nach [Gra70, S. 2].<sup>19</sup>

<sup>18</sup> Nach [SNT85, S. 26] kann  $<_{\text{typ}}$  über die Beziehung  $\tilde{x} \leq_{\text{typ}} x = (\tilde{x} <_{\text{typ}} x \vee \tilde{x} = x)$  aus den bekannten Beziehungen  $\leq_{\text{typ}}$  und  $=$  geschlussfolgert werden.

<sup>19</sup> In [Gra70] werden Keile (engl: *Wedges*) eingeführt und wenn zusätzlich  $\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K}) = \mathcal{K}$  erfüllt ist, der Begriff Kegel (ebd. S. 3) verwendet. Da dies hier nicht von Bedeutung ist und andere Literatur erstgenanntes als Kegel bezeichnet, wird auf diese Unterscheidung verzichtet.

**Definition 3.4 (Kegel)**

Eine nichtleere Untermenge  $\mathcal{K}$  einer reellen linearen Menge heißt Kegel, wenn

$$\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \quad \wedge \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_0^+ : \lambda \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}.$$

Jeder Kegel kann als Ordnungskegel  $\mathcal{K}_{\text{typ}}$  aufgefasst werden, der eine Ordnungsrelation  $\leq_{\text{typ}}$  definiert:

**Definition 3.5 (Ordnungskegel  $\mathcal{K}_{\text{typ}}$  und Ordnungsrelation  $\leq_{\text{typ}}$ )**

Wenn der Ordnungskegel  $\mathcal{K}_{\text{typ}}$  die Ordnungsrelation  $\leq_{\text{typ}}$  definiert, dann gilt

$$\tilde{\mathbf{J}} \leq_{\text{typ}} \mathbf{J} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} - \tilde{\mathbf{J}} \in \mathcal{K}_{\text{typ}}.$$

Es gibt verschiedene Ordnungsrelationen, die in der multikriteriellen Optimierung verwendet werden. Probleme, welche die gleiche Ordnungsrelation verwenden, werden als MOP-Klasse bezeichnet. Ein weniger mathematischer, aber breiterer Überblick über verschiedene MOP-Klassen und ihre Lösung in den Ingenieurwissenschaften ist in [MA04] zu finden. Eine verbreitete MOP-Klasse ergibt sich, wenn der nichtnegative Orthant als Ordnungskegel gewählt wird:

**Beispiel 3.1:**

Eine der am häufigsten angewandten MOP-Klassen ist jene, die das Pareto-Optimum als Lösung hat ([MA04]), diese wird ebenso als Effizienz bezeichnet<sup>20</sup>. Ein Punkt in der geordneten Menge ist effizient, wenn es keinen anderen Punkt im Raum gibt, der in allen Elementen kleiner ist oder in fast allen mit der Ausnahme von höchstens  $n_{\mathbf{J}} - 1$  Elementen, in denen er gleich ist. Dies entspricht der elementweisen Anwendung der gewöhnlichen Ordnungsrelation im  $\mathbb{R}$  auf die Elemente des Gütefunktionsvektors. Für die Definition der Ordnungsrelation ergibt sich daher für ein solches MOP der Ordnungskegel  $\mathcal{K}_{\text{par}} = \mathbb{R}_0^+$ .<sup>21</sup>

Mithilfe der eingeführten Nomenklatur wird das lexikographische MOP  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n_{\mathbf{J}}}, \leq_{\text{lex}})$  definiert und unter der Abkürzung LOP geführt. Eine Sortierung der Gütefunktionen nach ihrer Priorität ist Grundgedanke der lexikographischen Optimierung und eine wesentliche Voraussetzung für ihren sinnvollen Einsatz. Dafür wird hier vorausgesetzt, dass die Gütefunktionen  $J_1$  bis  $J_{n_{\mathbf{J}}}$  in absteigender Priorität geordnet sind.<sup>22</sup> Die höchst priorisierte Gütefunk-

<sup>20</sup> Siehe [MA04] für eine Diskussion zur genaueren Differenzierung.

<sup>21</sup> vgl. [Ehr05, S. 4,7 u. 18] und [SNT85, S. 30].

<sup>22</sup> Alternativ kann die Sortierung formal durch die Definition einer entsprechenden Modellabbildung erfolgen. Dieser Formalismus ist hier durch die Voraussetzung der Sortierung eingespart.

tion wird dabei in jedem Falle minimiert. Die Minimierung der Gütefunktion einer niedrigeren Priorität darf nur Freiheitsgrade nutzen, welche die Werte der höher priorisierten Gütefunktionen nicht verschlechtert. Diese Regel setzt sich bis zur am niedrigsten priorisierten Gütefunktion fort.

Zur vollständigen formalen Definition des LOPs erfolgt die Definition der lexikographischen Ordnungsrelation (vgl. [SNT85, S. 31], [MN09, S. 525]):

**Definition 3.6 (Lexikographische Ordnungsrelation  $>_{\text{lex}}$ )**

Wenn  $>_{\text{lex}}$  die lexikographische Ordnungsrelation ist, gilt

$$\mathbf{J} >_{\text{lex}} \tilde{\mathbf{J}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathcal{I}_{n,\mathbf{J}} : \left( \forall i \in \mathcal{I}_{k-1} : J_i = \tilde{J}_i \right), \left( J_k > \tilde{J}_k \right).$$

Dafür ist die Kurzschreibweise  $\mathcal{I}_k = \{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$  verwendet, wobei  $\mathcal{I}_0 = \emptyset$  gilt. Im Gegensatz zu [SNT85, S. 31] wird hier durch  $>_{\text{lex}}$  keine Präferenz sondern die Ordnungsrelation ausgedrückt. Wenn  $>_{\text{lex}}$  eine Präferenz darstellt, bedeutet  $\mathbf{a} >_{\text{lex}} \mathbf{b}$ , dass der Vektor  $\mathbf{a}$  dem Vektor  $\mathbf{b}$  vorzuziehen ist. Bei der Ordnungsrelation ist immer der kleinere Wert vorzuziehen. Dadurch kann die lexikographische Gütefunktion minimiert werden, da der kleinste Wert in der geordneten Menge die höchste lexikographische Güte repräsentiert. Dies ist im Zusammenhang mit lexikographischer Optimierung üblich (vgl. [Ehr05] und [MN09]). In Worten ausgedrückt bedeutet Definition 3.6: Ein Vektor  $\tilde{\mathbf{J}}$  ist lexikographisch von höherer Güte (im Sinne einer Minimierung) als der Vektor  $\mathbf{J}$ , wenn das erste ungleiche Element der Vektoren von  $\tilde{\mathbf{J}}$  kleiner ist, als das von  $\mathbf{J}$  an gleicher Stelle. Daraus folgt, dass es unbedeutend ist, wie die Einträge darauf folgender Elemente des Vektors zueinander stehen, da diese von niedrigerer Priorität sind.

Hier erfolgt die Definition des lexikographischen Ordnungskegels (vgl. [MN09, S. 526]):

**Definition 3.7 (Lexikographischer Ordnungskegel  $\mathcal{K}_{\text{lex}}$ )**

$$\mathcal{K}_{\text{lex}} := \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^k \mid \exists i \in \mathcal{I}_k : (d_i > 0, \forall j \in \mathcal{I}_{i-1} : d_j = 0)\}.$$

In Worten bedeutet dies: Alle Vektoren, deren erstes von null verschiedenes Element positiv ist, bilden zusammen mit dem Nullvektor den lexikographischen Ordnungskegel (vgl. [Gra70, S. 6]).

Diese lexikographische Ordnungsrelation kann definiert werden über den lexikographischen Ordnungskegel in Definition 3.7 und die über Definition 3.5 daraus resultierende Ordnungsrelation oder direkt durch Definition 3.6. Wird diese lexikographische Ordnungsrelation auf

die ursprüngliche Definition 3.1 des MOPs angewendet, ergibt sich das lexikographische Optimierungsproblem (LOP):

**Definition 3.8 (Lexikographisches Optimierungsproblem LOP)**

$$\min_{\theta \in \mathcal{L}} \mathbf{J}(\theta)$$

oder in Kurzschreibweise:  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n_J}, \leq_{\text{lex}})$ .

Für das Optimum eines LOP gilt demnach: Keine Gütefunktion kann weiter reduziert werden, ohne mindestens eine der höher priorisierten Gütefunktionen zu verschlechtern (vgl. [HWS15, S. 191]). Durch Anwendung von Definition 3.3 auf das lexikographische Optimierungsproblem ergibt sich die Schreibweise für die Menge aller Punkte, die im Optimum des LOP liegen:

**Definition 3.9 (Lexikographisch optimale Lösungsmenge  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\cdot, \cdot)$ )**

$$\theta \text{ liegt im Optimum des LOP } (\mathcal{L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n_J}, \leq_{\text{lex}}) \iff \theta \in \mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathcal{L}).$$

Die obigen Definitionen können ebenfalls für  $n_J = 1$  angewendet werden, dabei ergibt sich ein skalares Optimierungsproblem mit nur einer Gütefunktion. In diesem Fall ist keine besondere Ordnungsrelation  $\leq_{\text{typ}}$  nötig und daher wird die gleiche Schreibweise ohne den Bezeichner  $\text{typ}$  verwendet.

### 3.1.3 Sequentielle Lösung des lexikographischen Optimierungsproblems

Die folgende Methode gilt als übliche Vorgehensweise zur Lösung von LOPs ([ZK11]). Sie ist zentral für die lexikographische Optimierung, da sie oft als Definition des LOPs selbst verwendet wird (siehe z. B. [HWS15, S. 191] u. [KM02, S. 43]). Dies könnte dadurch begründet sein, dass diese Lösungsmethode die hierarchische Struktur des Problems verdeutlicht. Dabei erfolgt die Berechnung des lexikographischen Optimums durch die sequentielle Lösung von einer geordneten Reihe von beschränkten Optimierungsproblemen zur Minimierung der gegebenen skalaren Gütefunktionen des LOP. Die Reihe beginnt mit der Lösung der am höchsten priorisierten Gütefunktion und führt diese mit absteigender Priorität fort. Die Nebenbedingungen (NB) der einzelnen Optimierungsstufen sind dabei so gewählt, dass die Zielerreichungen der höher priorisierten Stufen nicht verschlechtert werden. Die Methode lässt sich unmittelbar aus Definition 3.8 ableiten und wie folgt darstellen (vgl. [ZK11]):

**Korollar 3.1 (Sequentielle Lösung eines LOP)**

Das Optimum  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathcal{L})$  des LOPs  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n,\mathbf{J}}, \leq_{\text{lex}})$  lässt sich berechnen durch

$$\begin{aligned}
 1.) \quad & J_1^*(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}} J_1(\boldsymbol{\theta}) \\
 & \vdots \\
 i.) \quad & J_i^*(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}} J_i(\boldsymbol{\theta}) \text{ unter den NB } J_k(\boldsymbol{\theta}) \leq J_k^*, k \in \mathcal{I}_{i-1} \\
 & \vdots \\
 n_{\mathbf{J}}.) \quad & \mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathcal{L}) = \text{Arg min}_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}} J_{n_{\mathbf{J}}}(\boldsymbol{\theta}) \text{ unter den NB } J_k(\boldsymbol{\theta}) \leq J_k^*, k \in \mathcal{I}_{n_{\mathbf{J}}-1}.
 \end{aligned}$$

Das  $\leq$  in den Nebenbedingungen wird in der zitierten Literatur verwendet, obwohl aufgrund der Optimierung des vorhergehenden Schrittes keine Verbesserung mehr erzielt werden kann. Aus rein mathematischer Sicht könnten Gleichheitsnebenbedingungen anstelle von Ungleichheitsnebenbedingungen verwendet werden. Abhängig von der Wahl des Optimierungsalgorithmus kann es aus numerischen Gründen einen Vorteil bringen diese zu relaxieren. Die in Korollar 3.1 aufgeführten Stufen müssen nicht in jedem Fall alle ausgeführt werden. In der ersten Stufe, in welcher die Lösungsmenge zu einem Punkt entartet, ist das lexikographische Optimum gefunden. Die weiteren Berechnungsschritte sind ohne Auswirkung. Mithilfe der hier eingeführten Nomenklatur kann das sequentielle Lösen verkürzt durch die optimalen Lösungsmengen dargestellt werden:

$$\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathcal{L}) = \mathcal{L}^* \left( J_k(\boldsymbol{\theta}), \mathcal{L}^*(J_{k-1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathcal{L}^*(J_1(\boldsymbol{\theta}), \mathcal{L}) \dots) \right). \quad (3.1)$$

## 3.2 Unbeschränkte lexikographische Optimierung durch Transformation

In diesem Abschnitt wird eine neue Methode vorgestellt, die es unter den im Folgenden definierten Voraussetzungen ermöglicht das Optimum eines unbeschränkten LOP durch die Optimierung einer einzelnen Gütefunktion zu berechnen. Die Methode basiert auf der Idee aus den gegebenen Gütefunktionen durch Transformation eine einzelne Gütefunktion zu erzeugen, deren Optimum an gleicher Stelle liegt, wie das des LOP. Die Transformation ist das zentrale Ergebnis und in Satz 3.4 dargestellt, der im Anschluss bewiesen wird. Im Folgenden werden Voraussetzungen vorgestellt, die sicherstellen, dass das Optimum der vorgestellten Gütefunktion mit der Lösung des LOP übereinstimmt.



### V1 Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 3.4

V1.1 Für den zulässigen Lösungsraum gilt  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^{n_L}$  mit  $n_L > 1$ , damit handelt es sich um ein LOP ohne zusätzliche Beschränkungen.

V1.2 Der Gütefunktionsvektor setzt sich aus  $n_J$  Gütefunktionen zusammen:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [J_1(\boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})]^\top : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^{n_J}. \quad (3.2)$$

V1.3 Die Gütefunktionen  $J_1$  bis  $J_{n_J-1}$  lassen sich für  $i \in \mathcal{I}_{n_J-1}$  darstellen durch das Quadrieren der 2-Norm von vektoriellen, affinen Funktionen:

$$J_i(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{d}_i(\boldsymbol{\theta})\|_2^2 \text{ mit } \mathbf{d}_i : \mathbb{R}^{n_L} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i} : \boldsymbol{\theta} \mapsto \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}_i \quad (3.3)$$

mit  $[\mathbf{W}_1^\top \quad \dots \quad \mathbf{W}_{n_J-1}^\top]^\top$  zeilenregulär.

V1.4 Die Gütefunktion  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$  ist streng konvex (vgl. Definition A.3 im Anhang A.2.3) und mindestens einmal stetig differenzierbar:  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_L})$ <sup>23</sup>.

V1.5 Es gilt  $n_J, m_i \in \mathbb{N}, m_i > 0$  und  $n_J > 1$ . Für  $q := \sum_{i=1}^{n_J-1} m_i$  gilt des Weiteren:  $q \in \mathbb{N}, q > 0$  und  $q = n_L - 1$ .

Vereinfacht zusammengefasst stellen die Voraussetzungen sicher, dass unter einer gegebenen Struktur der Gütefunktionen das lexikographische Optimierungsproblem eine Lösung hat, die von allen Gütefunktionen des Gütefunktionsvektors abhängt. Unter Anwendung von Korollar 3.1 für die Lösung des LOPs entspricht dies der Notwendigkeit jede Stufe der sequentiellen Lösung zu berechnen. Die Auswirkungen dieser Voraussetzungen auf die Anwendung werden in Abschnitt 4.4 diskutiert.

Die folgenden Sätze, Lemmata und Definitionen werden für den Beweis von Satz 3.4 benötigt. Der vorbereitende Teil für den Beweis unterteilt sich in folgende Abschnitte:

- Teil I: Optimierung einer Summe von Gütefunktionen
- Teil II: Übertragung des lexikographischen Ordnungskegels in eine lexikographische Abstiegsrichtung im Lösungsraum
- Teil III: Optimalitätskriterien für die Optimierung konvexer Funktionen unter Gleichheitsnebenbedingungen

<sup>23</sup>  $\mathcal{C}^n(\mathbb{M})$  ist die Menge der über der Menge  $\mathbb{M}$   $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen.

### 3.2.1 Teil I: Optimierung einer Summe von Gütefunktionen

Zunächst folgen zwei zentrale Lemmata aus der linearen Algebra für ein lineares Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i \in \mathcal{I}_m. \quad (3.4)$$

**Satz 3.1 (Dimension des Lösungsraums eines linearen Gleichungssystems [Vin03, Theorem 7.9])**

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (3.4) mit mindestens einer Lösung ist ein affiner Unterraum der Dimension  $n - r$ , wobei  $n$  die Anzahl der Variablen und  $r$  der Rang der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

ist.

**Satz 3.2 (Kronecker-Cappelli Theorem [Vin03, Theorem 2.51])**

Das lineare Gleichungssystem (3.4) hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix (nach Satz 3.1) ist.

Mit diesen Lemmata kann gezeigt werden, dass die Minimierung einer Summe von Gütefunktionen unter den gegebenen Voraussetzungen der Schnittmenge der optimalen Lösungsmengen der Summanden entspricht:

**Lemma 3.1 (Schnitt linear unabhängiger optimaler Lösungsmengen)**

Gegeben sind die Gütefunktionen  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$  der Lösungsvariable  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_L}$  der Form in Gleichung (3.3) mit  $\sum_{i=1}^{n_J} m_i = n_L - n_D$  wobei  $n_J, m_i, n_D \in \mathbb{N}$ ,  $m_i > 0$ ,  $n_D \geq 1$ . Ist zudem  $[\mathbf{W}_1^\top \ \dots \ \mathbf{W}_{n_J}^\top]^\top$  zeilenregulär, dann gilt

$$i) \quad \bigcap_{i=1}^{n_J} \mathcal{L}^*(J_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L}) = \mathcal{L}^*\left(\sum_{i=1}^{n_J} J_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L}\right) \neq \emptyset$$

$$ii) \quad \dim\left(\bigcap_{i=1}^{n_J} \mathcal{L}^*(J_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})\right) = n_D.$$

**Beweis:**

Ein Optimum  $J_{A+B}^* = \min J_A(\boldsymbol{\theta}) + J_B(\boldsymbol{\theta})$  kann nie kleiner sein als die Addition der Optima  $J_A^* + J_B^* = \min J_A(\boldsymbol{\theta}) + \min J_B(\boldsymbol{\theta})$ . Diese Tatsache erweitert sich ohne Weiteres auf endliche Summen von Gütefunktionen. Ist die Schnittmenge

$$\bigcap_{i=1}^{n_J} \mathcal{L}^*(J_i(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L}) \quad (3.5)$$

nicht leer, ergeben darin enthaltene Punkte immer das Minimum der Funktion

$$\sum_{i=1}^{n_J} J_i(\boldsymbol{\theta}).$$

Für den Beweis von Lemma 3.1 ist es daher ausreichend zu zeigen, dass diese Schnittmenge nicht leer ist. Dann kann Satz 3.1 für lineare Gleichungssysteme mit mindestens einer Lösung angewendet werden.

Um dies zu beweisen, werden zunächst die Gütefunktionen  $J_i(\boldsymbol{\theta})$  mit den Funktionen  $d_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}_i$  betrachtet. Diese werden in ihre skalaren Anteile  $d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$  aufgeteilt. Damit ergibt sich:

$$J_i(\boldsymbol{\theta}) = \|d_i(\boldsymbol{\theta})\|_2^2 = d_{i,1}(\boldsymbol{\theta})^2 + \dots + d_{i,m_i}(\boldsymbol{\theta})^2 \quad (3.6)$$

$$\text{mit } d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{w}_{i,j}^\top \boldsymbol{\theta} + v_{i,j}. \quad (3.7)$$

Angenommen die optimalen Lösungsmengen der Summanden  $\mathcal{L}^*(d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})^2, \mathbb{R}^{n_L})$  jeder Gütefunktion  $J_i(\boldsymbol{\theta})$  bilden ebenfalls eine nichtleere Schnittmenge, können diese nach gleicher Argumentation wie im ersten Absatz getrennt optimiert werden. Im Folgenden

werden daher nur Gütefunktionen der Form

$$J_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{w}_{i,j}^\top \boldsymbol{\theta} + v_{i,j})^2 \quad (3.8)$$

betrachtet. Die optimale Lösungsmenge der  $J_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$  beschrieben durch

$$\mathcal{L}^* \left( d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})^2, \mathbb{R}^{n_L} \right)$$

ist identisch mit allen Punkten, welche Gleichung  $d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = 0$  lösen. Anwendung von Satz 3.2 auf dieses Gleichungssystem zeigt, dass

$$[\mathbf{W}_1^\top \quad \dots \quad \mathbf{W}_{n_J}^\top]^\top$$

der Koeffizientenmatrix entspricht. Diese hat im vorliegenden Fall  $q = \sum_{i=1}^{n_J} m_i = n_L - n_D$  linear unabhängige Zeilen. Der Zeilenrang  $r = n_L - n_D$  der Koeffizientenmatrix ist voll. Da die Anzahl der Zeilen  $n_L - n_D$  kleiner ist als die Anzahl der Spalten  $n_L$ , kann durch die Hinzunahme einer Spalte der Rang nicht geändert werden. Somit hat die erweiterte Koeffizientenmatrix nach Satz 3.2 den gleichen Rang wie die Koeffizientenmatrix, was durch Anwendung von eben diesem Satz die Existenz von mindestens einer Lösung garantiert. Damit ist die Voraussetzung für die Anwendung von Satz 3.1 gegeben. Die Berechnung der Dimension des Lösungsraums des Gleichungssystems

$$\forall i \in \mathcal{I}_q : \quad \forall j \in \mathcal{I}_{m_i} : d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = 0$$

entspricht der Dimension der optimalen Lösungsmenge aus Gleichung (3.5). Der Rang  $r = n_L - n_D$  der Koeffizientenmatrix sichert daher, dass die Dimension des Lösungsraums gleich dem Defekt der Koeffizientenmatrix  $n_D \geq 1$  ist. Dies zeigt, dass die Schnittmenge nicht leer ist. Dadurch rechtfertigt sich die Zerlegung in einzelne Gütefunktion nach Gleichung (3.8) und abschließend die Gültigkeit von Lemma 3.1.  $\square$

Hiermit ist der erste Teil zur Vorbereitung des Beweises des zentralen, folgenden Satzes 3.4, abgehandelt.

### 3.2.2 Teil II: Übertragung des lexikographischen Ordnungskegels in eine lexikographische Abstiegsrichtung im Lösungsraum

Die bisher erfolgten Definitionen des lexikographischen Optimums erfolgten im Zielraum. Für den Beweis von Satz 3.4 ist es notwendig diese in den Lösungsraum zu übertragen. Hier wird

eine lexikographische Abstiegsrichtung im Lösungsraum eingeführt, die zunächst durch den lexikographischen Kegel aus Definition 3.7 im Zielraum definiert wird.<sup>24</sup>

**Definition 3.10 (Lexikographische Abstiegsrichtung im Lösungsraum für konvexe Gütefunktionen  $\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta})$ )**

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) := \{\boldsymbol{p} \mid \exists \lambda > 0 : \forall (0 < \epsilon < \lambda) : \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta} + \epsilon\boldsymbol{p}) \in \mathcal{K}_{\text{lex}}\}$$

Diese Definition setzt voraus, dass alle betrachteten Gütefunktionen konvex sind. Dies gilt für  $J_p(\boldsymbol{\theta})$  aufgrund von Voraussetzung V1.4 und kann für alle anderen Gütefunktionen  $J_i(\boldsymbol{\theta})$ ,  $i \in \mathcal{I}_{n,J-1}$  gezeigt werden:

**Lemma 3.2**

*Gütefunktionen mit gleicher Struktur wie in Gleichung (3.3) sind konvex.*

**Beweis:**

Eine allgemeine quadratische Funktion  $J(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{H} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{\theta} + h$  ist nur konvex, wenn  $\boldsymbol{H}$  positiv semidefinit ist:  $\boldsymbol{H} \succeq 0$  (vgl. [BV04, Example 3.2]). Gleichung (3.3) kann umgeformt werden zu

$$J_i(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{d}_i(\boldsymbol{\theta})^\top \boldsymbol{d}_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.9)$$

$$= \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{W}_i^\top \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\theta} + 2\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{v}_i. \quad (3.10)$$

$\boldsymbol{W}_i^\top \boldsymbol{W}_i$  ist positiv semidefinit, da  $\forall \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{W}_i^\top \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\theta} \geq 0$ . Dies wird deutlich nach der Umformung

$$\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{W}_i^\top \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{W}_i)^\top \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\theta} = \|\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{W}_i\|_2^2.$$

□

Wenn in einem konvexen Optimierungsproblem ohne Beschränkungen ein Punkt existiert, in dem keine Abstiegsrichtung existiert, muss dieser Punkt Teil der lexikographisch optimalen Lösungsmenge  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\boldsymbol{J}, \mathbb{R}^{n_L})$  sein (vgl. [MN09, Theorem 4.1]<sup>25</sup>):

<sup>24</sup> Eine ähnliche Idee für eine lexikographische Abstiegsrichtung ist in [RT10, Definition 8] zu finden, diese ist nicht aus dem Zielraum abgeleitet.

<sup>25</sup> Dort ist die Menge im Zielraum definiert, als Schnittmenge aus dem Komplement des lexikographischen Kegels und aller zulässigen Richtungen. Dies entfällt hier aufgrund der Voraussetzung  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^{n_L}$ .

**Korollar 3.2**

Unter der Voraussetzung V1.1 gilt

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathbb{R}^{n_L}).$$

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen 3.7 bis 3.10. Des Weiteren werden noch die folgenden Richtungen im Lösungsraum benötigt.

**Definition 3.11** ( $\mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathcal{D}_{i,\max}(\boldsymbol{\theta})$  und  $\mathcal{D}_{i,\text{con}}(\boldsymbol{\theta})$ )

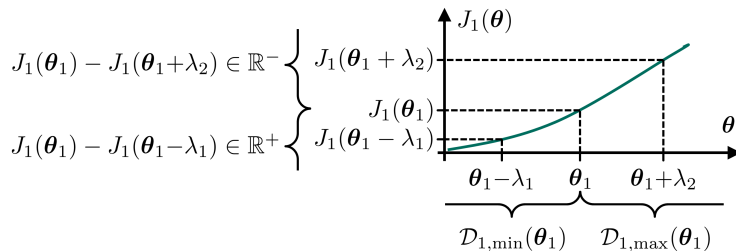
Für eine Gütefunktion  $J_i(\boldsymbol{\theta}) \in C^1(\mathbb{R}^{n_L})$  sind in einem Punkt  $\boldsymbol{\theta}$  des Lösungsraums folgende Untermengen im Lösungsraum definiert:

$$\mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) := \{\mathbf{p} \mid \exists \lambda > 0 : \forall (0 < \epsilon < \lambda) : J_i(\boldsymbol{\theta}) - J_i(\boldsymbol{\theta} + \epsilon\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^+\}$$

$$\mathcal{D}_{i,\max}(\boldsymbol{\theta}) := \{\mathbf{p} \mid \exists \lambda > 0 : \forall (0 < \epsilon < \lambda) : J_i(\boldsymbol{\theta}) - J_i(\boldsymbol{\theta} + \epsilon\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^-\}$$

$$\mathcal{D}_{i,\text{con}}(\boldsymbol{\theta}) := \{\mathbf{p} \mid \exists \lambda > 0 : \forall (0 < \epsilon < \lambda) : J_i(\boldsymbol{\theta}) = J_i(\boldsymbol{\theta} + \epsilon\mathbf{p})\}$$

Zwei der in Definition 3.11 definierten Kegel sind in Abbildung 3.1 für eine Funktion  $J_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beispielhaft in dem Punkt  $\boldsymbol{\theta}_1$  veranschaulicht. Diese Nomenklatur ermöglicht es die lexikographische Abstiegsrichtung aus Korollar 3.2 durch die Kegel  $\mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathcal{D}_{i,\max}(\boldsymbol{\theta})$  und  $\mathcal{D}_{i,\text{con}}(\boldsymbol{\theta})$  auszudrücken. Der gleichen Überlegung wie im Beweis von Lemma 3.1 folgend und daher ohne Beschränkung der Voraussetzung V1.3 wird an dieser Stelle ein Gütefunktionsvektor  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [J_1(\boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad J_k(\boldsymbol{\theta})]^\top$  bestehend aus Gütefunktionen der Form in Gleichung (3.8) betrachtet.



**Abbildung 3.1:** Veranschaulichung der Kegel  $\mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta})$  und  $\mathcal{D}_{i,\max}(\boldsymbol{\theta})$

**Lemma 3.3**

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \bigcup_{i=1}^k \left( \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} (\mathcal{D}_{j,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cup \mathcal{D}_{j,\text{con}}(\boldsymbol{\theta})) \right)$$

**Beweis:**

Damit die Gütefunktionsdifferenz in Definition 3.10 im lexikographischen Kegel  $\mathcal{K}_{\text{lex}}$  liegt, muss gelten:

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \bigcup_{i=1}^k \left( \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{D}_{j,\max}(\boldsymbol{\theta}) \right). \quad (3.11)$$

Für die Beweisführung von Satz 3.4 ist es von Vorteil die Differenzmenge zu umgehen, weshalb eine weitere Umformung folgt:

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \bigcup_{i=1}^k \left( \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} (\mathcal{D}_{j,\max}(\boldsymbol{\theta}))^c \right) \quad (3.12)$$

$$= \bigcup_{i=1}^k \left( \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} (\mathcal{D}_{j,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cup \mathcal{D}_{j,\text{con}}(\boldsymbol{\theta})) \right). \quad (3.13)$$

Dabei wird die Komplementmenge verwendet, die im Anhang A.2.4 definiert ist.  $\square$

### 3.2.3 Teil III: Optimalitätskriterien für die Optimierung konvexer Funktionen unter Gleichheitsnebenbedingungen

Ein weiterer benötigter Teil für den Beweis von Satz 3.4 sind Kriterien für ein Minimum bei der Optimierung einer Gütefunktion  $J_x(\boldsymbol{\theta})$  unter Gleichheitsnebenbedingungen  $d_i(\boldsymbol{\theta}) = 0, i \in \mathcal{G} \subset \mathbb{N}$ . Im Allgemeinen stellen die *Karush-Kuhn-Tucker* Optimalitätskriterien (KKT) nur notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum dar. Ist die zu optimierende Funktion konvex, sind diese notwendig und hinreichend ([BV04, S. 244]). Es müssen keine Ableitungen zweiter Ordnung betrachtet werden. Wenn die zu optimierende Funktion konvex ist, muss zwischen Minima und Maxima nicht unterschieden werden, da es keine Maxima mit verschwindendem Gradienten gibt, ebenfalls treten keine Sattelpunkte auf. Der folgende Satz ist abgesehen von der Adaption auf Optimierungsprobleme ohne Ungleichheitsnebenbedingungen aus [BV04] entnommen.

**Satz 3.3 (KKT: Hinreichendes Optimalitätskriterium für konvexe Funktionen unter Gleichheitsnebenbedingungen (vgl. [BV04, S. 244]))**

Wenn die Funktion  $J(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_L})$  konvex ist und die Gleichheitsnebenbedingungen  $d_i(\boldsymbol{\theta}), i \in \mathcal{G}$  affin sind und es existieren ein Punkt  $\boldsymbol{\theta}^*$  sowie ein Lagrange-Multiplikator  $\lambda^*$  mit den Komponenten  $\lambda_i^*$ , welche die KKT

$$d_i(\boldsymbol{\theta}^*) = 0, i \in \mathcal{G}$$

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}^*) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \lambda_i^* \nabla d_i(\boldsymbol{\theta}^*) = 0$$

erfüllen, dann ist  $\boldsymbol{\theta}^*$  das Minimum von

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_L}} J(\boldsymbol{\theta})$$

unter den NB

$$\forall i \in \mathcal{G} : d_i(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

### 3.2.4 Motivation, Formulierung und Beweis des zentralen Satzes

Als geometrische Motivation für den zentralen Satz 3.4 erfolgt anhand Abbildung 3.2 ein einleitendes Beispiel.

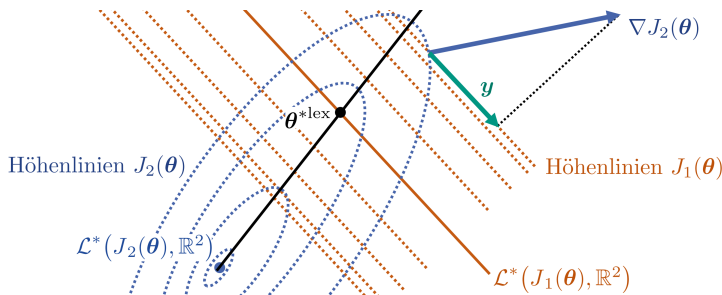


Abbildung 3.2: Geometrische Motivation des zentralen Satzes 3.4

#### Beispiel 3.2:

In Abbildung 3.2 sind zwei Gütefunktionen durch ihre Höhenlinien ( $J_1$ : orangene Punktlinie,  $J_2$ : blaue Punktlinie) dargestellt. Dort sind ebenfalls die optimalen Lösungsmengen der Funktion  $J_1$  (orangene Volllinie) und  $J_2$  (blauer Punkt) abgebildet. Die Motivation für die Transformation besteht darin, die Richtungen zu ermitteln, in welche die Gütefunktion  $J_2$  minimiert



werden kann, ohne die Werte der Gütefunktion  $J_1$  zu verändern. Wird der Gradient  $\nabla J_2$  in genau diese Richtung projiziert, wird der Betrag des entstehenden Vektors  $\mathbf{y}$  auf allen Punkten der schwarzen Geraden zu Null. Wird die Summe aus dem Betrag von  $\mathbf{y}$  und der Gütefunktion  $J_1$  minimiert, ergibt sich als Ergebnis das lexikographische Minimum  $\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}}$ .

Sind die oben aufgeführten Voraussetzungen gegeben, gilt der folgende zentrale Satz dieser Arbeit:

**Satz 3.4 (Lexikographische Optimierung durch Transformation)**

Das Optimum  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathbb{R}^{n_L})$  des LOPs  $(\mathbb{R}^{n_L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n_J}, \leq_{\text{lex}})$ , enthält nur einen Punkt  $\boldsymbol{\theta}^*$  und dieser lässt sich unter den Voraussetzungen V1 berechnen durch

$$\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\text{wobei } J_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_J-1} J_i(\boldsymbol{\theta}) + \left( \frac{\partial J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{r}} \right)^2$$

$$\text{mit } \mathbf{r} \in \text{Kern} \left( [\mathbf{W}_1^\top \quad \dots \quad \mathbf{W}_{n_J-1}^\top]^\top \right), \|\mathbf{r}\|_2 = 1.$$

**Beweis:**

Die Eindeutigkeit des Ergebnisses erfolgt unmittelbar aus Voraussetzung V1.4, dass  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$  streng konvex ist. In [KM02, Fact 3] ist die leicht erkennbare Tatsache gegeben: wenn mindestens eine der Gütefunktionen eines LOP streng konvex ist, besteht die optimale Lösungsmenge aus nur einem Punkt. Der Beweis ist direkt und startet folglich mit der Formulierung des lexikographischen Optimierungsproblems unter den genannten Voraussetzungen, um dieses in die Form aus Satz 3.4 zu bringen.<sup>26</sup>

Für die ersten  $n_J - 1$  Gütefunktionen  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_J-1}(\boldsymbol{\theta})$  sind aufgrund von Voraussetzung V1.3 und V1.5 die Bedingungen für die Anwendung von Lemma 3.1 gegeben. Alle  $n_J - 1$  ersten Gütefunktionen für sich betrachtet können ihren minimalen Wert annehmen, da die Schnittmenge der Lösungsmengen nach Lemma 3.1 *i*) nicht leer ist. Daher muss im Optimum  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathbb{R}^{n_L})$  Bedingung **A** gelten:

$$\mathbf{A} := \forall i \in \mathcal{I}_{n_J-1} : \forall j \in \mathcal{I}_{m_i} : d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = 0. \quad (3.14)$$

<sup>26</sup> Die Beweisführung ist ebenfalls ausgehend von der sequentiellen Lösung eines LOP in Korollar 3.1 möglich.

Unter dieser Voraussetzung wird das notwendige und hinreichende Kriterium

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \emptyset \quad (3.15)$$

für ein lexikographisches Optimum (vgl. Korollar 3.2) untersucht. Hierfür wird

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \bigcup_{i=1}^{n_J} \left( \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} (\mathcal{D}_{j,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cup \mathcal{D}_{j,\text{con}}(\boldsymbol{\theta})) \right) \quad (3.16)$$

nach Lemma 3.3 für  $\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta})$  eingesetzt. Aufgrund von Bedingung  $\boxed{\text{A}}$  befindet sich der Punkt in den Minima der Gütefunktionen  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$ , daher ergibt sich

$$\forall i \in \mathcal{I}_{n_J-1} : \mathcal{D}_{i,\min}(\boldsymbol{\theta}) = \emptyset. \quad (3.17)$$

Dies vereinfacht Gleichung (3.16) zu

$$\mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\theta} \mid \boxed{\text{A}}\} \cap \mathcal{D}_{n_J,\min}(\boldsymbol{\theta}) \cap \bigcap_{j=1}^{n_J-1} \mathcal{D}_{j,\text{con}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.18)$$

$$= \{\boldsymbol{\theta} \mid \boxed{\text{A}}\} \cap \mathcal{D}_{n_J,\min}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.19)$$

Ein Punkt, in dem  $\boxed{\text{A}}$  gilt und keine Abstiegsrichtung bezüglich der Gütefunktion  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$  existiert, kann durch folgendes Minimierungsproblem

$$\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}} J_{n_J}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.20)$$

unter den NB

$$\forall i \in \mathcal{I}_{n_J-1} : \quad \forall j \in \mathcal{I}_{m_i} : d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (3.21)$$

ausgedrückt werden. Aufgrund der Voraussetzungen V1.4 und V1.3 sind die Bedingungen für die Anwendung der KKT-Bedingungen nach Satz 3.3 gegeben. Unter deren Verwendung kann obige Gleichung umformuliert werden, sodass  $\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}}$  durch Gleichung (3.15) vollständig im Lösungsraum ausgedrückt werden kann:

$$\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}} = \{ \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{D}_{\text{lex}}(\boldsymbol{\theta}) = \emptyset \} \quad (3.22)$$

$$= \{ \boldsymbol{\theta} \mid \boxed{\text{A}} \wedge \boxed{\text{B}} \} \quad (3.23)$$

$$\boxed{\text{B}} := \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^q : \nabla J_{n_J}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{n_J-1}} \sum_{j \in \mathcal{I}_{m_i}} \lambda_i \nabla d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.24)$$

Eine geometrische Interpretation der Bedingung  $\boxed{\text{B}}$  lautet, dass der Gradient von  $J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})$  innerhalb des Kegels liegen muss, der durch die  $\nabla d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$  aufgespannt wird. Im vorlie-

genden Fall dürfen die  $\lambda_i$  ein beliebiges Vorzeichen annehmen, daher handelt es sich beim aufgespannten Kegel um einen Unterraum. Dieser hat aufgrund der Voraussetzungen V1.3 und V1.5 die Dimension  $n_L - 1$ . Es handelt sich damit um eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^{n_L}$ , die den Ursprung enthält. Letzteres ergibt sich aus der Wahl  $\lambda = \mathbf{0}$ . Ein Vektor liegt genau dann in einer Hyperebene durch den Ursprung, wenn er zu deren Normalenvektor orthogonal ist. Somit kann die Hyperebene, respektive der KKT-Kegel, vollständig durch diesen Normalenvektor beschrieben werden. Wenn  $\mathbf{r}$  der Normalenvektor des KKT-Kegels ist, welcher durch die Gradienten  $\nabla d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$  aufgespannt wird, ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{B}} = (\mathbf{r}^\top \nabla J_{n_j}(\boldsymbol{\theta}) = 0) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{r} := \{ \mathbf{r} \mid \forall i \in \mathcal{I}_{n_j-1} : \forall j \in \mathcal{I}_{m_i} : \mathbf{r}^\top \nabla d_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \|\mathbf{r}\|_2 = 1 \} \\ = \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \text{Kern} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^\top & \dots & \mathbf{W}_{n_j-1}^\top \end{bmatrix}^\top \right), \|\mathbf{r}\|_2 = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

An dieser Stelle ist die Notwendigkeit für die Forderung  $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$  noch nicht gegeben, da aber ohnehin  $\mathbf{r} \neq 0$  gefordert werden müsste, erfolgt dies bereits hier.

Im nächsten Teil der Herleitungen werden die Bedingungen  $\boxed{\mathbf{A}}$  und  $\boxed{\mathbf{B}}$  auf Optimierungsprobleme umgeformt. Punkte, welche die Bedingung  $\boxed{\mathbf{B}}$  erfüllen, müssen Lösungen des Optimierungsproblems sein:

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{B}} = \left( \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ \text{mit } J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) := (\mathbf{r}^\top \nabla J_{n_j}(\boldsymbol{\theta}))^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eingangs des Beweises ist die Anwendbarkeit von Lemma 3.1 erläutert. Es wird hier erneut genutzt, um die Schnittmenge der Lösungsmengen der  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_j-1}(\boldsymbol{\theta})$  durch ein Optimierungsproblem über die Summe dieser Gütefunktionen auszudrücken. Punkte, welche die Bedingung  $\boxed{\mathbf{A}}$  erfüllen, müssen Lösungen des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{A}} = \left( \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ \text{mit } J_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^{n_j-1} J_i(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

sein. Zusammenfassend ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (3.23)

$$\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}} = \{ \boldsymbol{\theta} \mid \boxed{\mathbf{A}} \wedge \boxed{\mathbf{B}} \} \quad (3.29)$$

$$= \left\{ \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) \right\}. \quad (3.30)$$

Bilden die Lösungsmengen  $\mathcal{L}^*(J_A(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  und  $\mathcal{L}^*(J_B(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  der Optimierungsprobleme  $J_A(\boldsymbol{\theta})$  und  $J_B(\boldsymbol{\theta})$ , die sich durch  $\boxed{\text{A}}$  und  $\boxed{\text{B}}$  ergeben haben, eine nichtleere Schnittmenge, kann das Gesamtproblem durch die Optimierung der Summe der Gütefunktionen  $J_A(\boldsymbol{\theta}) + J_B(\boldsymbol{\theta})$  gelöst werden. Die Schnittmenge  $\mathcal{L}^*(J_A(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L}) \cap \mathcal{L}^*(J_B(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  ist nicht leer, dies wird durch einen Widerspruchsbeweis mit geometrischer Argumentation gezeigt. Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}^*(J_A(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  hat die Dimension 1, weshalb ihre Punkte alle entlang einer Richtung liegen. Diese ist die Richtung  $\boldsymbol{r}$ , da entlang dieser Richtung alle Gütefunktionen  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_j-1}(\boldsymbol{\theta})$  konstant sind, weil sie orthogonal auf allen Gradienten  $\nabla d_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$  steht. Alle Vektoren in der Hyperebene  $\mathcal{L}^*(J_B(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  erfüllen  $\boldsymbol{r}^\top \nabla J_{n_j}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ . Dies bedeutet geometrisch interpretiert, dass die Richtungsableitung der Funktion  $J_{n_j}(\boldsymbol{\theta})$  entlang des Vektors  $\boldsymbol{r}$  verschwindet:

$$\frac{\partial J_{n_j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{r}} = 0. \quad (3.31)$$

Eine notwendige Bedingung für eine leere Schnittmenge von Unterräumen ist die lineare Abhängigkeit der aufspannenden Vektoren. Für eine leere Schnittmenge muss daher  $\boldsymbol{r} \in \mathcal{L}^*(J_B(\boldsymbol{\theta}), \mathbb{R}^{n_L})$  gelten und folglich

$$\frac{\partial J_{n_j}(\lambda \boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} = 0. \quad (3.32)$$

Das bedeutet, dass entlang der Richtung  $\boldsymbol{r}$  keine Änderung der Gütefunktion vorliegt. Dementsprechend haben alle Punkte entlang von  $\boldsymbol{r}$  die gleichen Gütefunktionswerte:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : J_{n_j}(\lambda \boldsymbol{r}) = J_{n_j}(\boldsymbol{r}). \quad (3.33)$$

Diese Bedingung kann für die streng konvexe Funktion  $J_{n_j}(\boldsymbol{\theta})$  nicht erfüllt sein, da dies der Definition von streng konvexen Funktionen (vgl. Definition A.3 im Anhang A.2.3) widerspricht. Somit ist gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Schnittmenge nicht leer sein kann. Daher kann die Summe der Gütefunktionen  $J_A(\boldsymbol{\theta}) + J_B(\boldsymbol{\theta})$  optimiert werden, um  $\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}}$  zu bestimmen:

$$\boldsymbol{\theta}^{*\text{lex}} = \left\{ \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_A(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_B(\boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (3.34)$$

$$= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_A(\boldsymbol{\theta}) + J_B(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.35)$$

Werden in obiger Gleichung  $J_A(\boldsymbol{\theta})$  nach Gleichung (3.28) und  $J_B(\boldsymbol{\theta})$  nach Gleichung (3.27) in der Form der Richtungsableitung nach Gleichung (3.31) eingesetzt, ergibt sich die Gleichung aus Satz 3.4.  $\square$

### 3.3 Übertragung auf unbeschränkte lexikographische MPC-Optimierungsprobleme

Die sequentielle Lösung (siehe Unterabschnitt 3.1.3) des lexikographischen Optimierungsproblems ist in MPC-Ansätzen die übliche Herangehensweise.<sup>27</sup> Im Gegensatz dazu wird hier die im vorigen Abschnitt entworfene Methode auf die Anwendung in MPC mit lexikographischen Optimierungsproblemen übertragen. Hierfür werden zunächst im Folgeabschnitt die Grundlagen der Nomenklatur erläutert, um im darauffolgenden Abschnitt die Anwendung des Satzes 3.4 auf das MPC-Optimierungsproblem zu zeigen.

#### 3.3.1 Nomenklatur und Einführung für MPC

In diesem Abschnitt erfolgt die Einführung des MPC-Ansatzes zur Regelung von zeitdiskreten Streckenmodellen. Die Einführung der Nomenklatur orientiert sich an [MRRS00], ist aber zur Anpassung an die vorliegende Arbeit abgeändert. Gegeben ist ein zeitdiskretes Systemmodell der Regelstrecke

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (3.36)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{f}_y(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (3.37)$$

mit  $n_x$  Zuständen,  $n_u$  Eingängen und  $n_y$  Ausgängen:  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Die Zustände und Eingänge des Systems unterliegen den Beschränkungen

$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}. \quad (3.39)$$

Das Ziel des MPC ist es den Ausgang des Systems  $\mathbf{y}(k)$  mit dem Sollwert  $\mathbf{y}_{\text{soll}}(k)$  in Übereinstimmung zu bringen. Das Regelziel wird durch eine Gütefunktion formalisiert. Es bestraft die Abweichung des Systems vom gewünschtem Verhalten, im vorliegenden Fall die Abweichung des Ausgangs vom Sollwert. Zur Vereinfachung der Nomenklatur wird  $\mathbf{y}_{\text{soll}}(k)$  nicht als Argument der Gütefunktion dargestellt:

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k), k). \quad (3.40)$$

Der prädiktive Charakter eines MPC drückt sich durch die Auswertung dieser Gütefunktion über einen Horizont von  $n_h$  Schritten in der Zukunft aus. Das Ziel des MPC ist es durch die Lösung eines Optimierungsproblems über diesem Horizont genau die Stellgrößen  $\mathbf{u}(k)$

<sup>27</sup> Dies zeigt sich in den theoretischen Grundlagen ([HWS15, S. 191], [KM02, S. 43]) und resultiert in Anwendungsgebieten mit langsameren Zeitkonstanten (chemische Reaktoren in [PB09, APM16, MGB10], Gebäudeerwärmung in [OCK<sup>+</sup>15] und Pfadregelung von Unterwasserfahrzeugen in [SSB19]).

zu ermitteln, welche die beste Regelgüte im Sinne der Gütefunktion erzielen. Dies soll unter Berücksichtigung des Streckenmodells sowie der Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen erfolgen:

$$\mathbf{u}^*(k), \dots, \mathbf{u}^*(k + n_h - 1) = \arg \min_{\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n_h-1)} \sum_{l=k}^{k+n_h-1} J(\mathbf{x}(l), \mathbf{u}(l), \mathbf{y}(l), l) \quad (3.41)$$

unter den NB

$$\begin{aligned} \forall l \in \{k, \dots, k + n_h - 1\} : \mathbf{x}(l) &\in \mathcal{X}, \\ \mathbf{u}(l) &\in \mathcal{U}, \\ \mathbf{x}(l+1) &= \mathbf{f}_x(\mathbf{x}(l), \mathbf{u}(l)), \\ \mathbf{y}(l) &= \mathbf{f}_y(\mathbf{x}(l), \mathbf{u}(l)). \end{aligned}$$

Der Zustand  $\mathbf{x}(k-1)$  sowie der Eingang  $\mathbf{u}(k-1)$  werden als gegebene Startwerte betrachtet, da sie aus dem vorausgehenden Zeitschritt bekannt sind. Das oben dargestellte MPC-Optimierungsproblem zum Zeitschritt  $k$  wird üblicherweise in jedem Zeitschritt gelöst, aber nur der erste Wert  $\mathbf{u}^*(k)$  gestellt. Die berechneten Werte  $\mathbf{u}^*(k+1)$  bis  $\mathbf{u}^*(k+n_h)$  werden verworfen, da im nächsten Zeitschritt  $k+1$  erneut das obige Optimierungsproblem gelöst wird.

### 3.3.2 Lösung des MPC-Optimierungsproblems durch vektorielle Zusammenfassung und *Condensing*

Die Lösung solcher Optimierungsprobleme, aber ohne Beschränkungen, kann unter gewissen Voraussetzungen analytisch erfolgen. Ein Ansatz hierfür ist der *Batch Approach* (vgl. [BBM17, Kapitel 8.2 u. 9.2]). Auf diesen Ansatz wird hier nicht eingegangen, aber es findet ein grundlegender Gedanke der Methode in dieser Arbeit, wie in vielen anderen MPC-Lösungsansätzen, Verwendung. Die Nutzung eines Prädiktionsmodells zur Beschreibung des Streckenverhaltens über dem Prädiktionshorizont  $n_h$  ist bereits in Abschnitt 2.2 näher erläutert. Dabei werden alle Zustände, Eingänge und Ausgänge innerhalb des Horizonts in einen Vektor zusammengefasst (Definition in Gleichungen (2.26) bis (2.28) auf S. 34). Wird dieses Schema auf obiges Optimierungsproblem angewendet, kann es ohne das Summenzeichen formuliert werden.

Die Systemgleichungen sind in der Form

$$\mathbf{x}_s(k+1) = \mathbf{f}_{xs}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k)), \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_s(k) = \mathbf{f}_{ys}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k)). \quad (3.43)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Zustandsvektor hier im Argument von  $\mathbf{f}_{\text{xs}}(\cdot)$  nicht als gestapelte Größe erscheint. Ebenso werden die Beschränkungen

$$\mathcal{X}_s = \mathcal{X}^{n_h} = \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x n_h}, \quad (3.44)$$

$$\mathcal{U}_s = \mathcal{U}^{n_h} = \mathcal{U} \times \dots \times \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u n_h} \quad (3.45)$$

auf eine um den Faktor Horizontlänge  $n_h$  größere Dimension erweitert. Daraus ergibt sich das Optimierungsproblem zur Berechnung der optimalen Steuergröße im Zeitschritt  $k$  in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{u}_s^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_s(k)} J_s(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k), \mathbf{y}_s(k), k) \quad (3.46)$$

unter den NB

$$\mathbf{x}_s(k+1) \in \mathcal{X}_s \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u}_s(k) \in \mathcal{U}_s \quad (3.48)$$

$$\mathbf{x}_s(k+1) = \mathbf{f}_{\text{xs}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k)) \quad (3.49)$$

$$\mathbf{y}_s(k) = \mathbf{f}_{\text{ys}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k)). \quad (3.50)$$

Ein weiterer Schritt zur Vereinfachung der Gütefunktion innerhalb des *Batch Approach* ist die Eliminierung der Zustandsgrößen aus der Gütefunktion mithilfe der Gleichheitsnebenbedingungen (3.49) und (3.50) (vgl. [BBM17, Kapitel 8.2 u. 9.2]). Dabei wird die Zustandsvariable in der Gütefunktion durch die Systemgleichungen substituiert. Die Gütefunktion hängt nach der Substitution nur vom Anfangszustand  $\mathbf{x}(k)$  und den zu berechnenden Steuergrößen über dem Horizont  $n_h$  ab. Dieses Vorgehen wird in der Literatur als *Condensing* bezeichnet (z. B. [DFH09, Kapitel 4.3], [BBM17, Kapitel 14.2]). Zum einen entfallen dadurch die Gleichheitsnebenbedingungen und zum anderen reduziert sich die Anzahl der Optimierungsvariablen, da nur die Systemeingänge  $\mathbf{u}_s(k)$  variiert werden müssen. Dieses Vorgehen ist daher nur möglich, wenn folgende Voraussetzung erfüllt ist:

**Lemma 3.4 (Voraussetzung für *Condensing* ([DFH09, Kapitel 4.3]))**

*Ist der Vektor  $\mathbf{x}_s(k)$  über ein affines, zeitvariantes System eindeutig durch die Eingänge  $\mathbf{u}_s(k)$  und den Anfangszustand  $\mathbf{x}(k-1)$  bestimmt, kann er durch die Systemgleichung ersetzt werden.*

Das kondensierte Optimierungsproblem ergibt sich zu:

**Definition 3.12 (MPC-Optimierungsproblem in kondensierter Form)**

$$\mathbf{u}_s^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_s(k) \in \mathcal{U}_s} J_s(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k), k) \quad (3.51)$$

Die Zustandsbeschränkungen sind entfallen, da die Zustände nicht Teil der Optimierung sind. Das *Condensing* findet bei quadratischen Gütefunktionen und linearen Systemmodellen Anwendung, wenn sie mit projizierenden gradientenbasierten Optimierungsverfahren gelöst werden (vgl. [BBM17, Kapitel 14.2]). Dort ist dies besonders wichtig, da die Optimierung mit diesen Verfahren keine zusätzlichen Gleichheitsnebenbedingungen ermöglichen. Es sind inhärent ausschließlich Ungleichheitsnebenbedingungen für die Eingänge möglich. Wie dieser Ansatz um Zustandsbeschränkungen erweitert werden kann, ist ein Beitrag dieser Arbeit und in Abschnitt 4.3 zu finden.

### 3.3.3 Betrachtung einschrittiger und mehrschrittiger MPC-Ansätze

In diesem Abschnitt wird die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Lösungsmethode auf Optimierungsprobleme im MPC übertragen. Dies erfolgt zunächst für einen Prädiktionshorizont der Länge  $n_h = 1$  und wird anschließend auf längere Horizonte übertragen. Durch die Kombination der Definition 3.12 eines kondensierten MPC-Optimierungsproblems und der Definition 3.8 eines LOP  $(\mathcal{L}, \mathbf{J}) / (\mathbb{R}^{n_J}, \leq_{\text{lex}})$  ergibt sich die Definition des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems  $(\mathcal{U}_s, \mathbf{J}_s) / (\mathbb{R}^{n_J}, \leq_{\text{lex}})$ :

**Definition 3.13 (Lexikographisches MPC-Optimierungsproblem)**

$$\mathbf{u}_s^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_s(k) \in \mathcal{U}_s} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_s(k), k) \quad (3.52)$$

Zunächst wird das MPC-Optimierungsproblem ohne Eingangsbeschränkungen betrachtet. Die Auswirkungen einer aktiven Beschränkung werden in Abschnitt 4.4 diskutiert. Im Folgenden werden die Voraussetzungen für die Anwendung der vorgestellten Lösungsmethode V1 auf Seite 45 geprüft. Ohne die Eingangsbeschränkungen  $\mathbf{u}_s(k) \in \mathcal{U}_s$  gilt  $\mathbf{u}_s(k) \in \mathbb{R}^{n_L}$  und die Voraussetzung V1.1 ist direkt erfüllt. Die Dimension des Lösungsraums ergibt sich aus der



Länge des zu berechnenden optimalen Steuervektors  $\mathbf{u}_s^*(k)$  zu  $n_L = n_h n_u$ . Bei der Übertragung der Strukturanforderungen V1.2 auf die Gütefunktionen des Gütefunktionsvektors  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [J_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, J_{n_J}(\boldsymbol{\theta})]^\top$  wird angenommen, dass jede dieser Gütefunktionen gleichermaßen in jedem Horizontschritt Anwendung findet. Daraus resultiert, dass sich die Dimensionen  $m_i$  der Bildmenge der Abbildungen  $\mathbf{d}_i$  als ein Vielfaches  $o_i$  der Horizontlänge  $n_h$  darstellen, denn für jeden Horizontschritt müssen gleichviel Zeilen in  $\mathbf{d}_i$  existieren. Aufgrund der obigen Erkenntnisse und der Anforderung an die Dimensionen V1.5 müssen folgende Gleichungen für  $n_L, n_J, m_i, n_u, n_h, o_i \in \mathbb{N}$  erfüllt sein:

$$n_L - 1 = \sum_{i=1}^{n_J-1} m_i, \quad (3.53)$$

$$n_h n_u - 1 = n_h \sum_{i=1}^{n_J-1} o_i, \quad (3.54)$$

$$n_u - \frac{1}{n_h} = \sum_{i=1}^{n_J-1} o_i. \quad (3.55)$$

Aus Gleichung (3.55) ist unmittelbar ersichtlich, dass Anforderung V1.5 nur für  $n_h = 1$  erfüllt sein kann. Zusammenfassend ergeben sich daher zur Anwendung von Satz 3.4 auf lexikographische MPC-Optimierungsprobleme mit einem Horizont von eins zusätzlich zu V1 folgende Voraussetzungen:

V2 Voraussetzungen zur direkten Anwendung von Satz 3.4 auf Optimierungsprobleme in einem MPC

V2.1 Der Horizont hat die Länge eins:  $n_h = 1$ .

V2.2 Für  $n_J, m_i, n_u, n_h, o_i \in \mathbb{N}$  gilt  $n_h n_u - 1 = n_h \sum_{i=1}^{n_J-1} o_i$ .

Wobei aus obigen Erläuterungen hervorgeht, dass V2.2 gleichbedeutend ist mit V1.5 unter der Annahme  $n_h = 1$ . Daher ergibt sich folgender Satz:

**Satz 3.5 (Lösung des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems mit ein-schrittigem Horizont durch Transformation)**

*Sind die Voraussetzungen V1 und V2 erfüllt, kann mit Satz 3.4 die lexikographisch optimale Steuerfolge  $\mathbf{u}_s^*(k)$  des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems in Definition 3.13 berechnet werden.*

Für die Anwendung bei MPC-Optimierungsproblemen mit größerem Horizont ist eine strengere Anforderung notwendig, damit die vorgestellte Methode angewendet werden kann. Die optimale Lösungsmenge nach der Optimierung der ersten  $q = n_J - 1$  Gütefunktionen  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  bis  $J_{n_J-1}(\boldsymbol{\theta})$  ist nicht leer, wenn

$$n_h \sum_{i=1}^{n_J-1} o_i \leq n_h n_u - 1 \quad (3.56)$$

erfüllt ist. Im Falle der Gleichheit sind wie oben beschrieben direkt alle Voraussetzungen V1 von Seite 45 erfüllt, daher wird der Fall für echte Ungleichheit betrachtet. In diesem Fall ergibt sich für die Dimension des Kerns der Koeffizientenmatrix

$$\dim\left(\text{Kern}\left(\left[\mathbf{W}_1^\top \quad \dots \quad \mathbf{W}_{n_J-1}^\top\right]^\top\right)\right) > 1, \quad (3.57)$$

da die Koeffizientenmatrix die Dimension

$$\left(\sum_{i=1}^{n_J-1} m_i\right) \times n_h n_u \quad (3.58)$$

hat. Sie hat nach Voraussetzung V1.3 zwar vollen Rang, jedoch kann dieser nicht die Anzahl der Zeilen überschreiten, die nach Ungleichung (3.56) im hier betrachteten Fall um mindestens zwei kleiner sein muss als die Spaltenanzahl. Der mehrdimensionale Kern der Koeffizientenmatrix kann nicht wie in Abschnitt 3.2 eindeutig durch einen Vektor  $\mathbf{r}$  beschrieben werden. Somit muss Satz 3.4 angepasst werden. Hierfür wird die orthogonale Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  benötigt, die wie folgt definiert ist.

**Definition 3.14 (Orthogonale Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$ )**

Für die orthogonale Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$  gilt

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top \text{ und } \mathbf{a}^\top \mathbf{R} \mathbf{b} = 0$$

für alle linear abhängigen Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

Die Erweiterung von Satz 3.4 für Horizontlängen größer eins erfordert die zusätzlichen Voraussetzungen:

V3 Voraussetzungen zur Berechnung von  $\mathbf{u}_s^*(k)$  eines lexikographischen MPC-Optimierungsproblems mit  $n_h > 1$  durch Satz 3.6

V3.1 Für  $n_J, n_u, o_i \in \mathbb{N}$  gilt

V3.1.1  $n_u = 2,$

V3.1.2  $n_J = 2, o_i = 1.$

V3.2 Die Gütefunktion  $J_2(\mathbf{u}_s(k))$  lässt sich darstellen durch

$$J_2(\mathbf{u}_s(k)) = \mathbf{u}_s(k)^\top \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_s(k) + \mathbf{h}_2^\top \mathbf{u}_s(k) + h_2 \text{ mit } \mathbf{H}_2 \succeq 0. \quad (3.59)$$

V3.3 Das MPC-Optimierungsproblem wird für konstante Solldrehmomente betrachtet und hat eine konstante stationäre Lösung mit

$$\mathbf{u}(k) = \dots = \mathbf{u}(k + n_h - 1), \quad (3.60)$$

$$\mathbf{x}(k) = \dots = \mathbf{x}(k + n_h - 1). \quad (3.61)$$

V3.4 Wie oben beschrieben gilt die Vorgabe, dass jede Gütefunktion gleichermaßen in jedem Horizontschritt wirkt.

V3.4.1 Dies äußert sich in der Struktur der Gütefunktion  $J_1(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k))$  vor der Substitution:

$$J_1(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k)) = \sum_{i=1}^{n_h} J_{1,i}(\mathbf{x}(k+i-1), \mathbf{u}(k+i-1)) \quad (3.62)$$

mit

$$\forall i, j \in \mathcal{I}_{n_h} : J_{1,i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J_{1,j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.63)$$

da

$$\forall i \in \mathcal{I}_{n_h} : J_{1,i}(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k)) = J_{1,i}(\mathbf{x}(k+i-1), \mathbf{u}(k+i-1)). \quad (3.64)$$

V3.4.2 Analog gilt für  $J_2(\mathbf{u}_s(k))$ :

$$J_2(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k)) = \sum_{i=1}^{n_h} J_{2,i}(\mathbf{x}(k+i-1), \mathbf{u}(k+i-1)) \quad (3.65)$$

mit

$$\forall i, j \in \mathcal{I}_{n_h} : J_{2,i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J_{2,j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3.66)$$

V3.5 Die Rangbedingung

$$\text{rg} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \mathbf{R}^\top \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{W}_1 \end{bmatrix} \right) = n_h n_u = 2n_h \quad (3.67)$$

ist erfüllt.

Im Folgenden werden diese Voraussetzungen erläutert und interpretiert. Voraussetzung V3.1.1 ermöglicht die Berechnung des Kerns jeder Teilmatrix  $\mathbf{W}_i^\top$ ,  $i \in \mathcal{I}_{p-1}$  eines Horizontschritts durch die orthogonale Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$ . Hat der Steuervektor eine höhere Dimension, hat der Kern dieser Teilmatrix eine höhere Dimension als eins und kann nicht durch einen Vektor der mittels der orthogonalen Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  berechnet wird, eindeutig bestimmt werden. Voraussetzung V3.1.2 leitet sich unmittelbar ab aus  $n_u = 2$  in V3.1.1 und Ungleichung (3.56):

$$\sum_{i=1}^{n_J-1} m_i \leq n_h n_u - 1 \quad (3.68)$$

$$n_h \sum_{i=1}^{n_J-1} o_i \leq n_h n_u - 1 \quad (3.69)$$

$$\sum_{i=1}^{n_J-1} o_i \leq 2 - \frac{1}{n_h}. \quad (3.70)$$

Daher kann für  $n_J, o_i \neq 0$  und  $n_h > 1$  nur die Wahl  $n_J = 2$  und  $o_i = 1$  getroffen werden. Denn laut Voraussetzung V1.5 muss  $n_J > 1$  sein, da ansonsten kein MOP vorliegt. Geometrisch interpretiert muss die Forderung  $o_i = 1$  erfüllt sein, damit wiederum der Kern jeder Teilmatrix  $\mathbf{W}_i^\top$ ,  $i \in \mathcal{I}_{p-1}$  die Dimension eins behält. Mithilfe der diskutierten Voraussetzungen ergibt sich der folgende Satz.

**Satz 3.6 (Lösung des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems mit mehrschrittigem Horizont durch Transformation)**

*Sind die Voraussetzungen V1<sup>28</sup> und V3 erfüllt, kann die lexikographisch optimale Steuerfolge  $\mathbf{u}_s^*(k)$  des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems in Definition 3.13 durch*

$$\mathbf{u}_s^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_s(k)} J_1(\mathbf{u}_s(k)) + J_{2T}(\mathbf{u}_s(k))$$

$$\text{mit } J_{2T}(\mathbf{u}(k)) := \sum_{i=1}^{n_h} \left( \frac{\partial J_2(\mathbf{u}_s(k))}{\partial \mathbf{R} \nabla d_{1,i}(\mathbf{u}_s(k))} \right)^2$$

*und  $\mathbf{R}$  nach Definition 3.14 berechnet werden.*

**Beweis:**

Der Beweis vollzieht sich bis zu Gleichung (3.22) vollständig analog zum Beweis von Satz 3.4 auf Seite 53. Ab der geometrischen Interpretation des KKT-Kegels ergibt sich im

<sup>28</sup> Unter Ausschluss von V1.5, da diese Voraussetzung in V3 für  $n_h > 1$  angepasst ist.

vorliegenden Fall der Unterschied, dass dieser keine Hyperebene mehr ist. Folglich kann er nicht eindeutig durch einen Vektor im Kern der Koeffizientenmatrix

$$\text{Kern}(\mathbf{W}_1) = \text{Kern}\left([\mathbf{w}_{1,1} \ \dots \ \mathbf{w}_{1,n_h}]^\top\right) \quad (3.71)$$

beschrieben werden. Dieser hat die Dimension  $2n_h - n_h = n_h$ , da bei zeilenregulärem  $\mathbf{W}_1$  (Voraussetzung V1.3) der Defekt der Differenz aus Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix entspricht. Anstatt eine Basis für den Kern zu bestimmen, wird ein einfacher Ansatz gewählt, um die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu vermeiden. Dies ist der Grund für die strengeren Voraussetzungen V3 im Vergleich zum Fall  $n_h = 1$  mit den Voraussetzungen V2. Im Folgenden wird zunächst die lexikographische Lösung im ersten Horizontschritt mit den bereits beschriebenen Methoden betrachtet. Dabei findet Voraussetzung V3.4 Verwendung. Der Fall  $i = 1$  entspricht der Gütefunktion

$$J_{1,1}(\mathbf{x}_s(k), \mathbf{u}_s(k)) = J_{1,1}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (3.72)$$

die das Regelziel im ersten Horizontschritt abbildet. Ein Argument der Funktion ist der Zustand  $\mathbf{x}(k)$ , welcher der gegebene Anfangszustand ist und als konstant betrachtet wird. Die Gütefunktion hängt demnach nur von den Eingängen  $\mathbf{u}(k)$  ab. Es handelt sich folglich um eine Gütefunktion

$$J_{1,1}(\mathbf{u}(k)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.73)$$

welche einen zweidimensionalen Lösungsraum hat. In diesem Fall kann die lexikographische optimale Lösungsmenge  $\mathcal{L}^{*\text{lex}}(\mathbf{J}, \mathbb{R}^2)$  für den Gütefunktionsvektor

$$\mathbf{J} = [J_{1,1}(\mathbf{u}(k)) \quad J_{2,1}(\mathbf{u}(k))] \quad (3.74)$$

durch Anwendung von Satz 3.4 durch

$$\mathbf{u}^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} \mathbf{J}_{1,1}(\mathbf{u}(k)) + \left( \frac{\partial \mathbf{J}_2(\mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{r}_{1,1}} \right)^2 \quad (3.75)$$

berechnet werden. Wobei der Richtungsvektor  $\mathbf{r}_{1,1}$  im

$$\text{Kern}(\nabla d_{1,1}(\mathbf{u}(k))) = \text{Kern}(\tilde{\mathbf{w}}_{1,1}^\top) \quad (3.76)$$

liegen muss. Dabei entsteht  $\tilde{\mathbf{w}}_{1,1}^\top$  aus  $\mathbf{w}_{1,1}^\top$  durch das Weglassen der  $n_u(n_h - 1) = 2(n_h - 1)$  letzten Spalten, die aufgrund obiger Erklärung null sind. Ein Basisvektor dieses Kerns kann im zweidimensionalen Lösungsraum durch

$$\mathbf{r}_{1,1} = \mathbf{R}\mathbf{w}_{1,1} \quad (3.77)$$

berechnet werden. Da dieses Problem unabhängig von  $\mathbf{u}(k+1)$  bis  $\mathbf{u}(k+n_h-1)$  ist, ändert sich das Ergebnis für  $\mathbf{u}^*(k)$  nicht, wenn die weiteren Dimensionen mit betrachtet werden:

$$\mathbf{u}_s^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_s(k)} J_{1,1}(\mathbf{u}_s(k)) + \left( \frac{\partial J_2(\mathbf{u}_s(k))}{\partial \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,1}} \right)^2. \quad (3.78)$$

Im stationären Fall sind die Zustände und Eingänge in jedem Horizontschritt gleich (siehe Voraussetzung V3.3). Zudem sind die Gütefunktionen  $J_{1,i}$  und  $J_{2,i}$  nach Voraussetzung V3.4 über dem Horizont gleich. Daher ergibt sich, dass Gleichung (3.78) bereits ausreicht, um die stationäre lexikographisch optimale Steuergröße zu berechnen.

Der Beweis ist an dieser Stelle nicht abgeschlossen, da nicht die gleiche Form wie in Satz 3.6 erreicht ist. Diese erweiterte Form wird verwendet, da in Gleichung (3.78) Freiheitsgrade verbleiben, wenn kein stationärer Zustand (Voraussetzung V3.3) vorliegt. Die grundlegende Idee zur Reduzierung dieses Freiheitsgrades ist die Verwendung der eben beschriebenen Strategie des ersten Horizontschritts für die verbleibenden Horizontschritte. Das bedeutet, dass für die Gütefunktion  $J_{1,i}(\mathbf{u}_s(k))$  eines Horizontschritts ein Vektor  $\mathbf{r}_{1,i}$  bestimmt wird, der im jeweiligen Kern der zugehörigen Zeile der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{w}_{1,i}^\top$  liegt. Die Vektoren  $\mathbf{r}_{1,i}, i \in \mathcal{I}_{n_h}$  spannen nicht den Kern der Koeffizientenmatrix auf, aber es gilt

$$\forall i \in \mathcal{I}_{n_h} : \mathbf{r}_{1,i} = \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,i} \in \text{Kern}(d_{1,i}(\mathbf{u}_s(k))). \quad (3.79)$$

Die Minimierung über die Summe aller Gütefunktionen

$$\sum_{i=1}^{n_h} \left( J_{1,i}(\mathbf{u}_s(k)) + \left( \frac{\partial J_2(\mathbf{u}_s(k))}{\partial \mathbf{R} \nabla d_{1,i}(\mathbf{u}_s(k))} \right)^2 \right) \quad (3.80)$$

verschiebt nicht den Lösungspunkt aus der Betrachtung des ersten Schrittes in Gleichung (3.78), damit die lexikographische Lösung für den stationären Fall erhalten bleibt. Um dies zu zeigen wird zunächst die Koeffizientenmatrix des Gesamtproblems betrachtet.

Die Gütefunktion  $J_2(\mathbf{u}_s(k))$  nach Gleichung (3.59) hat den Gradienten

$$\nabla J_2(\mathbf{u}_s(k)) = 2 \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_s(k). \quad (3.81)$$

Daher berechnen sich die Summanden mit Richtungsableitung aus Gleichung (3.80) zu

$$\left( \frac{\partial J_2(\mathbf{u}_s(k))}{\partial \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,i}} \right)^2 = ((\nabla J_2(\mathbf{u}_s(k)))^\top \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,i})^2 \quad (3.82)$$

$$= (2 \mathbf{u}_s(k)^\top \mathbf{H}_2^\top \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,i})^2. \quad (3.83)$$

Diese werden genau dann minimal, wenn die Wurzel obiger Gleichung null ergibt. Es ist eine lineare Gleichung in  $\mathbf{u}_s(k)$  und damit liegt die gleiche Form vor wie in Gleichung (3.3). Daher ist die Voraussetzung gegeben, um Lemma 3.1 auf die Summe über die Summanden mit Richtungsableitung anzuwenden. Hierfür werden die Koeffizientenmatrizen der zugehörigen Gleichungssysteme der optimalen Lösungsmengen betrachtet. Für die Terme mit Richtungsableitung ergibt sich die Koeffizientenmatrix

$$\left[ \mathbf{H}_2^\top \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{H}_2^\top \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,n_h} \right]^\top. \quad (3.84)$$

Wird diese zusammen mit der Koeffizientenmatrix der Summanden  $J_{1,i}(\mathbf{u}_s(k))$  betrachtet, entsteht die Koeffizientenmatrix des Gesamtsystems:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{1,n_h}^\top \end{bmatrix} & \mathbf{R}^\top \mathbf{H}_2 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{1,n_h}^\top \end{bmatrix} & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \mathbf{R}^\top \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{W}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Diese Matrix hat aufgrund von Voraussetzung V3.5 vollen Rang. Nach Anwendung von Lemma 3.1 gilt, dass die Schnittmenge der Lösungsräume nicht leer ist:

$$\bigcap_{i=1}^{n_h} \mathcal{L}^*(J_i(\mathbf{u}_s(k)), \mathbb{R}^{n_h n_u}) \cap \bigcap_{i=1}^{n_h} \mathcal{L}^*\left(\frac{\partial J_2(\mathbf{u}_s(k))}{\partial \mathbf{R} \mathbf{w}_{1,i}^\top}, \mathbb{R}^{n_h n_u}\right) \neq \emptyset. \quad (3.86)$$

Alle Summanden aus Gleichung (3.80) können gleichzeitig minimal werden. Somit ist bewiesen, dass durch Hinzunahme der weiteren Summanden das Minimum der Gesamtfunktion nicht vom Minimum des ersten Horizontschritts abweicht.  $\square$

Es folgt die zusammenfassende Einordnung der Ergebnisse. Für den Fall  $n_h > 1$  stimmt der durch Satz 3.6 ermittelte Punkt im Allgemeinen nur mit der Lösung des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems in Definition 3.13 überein, wenn ein konstanter stationärer Zustand erreicht ist. Für den Fall  $n_h = 1$  ist die Übereinstimmung zusätzlich für dynamische Vorgänge ohne Erreichen der Stellgrößenbegrenzung gezeigt, dies ist für  $n_h > 1$  nicht möglich. Abschließend wird das motivierende Beispiel 3.2 erneut zur Veranschaulichung aufgegriffen.

### Beispiel 3.3:

Am Beispiel von zwei Eingängen ( $n_u = 2$ ), einem einschrittigen Prädiktionshorizont ( $n_h = 1$ ) und zwei Gütefunktionen ( $n_J = 2$ ), wobei die Gütefunktion  $J_2$  aus einer eindimensionalen

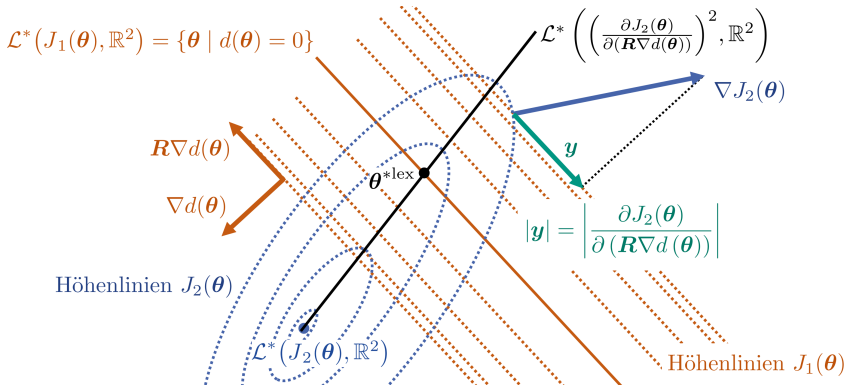


Abbildung 3.3: Graphische Veranschaulichung der Transformation der Gütefunktion

Funktion  $d = d$  ( $m_i = 1$ ) besteht, erfolgt hier eine graphische Interpretation der Berechnung für die in Abbildung 3.3 durch ihre Höhenlinien gegebenen Funktionen  $J_1$  (orangene Punktlinie) und  $J_2$  (blaue Punktlinie). Dort sind ebenfalls die optimalen Lösungsmengen der Funktion  $J_1$  (orangene Volllinie) und  $J_2$  (blauer Punkt) sowie der berechneten Gütefunktion  $J_{2T}$  (schwarze Volllinie) abgebildet. Hier werden die zugehörigen Berechnungsschritte zur Ermittlung von  $\theta^{*\text{lex}}$  durch Satz 3.4 in einer didaktischen Abfolge erläutert. Der Gradient  $\nabla d(\theta)$  wird durch die Multiplikation mit  $\mathbf{R}$  nach Definition 3.14 in seinen Kern gedreht. Dieser Vektor zeigt in eine Richtung, die parallel zu allen Höhenlinien von  $J_1$  ist. Auf diese Richtung wird der Gradient der Gütefunktion  $J_2$  projiziert. Die Länge des Vektors  $\mathbf{y}$  ist ein Maß für die Änderungsrate der Gütefunktion  $J_2$  in der Richtung, in der  $J_1$  konstant ist. Das Quadrat dieses Maßes wird überall dort minimal, wo keine Verbesserung in der Gütefunktion  $J_2$  erzielt werden kann ohne die Güte von  $J_1$  zu verändern. Diese Punkte sind Teil der optimalen Lösungsmenge

$$\mathcal{L}^* \left( \left( \frac{\partial J_2(\theta)}{\partial (\mathbf{R} \nabla d(\theta))} \right)^2, \mathbb{R}^2 \right) \quad (3.87)$$

des zweiten Anteils der Gesamtgütefunktion. Diese hat mit der optimalen Lösungsmenge  $\mathcal{L}^*(J_1(\theta), \mathbb{R}^2)$  genau einen Schnittpunkt, der dem lexikographischen Minimum  $\theta^{*\text{lex}}$  des Gütefunktionsvektors  $\mathbf{J} = [J_1, J_2]^\top$  entspricht.

### 3.4 Lexikographisches MPC-Optimierungsproblem für eine PSM

In diesem Abschnitt erfolgte die Anwendung der zuvor beschriebenen lexikographischen Optimierung durch Transformation auf das MPC-Optimierungsproblem der PSM.



In den Unterabschnitten 3.4.1 bis 3.4.3 werden die Regelziele für die verlustoptimale Drehmomenterreichung der PSM vorerst unabhängig voneinander betrachtet. Die beiden Regelziele werden jeweils durch konvexe Gütefunktionen beschrieben. Dies stellt einen Übergang von einer semantischen Zieldefinition zu einer Quantifizierung dar. Der Übergang besteht wiederum aus zwei Teilaspekten: Zum einen wird das Regelziel mathematisch formal definiert und zum zweiten wird ein Maß entworfen, das beschreibt, wie gut das Regelziel erreicht wird. Es beschreibt die Güte der Zielerreichung, weshalb es ebenso als Gütemaß bezeichnet wird. Die Erhaltung der Konvexität der Gütefunktion ist dabei zentral. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass es keine lokalen Minima gibt. Somit ist beim Auffinden eines Extremwerts durch die Optimierung sichergestellt, dass es sich um das globale Optimum handelt. Die Konvexität ist gegeben, wenn die bisher formulierten Voraussetzungen eingehalten werden. Sie fordern die strenge Konvexität der am niedrigsten priorisierten Gütefunktion und die Konvexität der anderen Gütefunktionen aufgrund ihrer Struktur. Die Ziele der Anwendung werden vorrangig so beschrieben, dass die zuvor eingeführte Methode angewendet werden kann. Eine naheliegende Metrik zur Regelzielbewertung ist die Bewertung anhand des euklidischen Abstands zu einem Zielzustand. In MPC-Ansätzen werden aber meist quadratische Gütefunktionen eingesetzt. Dies ist zunächst eine willkürliche Festlegung zur Generierung einer Metrik zur Regelzielbewertung, die jedoch bei der mathematischen Behandlung vorteilhaft ist ([BBM17, Vorwort]). Zusätzlich wird sie damit begründet, dass große Abweichungen vom Zielzustand überproportional bestraft werden sollen im Vergleich zu kleinen Abständen.

Die letzten beiden Unterabschnitte 3.4.4 und 3.4.5 erläutern, wie die vorgestellten Ansätze der ersten drei Abschnitte mit dem lexikographischen MPC-Optimierungsproblem aus Abschnitt 3.3 kombiniert werden. Dies erfolgt weiterhin unter der Hypothese einer Optimierung unter den formulierten Voraussetzungen. Neben den Strukturanforderungen ist im Wesentlichen ein unbeschränktes ( $n_h = 1$ ) oder stationäres ( $n_h > 1$ ) MPC-Optimierungsproblem vorausgesetzt. Die Auswirkungen auf den Betrieb des MPC während deren Verletzung werden im Folgekapitel betrachtet.

### 3.4.1 Bewertung der Verluste

Bei der Bewertung der Verluste werden die ohmschen Verluste der Maschine betrachtet. Sie sind mit Abstand der dominanteste Anteil an den Verlusten im betrachteten Maschinentyp.<sup>29</sup> In der Bachelorarbeit [Ste17] ist für deren stationären Betrieb gezeigt, dass die Verlusteinsparung bei zusätzlicher Berücksichtigung der Eisenverluste für die Erstellung der Zuordnung von Sollströmen zu Solldrehmoment nur in einem kleinen Betriebsbereich vorteilhaft ist. Dieser Bereich liegt bei geringem Drehmoment innerhalb des Grunddrehzahlbereichs an der Grenze zum Feldschwächbereich und hat für die in Kapitel 5 betrachtete Maschine ein maximales

---

<sup>29</sup> Zu diesem Ergebnis kam die Untersuchung der Verlustarten für den in Kapitel 5 betrachteten Maschinentyp in der Masterarbeit [Par17].

Verlusteinsparpotential von 6 %. Unter Vernachlässigung der Frequenz- und Temperaturabhängigkeit können ohmsche Verluste in normierten Koordinaten durch

$$p_V = \frac{3}{2} r_S (i_d^2 + i_q^2) \quad (3.88)$$

berechnet werden. Der Faktor  $\frac{3}{2}$  ergibt sich aus der Betrachtung einer dreiphasigen Maschine und der Umrechnung der Amplituden auf Effektivwerte, da hier die amplitudeninvariante Koordinatentransformation (siehe z. B. [Sch13, Kap. 5.3.1]) eingesetzt wird:  $\frac{3}{2} = 3 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Diese Faktoren spielen bei der Optimierung keine Rolle, da bei der Komposition der Gesamtgütefunktion eine gewichtete Summe gebildet wird. Unter Berücksichtigung der Zustandsdefinition  $\mathbf{x}(k) = [i_d(k) \quad i_q(k)]^\top$  ergibt sich für die Bewertung der Verluste der Maschine in einem Zeitschritt  $k$  die Gütefunktion

$$J_V(k, \mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}(k)^\top \mathbf{x}(k). \quad (3.89)$$

Zur besseren Lesbarkeit werden ab hier die Argumente der Gütefunktion bis auf den Zeitschritt weggelassen. Dieser verbleibt, um zu verdeutlichen, dass die Gütefunktion über den Zeitschritten nicht konstant ist. Dass ihr Wert von den zukünftigen Eingangs- und Zustandsverläufen abhängt, wird nicht explizit notiert. Die Summe der Verluste  $J_V(k)$  über den Zeitschritten des Horizonts kann als Posynomialfunktion mithilfe der gestapelten Zustände durch

$$J_{2x}(k) = \mathbf{x}_s(k)^\top \mathbf{x}_s(k) \quad (3.90)$$

dargestellt werden. In der Komposition des Gesamtregelziels sind die Verluste von zweithöchster Priorität, weshalb die Gütefunktion den Index zwei erhält. Der zusätzliche Index  $x$  notiert, dass diese Gütefunktion nicht über dem Lösungsraum des MPC-Optimierungsproblems, sondern über dem Zustandsraum definiert ist. Diese Funktion ist bereits quadratisch und vereinfacht wie zu Beginn des Abschnitts motiviert die weitere Betrachtung. Sie ist zweifach stetig differenzierbar und kann daher einfach auf Konvexität überprüft werden:  $J_{2x}(k)$  ist bezüglich  $\mathbf{x}_s(k)$  streng konvex, da die Eigenwerte ihrer Hessematrix  $\mathcal{H}(J_{2x}) = 2\mathbf{I}$  in der gesamten Definitionsmenge  $\mathbb{R}^{2n_h}$  streng größer null sind ([BV04, Kap 3.1.4]).

### 3.4.2 Bewertung der Erreichung des Solldrehmoments durch die affin approximierten Ausgangsgleichung

In diesem Abschnitt wird das Regelziel Solldrehmomenterreicherung formalisiert und quantifiziert. Eingangs des Kapitels ist auf die mathematischen Vorzüge der Verwendung von quadratischen Funktionen hingewiesen. Dieser Ansatz wird hier unmittelbar verfolgt und die Abweichung vom Solldrehmoment, das durch die affin approximierten Ausgangsgleichung modelliert ist, bestraft. Hier erfolgt direkt die Darstellung über dem Prädiktionshorizont des MPC mithilfe der gestapelten Ausgangsgleichung (2.30):

$$\begin{aligned}
J_{1x}(k) &= \|\mathbf{y}_{\text{as}}(k) - \mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k)\|_2^2 \\
&= \mathbf{x}_s(k)^\top \mathbf{C}_s^\top \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s(k) + 2(\mathbf{F}_s - \mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k))^\top \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s(k) + \|(\mathbf{F}_s - \mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k))\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Die Erreichung des Solldrehmoments hat bei der Komposition die höchste Priorität, weshalb die Gütefunktion den Index eins erhält.  $\mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k)$  enthält die Solldrehmomente  $m_{\text{soll}}(k)$  über dem Prädiktionshorizont nach dem in Abschnitt 2.2 vorgestellten Schema:

$$\mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k) := [m_{\text{soll}}(k) \quad \dots \quad m_{\text{soll}}(k + n_h - 1)]^\top. \tag{3.92}$$

Aufgrund der Analogie dieser Gleichung zu Gleichung (3.3) ergibt sich durch Lemma 3.2 unmittelbar die Konvexität dieser Funktion.

### 3.4.3 Bewertung der Erreichung des Solldrehmoments durch die quadratisch approximierte Ausgangsgleichung

In diesem Abschnitt wird ein Vorgehen vorgestellt, das anstelle der affinen Ausgangsgleichung  $\mathbf{y}_{\text{as}}(k)$  die quadratische Ausgangsgleichung  $\mathbf{y}_{\text{qs}}(k)$  nach Gleichung (2.31) für die Beschreibung des Solldrehmoments in der Gütefunktion einsetzt. Da  $\mathbf{y}_{\text{qs}}(k)$  bereits quadratisch ist, entsteht durch den analogen Ansatz wie im vorigen Abschnitt eine quartische Funktion:

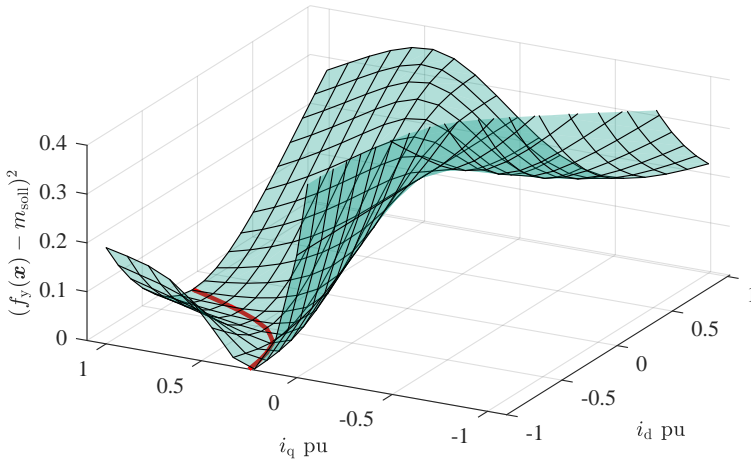
$$\hat{J}_{1,\text{xq}}(k) = \|\mathbf{y}_{\text{qs}}(k) - \mathbf{y}_{\text{s,soll}}(k)\|_2^2. \tag{3.93}$$

Weil diese Funktion nicht konvex ist, wird sie nicht nur in den angestrebten Zielzuständen minimal. Die Ursache ist in Unterabschnitt 2.1.2 bereits beschrieben. Dies äußert sich in  $\hat{J}_{1,\text{xq}}(k)$  durch zwei disjunkte Teilmengen mit gleicher Güte, welche die optimale Lösungsmenge bilden. Dieses grundlegende Problem besteht bereits inhärent durch die Ausgangsgleichung der nichtlinearen Maschine. Zur Veranschaulichung, wird hier erneut das Beispiel 2.1 aus Unterabschnitt 2.1.2 aufgegriffen.

#### Beispiel 3.4:

In Abbildung 3.4 ist eine Gütefunktion  $(f_y(\mathbf{x}) - m_{\text{soll}})^2$  mit der Ausgangsgleichung  $f_y(\mathbf{x}) = \psi_d i_q - \psi_q i_d$  als Fläche über dem Zustandsraum beispielhaft für eine PSM (Maschinendaten siehe Unterabschnitt 5.1.1) veranschaulicht. Zusätzlich ist in Rot die Zielzustandsmenge für  $m_{\text{soll}} = 0,5 \text{ pu}$  eingezeichnet. Die fehlende Konvexität der Gütefunktion ist deutlich zu erkennen.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass diese Funktion nicht ohne weitere Beschränkungen als Gütefunktion geeignet ist. Um nicht die Komplexität des Optimierungsproblems durch das Hinzufügen weiterer Ungleichheitsnebenbedingungen zu erhöhen, wird hier ein anderer Ansatz



**Abbildung 3.4:** Gütefunktion über dem Zustandsraum mit nichtlinearer Ausgangsgleichung mit rot eingezeichneter Zielzustandsmenge für ein Solldrehmoment von  $m = 0,5$  pu

vorgestellt. Für die Optimierung wäre eine stetig differenzierbare Konvexifizierung der Funktion  $\hat{J}_{1 \times q}(k)$  in Gleichung (3.93) unter Beibehaltung ihrer optimalen Lösungsmenge erstrebenswert. Dies erlaubt ohne weitere Maßnahmen die Optimierung durch einfache und schnelle Optimierungsalgorithmen. Dieses Ziel kann nicht erreicht werden. Aus der Definition A.2 der Konvexität geht hervor, dass eine konvexe optimale Lösungsmenge eine notwendige Voraussetzung für eine konvexe Funktion ist. Daher kommen für zweidimensionale optimale Lösungsmengen bei einer Optimierung im zweidimensionalen Lösungsraum nur lineare Mannigfaltigkeiten als optimale Lösungsmenge in Betracht. Daraus resultiert die Verwendung der affinen Ausgangsgleichung in dieser Arbeit. Für die Anwendung auf die Drehmomentregelung der PSM stellt die Verwendung der affinen Ausgangsgleichung einen limitierenden Faktor für das erzielbare Regelergebnis des Verfahrens dar. Denn mit wachsender Entfernung vom Entwicklungspunkt der Linearisierung, wächst die Abweichung von der hyperbolischen Zielmenge überproportional. Daher wird an dieser Stelle untersucht inwieweit quadratische Ansätze bei der Modellierung der Ausgangsgleichung im vorgestellten Ansatz eingesetzt werden können.

Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, um quartische Gütefunktionen mit hyperbolischen optimalen Lösungsmengen der Form  $\hat{J}_{1 \times q}(k)$  aus Gleichung (3.93) so zu modifizieren, dass nur eine zusammenhängende optimale Lösungsmenge besteht. Es ermöglicht eine Funktion zu bestimmen, die entweder in Richtung der optimalen Lösungsmenge streng monoton fallend ist und ausschließlich die Zielzustandsmenge als optimale Lösungsmenge hat oder vollständig konvex ist, aber eine größere als die angestrebte Zielzustandsmenge als optimale Lösungsmenge hat. Abschließend folgt ein Abschnitt, der die formalen allgemeingültigen Ergebnisse am Beispiel der Güte der Solldrehmomenterreicherung veranschaulicht.

## Konvexifizierung quartischer Gütefunktionen mit hyperbolischer optimaler Lösungsmenge

Das Verfahren baut auf Methoden der Konvexifizierung aus [DI92, Yan14] auf, welche im Detail im Anhang A.3 vorgestellt werden. Für diesen Abschnitt wird die Gütefunktion für einen Prädiktionshorizont von  $n_h = 1$  betrachtet. Per Definition wird von  $\hat{J}_{1xq}(k)$  in Gleichung (3.93) nur ein Hyperbelast als Zielzustandsmenge betrachtet. Das Ziel ist eine zur optimalen Lösungsmenge monoton fallende, möglichst überall stetig differenzierbare Funktion  $J_{1xq}(k)$  zu generieren. Die Wurzel der Gütefunktion  $\hat{J}_{1xq}(k)$  wird im Folgenden durch

$$\Gamma_x(\mathbf{x}) := y_q(k) - y_{\text{soll}}(k) \quad (3.94)$$

abgekürzt. Zu null gesetzt beschreibt die Gleichung  $\Gamma_x(\mathbf{x}) = 0$  diese Hyperbel. Die folgenden Schritte sind zur besseren Lesbarkeit unter Abweichung von der eingeführten Nomenklatur dargestellt: die Funktion  $\Gamma_x(\mathbf{x})$  ist abhängig vom Systemzustand  $\mathbf{x}$  und nicht vom Zeitschritt  $k$  dargestellt. Es werden folgende Schritte ausgeführt:

### 1. Substitution der Zustände

Ausgehend von  $y_q(k)$  in Gleichung (2.25) erfolgt die Substitution der Zustände durch die Eingänge mit dem Prädiktionsmodell (vgl. *Condensing* in Unterabschnitt 3.3.2). In der Gütefunktion werden die Zustände mithilfe der Systemgleichung (2.23) durch den zu berechnenden Eingang und den aktuellen Zustand, der als Parameter betrachtet wird, ersetzt:

$$\Gamma_x(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{Gleichung (2.23)}} \Gamma_u(\mathbf{u}). \quad (3.95)$$

### 2. Transformation auf Hyperbelnormalform

Die Berechnung vereinfacht sich unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften dieser Hyperbel in ihrer Normalform. In der Normalform liegt der Mittelpunkt einer Hyperbel im Ursprung, die Asymptoten sind achsensymmetrisch zur  $x_1$ -Achse. Hier wird zusätzlich definiert, dass die beiden Scheitel auf der  $x_1$ -Achse liegen und die  $x_2$ -Achse nicht geschnitten wird. Die Transformation besteht aus zwei in Anhang A.4 im Detail dargestellten Schritten: Rotation zur Erzeugung der Spiegelsymmetrie zur Ordinate und Translation des Mittelpunktes der Hyperbel in den Ursprung. In  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ -Koordinaten ergibt sich:

$$\Gamma_u(\mathbf{u}) \xrightarrow{\text{Anhang A.4}} \Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) =: \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{c}}_1^T \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{c}_k. \quad (3.96)$$

In  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ -Koordinaten ergibt sich  $\tilde{J}_{1xq}$  als das Quadrat der Normalform der Hyperbelgleichung:

$$\tilde{J}_{1xq}(\tilde{\mathbf{u}}) := (\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}))^2 = (a\tilde{u}_1^2 + b\tilde{u}_2^2 + c)^2 \quad (3.97)$$

$$\text{mit } a = \tilde{c}_{q1,1}, \quad b = \tilde{c}_{q2,2}, \quad c = \tilde{c}_k, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}_0^+. \quad (3.98)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hier vorausgesetzt, dass  $c > 0$  gilt. Die Konvexifizierungsmethode aus [DI92, Yan14] (siehe Anhang A.3) gibt eine explizite Gleichung an, um die kleinste konvexe Erweiterung (KKE) einer Funktion zu bestimmen. Um die KKE für das vorliegende Problem nutzen zu können, werden im Folgenden diese drei Schritte genauer beschrieben:

**1. Definition einer konvexen Lipschitz-stetigen Funktion auf einer konvexen beschränkten Definitionsmenge**

Die Beschreibung einer konvexen Funktion über einer konvexen Definitionsmenge ist der notwendige Ausgangspunkt, um die KKE anwenden zu können. Hierfür wird die Funktion  $f_H$  erstellt.

**2. Erweiterung der Funktion  $f_H$  durch die KKE**

Die Erstellung der KKE für  $f_H$  gliedert sich aufgrund der notwendigen Fallunterscheidung für deren Bezugspunkte wiederum in zwei Teilschritte.

**3. Modifikation der KKE für stetige Differenzierbarkeit**

Für die Konvergenzeigenschaften der Optimierung der Gütefunktion ist stetige Differenzierbarkeit eine wichtige Eigenschaft. Da dies für die KKE nicht gegeben ist, wird sie dahingehend angepasst.

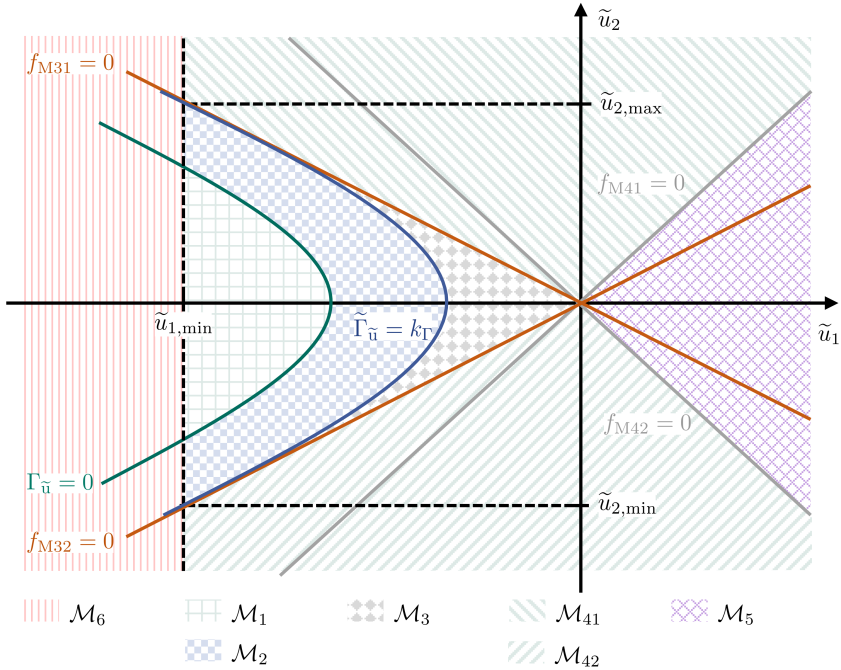
Ausgehend von der Funktion  $\tilde{J}_{1 \times q}$  in Gleichung (3.97) werden weitere disjunkte Mengen des  $\mathbb{R}^2$  und zugehörige Funktionen definiert, um durch deren Kombination per Fallunterscheidung  $J_{1 \times q}$  zu erhalten. Diese weiteren Schritte werden durch die Darstellung der notwendigen Mengen des Lösungsraums in Abbildung 3.5 veranschaulicht. Dort ist die Hyperbel  $\Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{u}) = 0$ , welche  $\tilde{J}_{1 \times q}$  minimiert, in Grün eingezeichnet. Es folgen die drei eben zusammengefassten Schritte im Detail:

**1. Definition einer konvexen Lipschitz-stetigen Funktion auf einer konvexen beschränkten Definitionsmenge**

Um durch die Anwendung von Satz A.2 sicherzustellen, dass die Methode der KKE auf  $\tilde{J}_{1 \times q}$  nur endliche Werte erzeugt, muss eine beschränkte konvexe Menge identifiziert werden, auf der  $\tilde{J}_{1 \times q}$  konvex ist.

**a) Identifikation der konvexen Teilmenge der Definitionsmenge der Gütefunktion  $\tilde{J}_{1 \times q}$**

Positive Definitheit der Hessematrix einer Funktion ist ein notwendiges lokales Kriterium zur Überprüfung der Konvexität. In einem Computeralgebrasystem erfolgt die Analyse der Hessematrix der quartischen Funktion  $(\Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{u}))^2$  auf positive Definitheit. Als Grenze dieser Menge ergibt sich zum einen die Hyperbel  $\Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{u}) = 0$  in negativer  $\tilde{u}_1$ -Richtung sowie die Bedingung  $3a\tilde{u}_1^2 + 3b\tilde{u}_2^2 + c = 0$  in positiver  $\tilde{u}_1$ -Richtung. Die zweite Bedingung kann umgeformt werden, sodass diese Grenze



**Abbildung 3.5:** Einteilung der Mengen zur Konvexifizierung im Koordinatensystem der Normalform

als Höhenlinie der Funktion  $\tilde{J}_{1xq}$  erkennbar ist:

$$\tilde{J}_{1xq}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_{\Gamma}^2 \text{ mit } k_{\Gamma} = \frac{2}{3}c. \quad (3.99)$$

Als Gleichung für die Grenze des konvexen Bereiches ist der dem Ursprung zugewandte Teil der Höhenlinie

$$\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_{\Gamma} \quad (3.100)$$

relevant, wie er in Abbildung 3.5 blau eingezeichnet ist. Durch diese beiden Gleichungen ist die Teilmenge der Definitionsmenge von  $\tilde{J}_{1xq}$  begrenzt, in der diese Funktion konvex ist.

#### b) Weitere Einschränkung des Definitionsbereichs

Eine weitere Einschränkung ist erforderlich, da zum einen Satz A.2 eine beschränkte Menge fordert und zum anderen die Funktion  $\tilde{J}_{1xq}$  nicht im gesamten konvexen Bereich Lipschitz-stetig ist. Für  $\tilde{u}_1 \rightarrow -\infty$  wächst der Differenzenquotient von  $\tilde{J}_{1xq}$  unbeschränkt. Um dies zu vermeiden wird der Parameter  $\tilde{u}_{1,\min}$  eingeführt, der die konvexe Menge in negativer  $\tilde{u}_1$ -Richtung beschränkt. Er kann beliebig, aber endlich, weit in negativer  $\tilde{u}_1$ -Richtung geschoben werden, ohne dass sich die Vorgehensweise ändert. Er stellt daher keine wesentliche Einschränkung dar.

Bei vorhandenen Eingangsbeschränkungen in einem MPC-Optimierungsproblem kann er so gewählt werden, dass alle gültigen Eingänge außerhalb von  $\mathcal{M}_6$  liegen. Er begrenzt den gesamten Definitionsbereich der Ergebnisfunktion auf  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}_6$  mit

$$\mathcal{M}_6 = \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_{1,\min}\}. \quad (3.101)$$

Die drei eingeführten Grenzen bestimmen eine beschränkte Menge

$$\mathcal{M}_2 = \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) > 0, \Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) < k_\Gamma, \tilde{u}_{1,\min} < \tilde{u}_1 < 0\}, \quad (3.102)$$

auf der die Funktion  $\tilde{J}_{1 \times q}$  konvex ist. Hierbei ist  $\tilde{u}_1 < 0$  notwendig, um den hier nicht betrachteten rechten Hyperbelast auszuschließen.

### c) Konvexifizierung des Definitionsbereiches

Die Menge  $\mathcal{M}_2$  selbst ist nicht konvex, weshalb vor der Erweiterung noch ein weiterer Schritt nötig ist. Die Menge  $\mathcal{M}_1$  wird als relative Komplementmenge zu  $\mathcal{M}_2$  in der konvexen Hülle  $\mathcal{M}_{2C} = \text{conv}(\mathcal{M}_2)$  definiert<sup>30</sup>.

$$\mathcal{M}_1 = \text{conv}(\mathcal{M}_2) \setminus \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{2C} \setminus \mathcal{M}_2. \quad (3.103)$$

Es wird eine Hilfsfunktion  $f_H : \mathcal{M}_{2C} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, welche auf der konvexen Definitionsmenge  $\mathcal{M}_{2C}$  konvex ist:

$$f_H(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \tilde{J}_{1 \times q}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_2 \\ 0 & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_1 \end{cases}. \quad (3.104)$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar sowie Lipschitz-stetig in ihrem beschränkten konvexen Definitionsbereich und kann mit den Methoden des vorigen Abschnitts minimal, konvex und endlich erweitert werden.

## 2. Erweiterung der Funktion $f_H$ durch die KKE

Zunächst wird die Menge  $\mathcal{M}_2$  der Definitionsmenge betrachtet. Die Richtungsableitung von  $\tilde{J}_{1 \times q}$  entlang des Vektors  $\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\rho}$  ergibt

$$\frac{\partial \tilde{J}_{1 \times q}(\tilde{\mathbf{u}})}{\partial(\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\rho})} = 2\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\boldsymbol{\rho}) (\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\rho})^\top \left( 2\tilde{\mathbf{C}}_q \boldsymbol{\rho} + \tilde{\mathbf{c}}_1 \right). \quad (3.105)$$

Die Berechnung der KKE nach Satz A.1 wird durch folgende Erkenntnisse vereinfacht. Die KKE wird lediglich in positive  $\tilde{u}_1$ -Richtung betrachtet, das entspricht der Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}_6$ . Damit die KKE konvex ist, kann sie nur aus Stützebenen konstruiert sein, die

<sup>30</sup> Die Definition der konvexen Hülle ist im Anhang in Definition A.6 zu finden.



den Rand<sup>31</sup> der Menge  $\mathcal{M}_{2C}$  tangieren, ansonsten ist die Konvexitätsbedingung<sup>32</sup> verletzt. Es wird das Supremum gesucht, welches unter den gegebenen Voraussetzungen gleichbedeutend ist mit dem Maximum auf dem rechten Teil des Randes  $\partial(\mathcal{M}_{2C})$ . Stützebenen, die den linken Teil des Randes (die Grenze zur Menge  $\mathcal{M}_6$ ) tangieren, können nicht zur KKE beitragen, da sie stets kleinere Funktionswerte liefern. Der rechte Teil des Randes ist wie bereits gezeigt eine Höhenlinie von  $f_H$ , darum gilt  $f_H(\tilde{\rho}) = k_\Gamma^2$  und  $\Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{\rho}) = k_\Gamma$ . Unter Berücksichtigung dieser Erkenntnisse ergeben sich für die Anwendung der KKE nach Satz A.1 auf  $f_H$  in Gleichung (3.104) die Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} E(f_H)(\tilde{\mathbf{u}}) &= \sup \left\{ f_H(\boldsymbol{\rho}) + 2\Gamma_{\tilde{u}}(\boldsymbol{\rho}) (\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\rho})^\top \left( 2\tilde{\mathbf{C}}_q \boldsymbol{\rho} + \tilde{\mathbf{c}}_1 \right) \mid \boldsymbol{\rho} \in \text{int}(\mathcal{M}_{2C}) \right\} \\ &= k_\Gamma^2 + 2k_\Gamma \max \left\{ (\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\rho})^\top \left( 2\tilde{\mathbf{C}}_q \boldsymbol{\rho} + \tilde{\mathbf{c}}_1 \right) \mid \boldsymbol{\rho} \in \partial(\mathcal{M}_{2C}) \right\} \\ &= k_\Gamma^2 + 2k_\Gamma \left( 2(\tilde{c}_k - k_\Gamma) + \tilde{\mathbf{c}}_1^\top \tilde{\mathbf{u}} \right. \\ &\quad \left. + \max \left\{ \left( 2\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{c}}_1 \right)^\top \boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{\rho} \in \partial(\mathcal{M}_{2C}) \right\} \right). \end{aligned}$$

Um einen geschlossenen Ausdruck für die Maximierung zu erhalten, wird zunächst eine vereinfachte Beschränkung angenommen, um im zweiten Schritt die dafür gefundene Lösung auf obigen Fall zu ergänzen.

a) **Analytische Lösung der durch  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma, \tilde{u}_1 < 0\}$  beschränkten Maximierung**

Für den Fall, dass die Beschränkung  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma, \tilde{u}_1 < 0\}$  anstelle von  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \partial(\mathcal{M}_{2C})$  berücksichtigt wird, kann die analytische Lösung bestimmt werden. Die Maximierung entlang des Randes  $\Gamma_{\tilde{u}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma$  für  $\tilde{u}_1 < 0$  kann durch den Lagrange-Formalismus gelöst werden. Dadurch entsteht das optimale  $\boldsymbol{\rho}_u^*$  als analytischer Ausdruck:

$$\boldsymbol{\rho}_u^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{-\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3}}{2\zeta_1} \tilde{\mathbf{u}}' + \zeta_4 \quad (3.106)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{u}}' = -\tilde{\mathbf{u}} - \zeta_4,$$

$$\zeta_1 = \tilde{\mathbf{u}}'^\top \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{u}}',$$

$$\zeta_2 = \left( 2\zeta_4^\top \tilde{\mathbf{C}}_q + \tilde{\mathbf{c}}_1^\top \right) \tilde{\mathbf{u}}',$$

$$\zeta_3 = \left( \zeta_4^\top \tilde{\mathbf{C}}_q + \tilde{\mathbf{c}}_1^\top \right) \zeta_4 + \tilde{c}_0 - k_\Gamma,$$

<sup>31</sup> Die Definition des Randes ist im Anhang in Definition A.7 zu finden.

<sup>32</sup> Die Konvexitätsbedingung ist im Anhang in Definition A.2 zu finden.

$$\zeta_4 = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_1.$$

Die Existenz von  $\tilde{\mathbf{C}}_q^{-1}$  ist gegeben, denn nach [BSMM05, Kap. 3.5.2.11] ist eine notwendige Voraussetzung für eine Hyperbel, dass  $\det \tilde{\mathbf{C}}_q < 0$  gilt. Ansonsten stellt die Gleichung  $\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0$  andere Kegelschnittformen dar. Im Punkt  $\boldsymbol{\rho}_u^*$  tangiert jene Stützebene  $f_H$ , welche im Punkt  $\tilde{\mathbf{u}}$  den maximalen Funktionswert unter allen möglichen Stützebenen annimmt.

**b) Lösung der durch  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \partial(\mathcal{M}_{2C})$  beschränkten Maximierung**

Um den beschränkten Definitionsbereich  $\mathcal{M}_{2C}$  von  $f_H$  zu berücksichtigen, darf  $\boldsymbol{\rho}_u^*$  diesen nicht verlassen. Je weiter  $\boldsymbol{\rho}_u^*$  sich vom Ursprung entfernt, desto steiler wird die zugehörige Stützebene. Daran wird deutlich, dass bei einer Einschränkung des Randes von  $\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma$  auf  $\partial(\mathcal{M}_{2C})$  die Stützstelle an der hinzugekommenen Beschränkung verharnt, da an dieser die steilste mögliche Stützebenen tangiert. In Abbildung 3.5 sind dies die Punkte

$$\boldsymbol{\rho}_{c1}^* = [\tilde{u}_{1,\min} \quad \tilde{u}_{2,\max}]^\top \text{ für } \tilde{u}_2 \geq 0, \quad (3.107)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{c2}^* = [\tilde{u}_{1,\min} \quad \tilde{u}_{2,\min}]^\top \text{ für } \tilde{u}_2 < 0. \quad (3.108)$$

Sie können durch einfache Schnittpunktberechnung der Ränder  $\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma$  und  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_{1,\min}$  berechnet werden:

$$u_{2,\max} = \left| \frac{\sqrt{-3b(3a\tilde{u}_{1,\min}^2 + c)}}{3b} \right|, \quad (3.109)$$

$$u_{2,\min} = -u_{2,\max}. \quad (3.110)$$

Damit ergibt sich die KKE  $E(f_H) : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathcal{M}_{2C}, \mathcal{M}_6\} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $f_H : \mathcal{M}_{2C} \rightarrow \mathbb{R}$  zu:

$$E(f_H)(\tilde{\mathbf{u}}) = k_\Gamma^2 + 2k_\Gamma \left( 2(\tilde{c}_k - k_\Gamma) + \tilde{\mathbf{c}}_1^\top \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\rho}^*(\tilde{\mathbf{u}})^\top (2\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{c}}_1) \right) \quad (3.111)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\rho}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_u^*(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_3 \\ \boldsymbol{\rho}_{c1}^* & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}'_{41} \\ \boldsymbol{\rho}_{c2}^* & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}'_{42} \end{cases}$$

wobei  $\mathcal{M}_3 := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \boldsymbol{\rho}_u^*(\tilde{\mathbf{u}}) \in \mathcal{M}_{2C}\}$ ,

$$\mathcal{M}'_{41} := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid u_2 \geq 0\} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{M}_{2C} \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_6)),$$

$$\mathcal{M}'_{42} := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid u_2 < 0\} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{M}_{2C} \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_6)).$$

Unter Vorgriff auf die Gesamtkomposition der Gütefunktion werden diese drei Funktionen bereits nach den zugehörigen Definitionsmengen, wie sie in Abbildung 3.5 eingetragen sind, benannt:

$$J_{M3}(\tilde{\mathbf{u}}) := E(f_H)(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ mit } \boldsymbol{\rho}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\rho}_u^*(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (3.112)$$

$$J_{M41}(\tilde{\mathbf{u}}) := E(f_H)(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ mit } \boldsymbol{\rho}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\rho}_{c1}^*, \quad (3.113)$$

$$J_{M42}(\tilde{\mathbf{u}}) := E(f_H)(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ mit } \boldsymbol{\rho}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\rho}_{c2}^*. \quad (3.114)$$

### 3. Modifikation der KKE für stetige Differenzierbarkeit

Die KKE nach Gleichung (3.111) ist entlang der positiven  $\tilde{u}_1$ -Achse inklusive des Ursprungs nicht stetig differenzierbar. Dies kann umgangen werden indem auf der Menge  $\mathcal{M}_5$  ein Kegelsektor des konvexen Kegels

$$J_{M5}(\tilde{\mathbf{u}}) = \sqrt{J_{M41}(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\zeta}_7)^2 + J_{M42}(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\zeta}_7)^2} + J_{M41}(\mathbf{0}) \quad (3.115)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\zeta}_7 = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2a\tilde{u}_{1,\min}} & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (3.116)$$

anstelle der KKE verwendet wird. Der konvexe Kegel ist aus den beiden Ebenen  $J_{M41}$  und  $J_{M42}$  generiert und zusätzlich um  $\boldsymbol{\zeta}_7$  horizontal verschoben, damit dessen Minimum über dem Ursprung liegt. Ebenfalls liegt das Minimum des Kegels auf Höhe der Funktionen  $J_{M41}$  und  $J_{M41}$  an dieser Stelle. Da diese sich dort schneiden, ist gleichgültig welche der beiden zur Berechnung der Vertikalverschiebung genutzt wird. Die beiden generierenden Ebenen sind Stützebenen dieses Kegels und setzen ihn tangential fort. Die Grenzen der Menge  $\mathcal{M}_5$  ergeben sich aus den Berührungspunkten der beiden generierenden Stützebenen an den konvexen Kegel. Die Grenzen können durch Nullsetzen der Gleichung der generierenden Ebenen  $J_{M41}$  und  $J_{M42}$  berechnet werden, weil in diesen Punkten der Kegel nur durch die jeweils andere Gleichung bestimmt ist. Daraus folgt für die Beschreibung der Menge  $\mathcal{M}_5$ :

$$\mathcal{M}_5 := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid f_{M41}(\tilde{\mathbf{u}}) > 0, f_{M42}(\tilde{\mathbf{u}}) > 0\} \quad (3.117)$$

$$\text{mit } f_{M41}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{a}{b} \frac{\tilde{u}_{1,\min}}{\tilde{u}_{2,\max}} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, \quad (3.118)$$

$$f_{M42}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{a}{b} \frac{\tilde{u}_{1,\min}}{\tilde{u}_{2,\max}} \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2.$$

Für die Verwendung des Kegels muss der Gültigkeitsbereich der KKE in Gleichung (3.111) eingeschränkt werden. Dies erfolgt durch die Anpassung:

$$\mathcal{M}_{41} := \mathcal{M}'_{41} \setminus \mathcal{M}_5, \quad (3.119)$$

$$\mathcal{M}_{42} := \mathcal{M}'_{42} \setminus \mathcal{M}_5. \quad (3.120)$$

Somit sind die drei Schritte abgeschlossen. Es kann die konvexe und überall bis auf den Ursprung stetig differenzierbare Funktion  $J_{1xq} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{u} \mid \mathbf{R}_\gamma^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{t}_{Tr} \in \mathcal{M}_6\} \rightarrow \mathbb{R}$  unter Verwendung der eingeführten Mengen und Funktionen sowie der Transformation auf Hyperbelnormalform dargestellt werden:

$$J_{1q}(\mathbf{u}) = (f_T \circ f_g)(\mathbf{u}) \quad (3.121)$$

$$\text{mit } f_T(\mathbf{u}) = \mathbf{R}_\gamma^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{t}_{Tr},$$

$$f_g(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{cases} J_{M1}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_1 \\ \tilde{J}_{1xq}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_2 \\ J_{M3}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_3 \\ J_{M41}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_{41} \\ J_{M42}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_{42} \\ J_{M5}(\tilde{\mathbf{u}}) & , \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_5 \end{cases}, \quad (3.122)$$

wobei  $(f_T \circ f_g)(\mathbf{u})$  die Komposition der Funktionen  $f_T$  und  $f_g$  ist. Für eine konvexe Gütefunktion  $J_{1q}$  muss  $J_{M1}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0$  gewählt werden. Dann ist  $J_{1q}$  überall dort minimal, wo  $y_q(k) > y_{soll}(k)$  gilt. Diese Gütefunktion kann in MPC-Ansätzen verwendet werden, in denen zusätzlich der Stellaufwand bewertet wird und dies aufgrund einer energetischen Betrachtung immer zu einem kleinstmöglichen  $y_q(k)$  führt, das  $y_q(k) > y_{soll}(k)$  erfüllt. Soll die Funktion  $J_{1q}$  nur für  $y_q(k) = y_{soll}(k)$  minimal sein, kann  $J_{M1}(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{J}_{1q}(\tilde{\mathbf{u}})$  gewählt werden. Hierfür muss aber wie bereits zu Beginn des Abschnitts erläutert zwingend auf die Konvexität im Teilgebiet  $\mathcal{M}_1$  verzichtet werden.

Die Berechnung der Gütefunktion in einem gegebenen Punkt besteht im ersten Schritt aus der Identifikation der Menge, in der dieser Punkt liegt. Das entwickelte Vorgehen entscheidet dies anhand einfacher Kriterien. Es vermeidet die Auswertung der Gleichung für  $\rho_u^*(\tilde{\mathbf{u}})$  in Gleichung (3.106) für die Bestimmung der Menge  $\mathcal{M}_3$  nach Gleichung (3.111) und ersetzt diese Vorschrift durch zwei lineare Ungleichungen. Der Rand der Menge  $\mathcal{M}_3$  ist durch die Grenze  $u_{1,\min}$  definiert, welche  $\rho_u^*(\tilde{\mathbf{u}})$  nicht in negative Richtung verlassen darf. Wie bereits beschrieben wird für die angrenzenden Mengen  $\mathcal{M}_{41}$  und  $\mathcal{M}_{42}$  die KKE durch das Festhalten von  $\rho_u^*(\tilde{\mathbf{u}})$  an folgenden Punkten ausgewertet. Die Grenzen der Menge  $\mathcal{M}_3$  sind alle Lösungen der Gleichungen

$$\rho_u^*(\tilde{\mathbf{u}}) = [u_{1,\min} \quad u_{2,\max}]^T, \quad (3.123)$$

$$\rho_u^*(\tilde{\mathbf{u}}) = [u_{1,\min} \quad u_{2,\min}]^T. \quad (3.124)$$

Die Lösungen dieser beiden vektoriellen Gleichungen ergeben die beiden Grenzen  $f_{M31}$  und  $f_{M32}$ . Mit ihnen kann die Menge  $\mathcal{M}_3$  deutlich einfacher berechnet werden:

$$\mathcal{M}_3 := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid f_{M31}(\tilde{\mathbf{u}}) > 0, f_{M32}(\tilde{\mathbf{u}}) < 0, \Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) > k_{\Gamma}, \tilde{u}_1 > \tilde{u}_{1,\min}\} \quad (3.125)$$

mit  $f_{M31}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\tilde{u}_{2,\max}}{\tilde{u}_{1,\min}} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2,$

$f_{M32}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\tilde{u}_{2,\min}}{\tilde{u}_{1,\min}} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2.$

Die Abbildung 3.6 zeigt einen Programmablaufplan zur Bestimmung in welcher Menge sich ein Punkt befindet. Somit ist die Berechnung ausschließlich durch die Auswertung von maximal sechs linearen Ungleichungen gelungen. Hierbei ist die Auswertung der Menge  $\mathcal{M}_6$  nicht mitgezählt, da diese außerhalb des Definitionsbereichs liegt und so gewählt wird, beziehungsweise durch übergeordnete Strukturen sichergestellt wird, dass dieser Fall nicht eintritt.

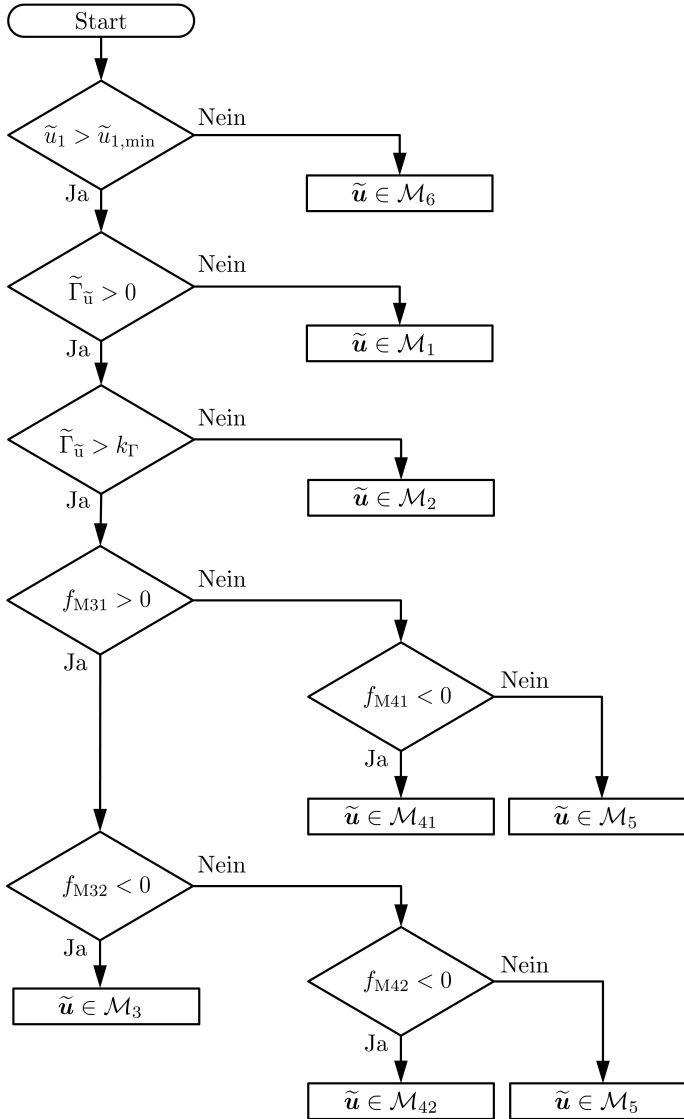
Eine vektorielle Betrachtung über dem gesamten Horizont ist mit den geometrischen Ansätzen dieses Kapitels nicht verträglich. Diese gelten nur für einen zweidimensionalen Lösungsraum. Wenn bei  $n_h > 1$  die Zustände von mehreren Eingängen abhängen, sind die geometrischen Ansätze nicht möglich. Aus diesem Grund erlaubt die vorgestellte Methode keine geschlossene analytische Lösung über dem gesamten Horizont. Für die Bewertung über einem längeren Horizont  $n_h > 1$  müssen zunächst die Zustände über dem Horizont berechnet werden und für diese jeweils das beschriebene Vorgehen angewendet werden. Eine numerische Berechnung für  $n_h > 1$  ist dann möglich, aber es können nicht wie beim affinen Ansatz für die Ausgangsgleichung analytische Ausdrücke für die Gradienten bestimmt werden.

### Anschauliche Darstellung für die Anwendung auf die PSM

Die im vorigen Abschnitt vorgestellte Methode wird hier zur Veranschaulichung auf die Modellierung der Beispielmachine (Daten der Maschine siehe Unterabschnitt 5.1.1) dargestellt. Es dient der besseren Veranschaulichung des allgemein gültigen Ergebnisses dieses Abschnitts.

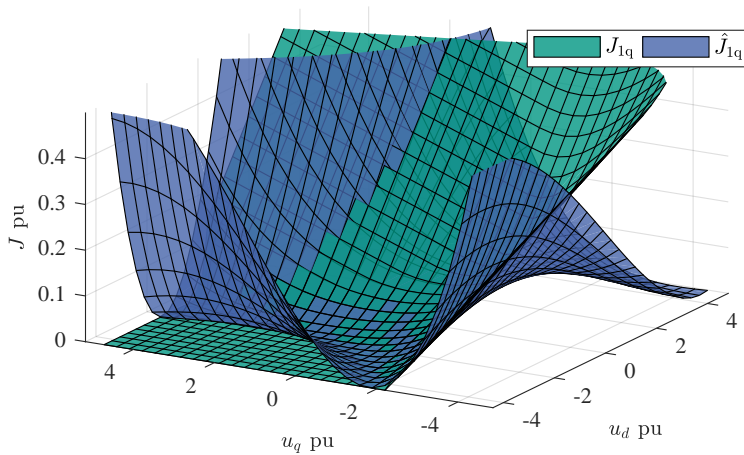
#### Beispiel 3.5:

Die Maschine befindet sich in einem Zustand nahe des Ursprungs in der Stromebene und es gilt  $m_{\text{soll}}(k) = \mathbf{y}_{\text{soll}}(k) = 0,5$  pu. Der Parameter  $\tilde{u}_{1,\min}$  zur Begrenzung des Definitionsbereichs ist so gewählt, dass alle möglichen Spannungsvektoren im Eingangsraum durch den Definitionsbereich abgedeckt sind. Das Ergebnis  $J_{1q}$  in seiner konvexen Form ( $J_{M1}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0$ ) ist im Vergleich zur Ausgangsfunktion  $\hat{J}_{1q}$  über dem Eingangsraum für  $n_h = 1$  in Abbildung 3.7 dargestellt. Die Abbildung zeigt die Übereinstimmung der beiden Funktionen in der Zielmenge  $\{\mathbf{u} \mid \mathbf{y}_{\text{soll}}(k) = \mathbf{y}(\mathbf{u})\}$  sowie in der Menge  $\mathcal{M}_2$ , in der  $\hat{J}_{1q}$  bereits konvex ist. Deutlich zeigt sich die Vermeidung der Nebenminima der Gütefunktion  $\hat{J}_{1q}$  im hinteren rechten Quadranten durch die Verwendung der hier vorgestellten Berechnungsvorschrift für  $J_{1q}$  durch konvexe



**Abbildung 3.6:** Programmablaufplan für die Identifizierung der Menge, in der ein gegebener Punkt  $\tilde{\mathbf{u}}$  liegt

*Erweiterung.* Des Weiteren ist der glatte Verlauf ersichtlich, der durch die stetige Differenzierbarkeit gegeben ist und der kleine Knick in der Spitze des konvexen Kegels, in dem dies nicht gegeben ist. Ebenso zeigt sich die Fortführung mit konstanter Steigung für  $\tilde{u}_1 \rightarrow \infty$  in alle Richtungen für die  $\tilde{u}_1 > 0$  gilt, was aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion gegeben ist.



**Abbildung 3.7:**  $J_{1q}$  in seiner konvexen Form und die ursprüngliche Funktion  $\hat{J}_{1q}$  über dem Eingangsraum

In diesem Abschnitt ist es gelungen mit der affinen und der quadratischen Beschreibung der Ausgangsgleichung, respektive der Zielzustandsmenge, konvexe Gütefunktionen zur Verlustminimierung zu entwerfen. Im Fall der quadratischen Ausgangsgleichung ist die Methode der kleinsten konvexen Erweiterung eingesetzt, um die quartische Gütefunktion zu konvexifizieren. Das in Unterabschnitt 3.4.3 vorgestellte Schema ist für alle quadratischen Zielzustandsmengen in hyperbolischer Form in MPC-Optimierungsansätzen einsetzbar und nicht nur auf den vorliegenden Anwendungsfall beschränkt. Am Beispiel einer PSM sind abschließend die Ergebnisse der Konvexifizierung anschaulich verdeutlicht. In den beiden folgenden Abschnitten werden jeweils die zuvor vorgestellten Gütefunktionen der PSM nach der neuen Methode zu einer Gütefunktion vereint.

### 3.4.4 Verwendung der affin approximierten Drehmomentgleichung für das primäre Regelziel

Die verwendete Systembeschreibung durch stetige Linearisierung im aktuellen Arbeitspunkt kann als zeitvariantes affines System aufgefasst werden, da sich lediglich die Parametrierung der Matrizen in jedem Zeitschritt ändert. Daher ist die Voraussetzung zum *Condensing* in Lemma 3.4 aus Unterabschnitt 3.3.2 erfüllt und kann auf beide Gütefunktionsanteile  $J_{1x}(k)$  und  $J_{2x}(k)$  angewendet werden. Die Vereinfachung durch Substitution der Gütefunktion aus Gleichung (3.91) ergibt für den höchst priorisierten Anteil  $J_{1u}(k)$ :

$$J_{1u}(k) = \|\mathbf{H}_{1u}\mathbf{u}_s(k) + \mathbf{h}_{1u}\|_2^2 \quad (3.126)$$

$$\text{mit } \mathbf{H}_{1u} = \mathbf{C}_s\mathbf{B}_s,$$

$$\mathbf{h}_{1u} = \mathbf{C}_s(\mathbf{A}_s\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}_s) + \mathbf{F}_s - \mathbf{y}_{s,\text{soll}}(k).$$

Durch die Anwendung der Substitution auf die Gütefunktion  $J_{2x}(k)$  der zweiten Prioritätsstufe aus Gleichung (3.90) ergibt sich

$$J_{2u}(k) = \|\mathbf{H}_{2u}\mathbf{u}_s(k) + \mathbf{h}_{2u}\|_2^2 \quad (3.127)$$

$$\text{mit } \mathbf{H}_{2u} = \mathbf{B}_s,$$

$$\mathbf{h}_{2u} = \mathbf{A}_s\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}_s.$$

Nun rückt die Zeitschrittabhängigkeit der Gütefunktionen  $J_{1u}$  und  $J_{2u}$  in den Hintergrund und die Abhängigkeit von der Optimierungsvariable wird wichtiger. Daher werden die beiden obigen Funktionen im Folgenden mit dem Eingangsvektor als Argument dargestellt:  $J_{1u}(\mathbf{u})$  und  $J_{2u}(\mathbf{u})$ . Im nächsten Schritt wird auf die Voraussetzungen in V1 für die Anwendung von Satz 3.4 eingegangen:

- Voraussetzung V1.1:

Der zulässige Lösungsraum wird angenommen als  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^{n_L}$  mit  $n_L = n_h n_u = 2n_h$ .<sup>33</sup>

- Voraussetzung V1.2:

Der Gütefunktionsvektor setzt sich aus den beiden obigen Gütefunktionen zusammen:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = [J_{1u}(\mathbf{u}) \quad J_{2u}(\mathbf{u})]^\top : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (3.128)$$

- Voraussetzung V1.3:

Die Gütefunktion  $J_{1u}(\mathbf{u})$  lässt sich in gleicher Form wie Gleichung (3.3) darstellen. Dies geht unmittelbar aus Gleichung (3.126) hervor:

$$J_{1u}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{d}_1(\mathbf{u})\|_2^2 \text{ mit } \mathbf{d}_1 : \mathbb{R}^{n_L} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{H}_{1u}\mathbf{u} + \mathbf{h}_{1u} \quad (3.129)$$

mit  $m_1 = n_h$  und  $\mathbf{H}_{1u} = \mathbf{C}_s\mathbf{B}_s$  zeilenregulär. Letzteres wird im Folgenden gezeigt. Ausgangspunkt ist die Regularität der Ausgangsmatrix  $\mathbf{B}$  der zeitkontinuierlichen Modellierung. Sie ergibt sich nach Gleichung (2.10) unter der Vernachlässigung der für diese Betrachtung unwesentlichen Normierungsfaktoren zu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l_{qq}l_{dd} - l_{dq}l_{qd}} \begin{bmatrix} l_{dd} & l_{dq} \\ l_{qd} & l_{qq} \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

<sup>33</sup> Die Auswirkungen durch eine beschränkte Steuergröße  $\mathbf{u}_s(k) \in \mathcal{U}_s$  werden in Abschnitt 4.4 diskutiert.



Die Determinante der obigen Matrix entspricht dem Nenner des Vorfaktors, daher ergibt die Determinante von  $\mathbf{B}$  stets  $(l_{qq}l_{dd} - l_{dq}l_{qd})^{-1}$ . Die Determinante wird nur null, wenn der Vorfaktor unendlich wird. Dies kann ausgeschlossen werden, da anhand der physikalischen Gegebenheiten keine der differentiellen Induktivitäten unendlich ist. Es ist ebenso ausgeschlossen, dass  $l_{qq}l_{dd} - l_{dq}l_{qd}$  null wird. Dies kann für Maschinen mit Sättigung und Kreuzverkopplung physikalisch begründet werden (vgl. [RGD14]). Daher kann die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  als regulär angenommen werden. Die Multiplikation von quadratischen regulären Matrizen selbst ist immer regulär (vgl. [HJ94, Kap. 0.4.6]). Daher folgt aus der Diskretisierung in Gleichung (2.21) die Regularität der diskreten Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_d$ . Dies setzt voraus, dass  $\mathbf{A}_d$  ebenfalls regulär ist. Aufgrund der Komplexität und der Zustandsabhängigkeit der Ausdrücke der Matrixelemente dieser Matrix (siehe Tabelle 2.1) bleibt nur eine numerische Prüfung anhand der Beispielmachine. Dies ist im Anhang A.7.1 für die vorliegende Maschine erfolgt. Die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  kann aufgrund der physikalischen Gegebenheiten als ungleich null angenommen werden und hat daher einen Rang von eins. Die Anwendung der Ranggleichung von Sylvester ([HJ94, Kap. 0.4.5(c)]) auf das Produkt  $\mathbf{C}\mathbf{B}_d$  ergibt:

$$\text{rg}(\mathbf{C}) + \text{rg}(\mathbf{B}_d) - n_u \leq \text{rg}(\mathbf{C}\mathbf{B}_d) \leq \min(\text{rg}(\mathbf{C}), \text{rg}(\mathbf{B}_d)). \quad (3.131)$$

Daraus folgt  $\text{rg}(\mathbf{C}\mathbf{B}_d) = 1$ . Dies bestätigt die in Voraussetzung V1.3 geforderte Annahme des vollen Zeilenranges von  $\mathbf{C}_s\mathbf{B}_s$  für den Fall von  $n_h = 1$ . Für den Fall  $n_h > 1$  ergibt sich aus den Matrizen des Prädiktionsmodells aus Gleichung (2.29) und Gleichung (2.30)

$$\mathbf{C}_s\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{n_h-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{n_h-2}\mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}\mathbf{B}_d \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Diese Matrix hat aufgrund ihrer Struktur und den Blockdiagonalelementen  $\mathbf{C}\mathbf{B}_d$  mit  $\text{rg}(\mathbf{C}\mathbf{B}_d) = 1$  ebenfalls vollen Zeilenrang.

- Voraussetzung V1.4:

Die Gütefunktion  $J_{2u}(\mathbf{u})$  ist quadratisch und daher stetig differenzierbar. Die Hessematrix  $\mathcal{H}(J_{2u}) = 2\mathbf{B}_s^\top\mathbf{B}_s$  ist genau dann positiv definit, wenn  $\mathbf{B}_s$  vollen Rang hat (vgl. [HJ94, Observation 7.1.8]). Letzteres folgt aus der Anwendung des Entwicklungssatzes für Determinanten und der bereits erwähnten Regularität von  $\mathbf{B}_d$ :  $\mathbf{B}_s$  ist eine Blockdreiecksmatrix, daher kann die Determinante aus dem Produkt der Determinanten der einzelnen Diagonalelemente berechnet werden (vgl. [ZF92, Kap. 22.3]). Alle Diagonalelemente haben eine Determinante ungleich null, dies gilt dann ebenso für  $\mathbf{B}_s$ , die folglich vollen Rang hat.

- Voraussetzung V1.5:

Mit  $n_J = 2$  und  $m_1 = n_h$  ergibt sich  $q = n_h$ . Damit ist für  $n_h = 1$  Folgendes erfüllt:  
 $q = n_L - 1, m_1, q > 0$  sowie  $n_J > 1$ .

Wie bereits erläutert, sind Voraussetzung V1.5 und Voraussetzung V2.2 für  $n_h = 1$  äquivalent. Somit ist bereits die Erfüllung aller Voraussetzungen unter V2 für die Anwendung von Satz 3.4 für den Fall  $n_h = 1$  geprüft. Die Voraussetzungen zur Berechnung von  $\mathbf{u}_s^*(k)$  eines lexikographischen MPC-Optimierungsproblems mit  $n_h > 1$  durch Satz 3.6 werden durch Voraussetzung V3 geprüft:

- Voraussetzung V3.1:

Diese ist mit  $n_u = 2, n_J = 2$  und  $o_i = 1$  direkt erfüllt.

- Voraussetzung V3.2:

Die Gütefunktion  $J_{2u}(\mathbf{u})$  lässt sich darstellen durch die in Gleichung (3.59) geforderte Form, wobei die Forderung  $\mathbf{H}_2 \succeq 0$  bereits durch die Anforderung an die Hessematrix  $\mathcal{H}(J_{2u}) = 2\mathbf{B}_s^\top \mathbf{B}_s \succeq 0$  in Voraussetzung V1.4 sichergestellt ist.

- Voraussetzung V3.3:

Damit das MPC-Optimierungsproblem eine konstante stationäre Lösung hat, muss zum einen der Sollwert konstant und zum anderen der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil sein. Steuerbarkeit ist eine notwendige Voraussetzung für asymptotische Stabilität in einer durch einen Sollwert beliebig vorgebbaren Ruhelage. Diese ist lokal anhand der Überlegungen zur Flachheit (siehe Unterabschnitt 4.3.1) für jede affine Systemmodellierung gegeben. Daraus lässt sich nicht auf die Steuerbarkeit des Gesamtsystems schließen. Asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises kann hier nicht formal für den verwendeten MPC-Ansatz in Verbindung mit der vorgeschlagenen Modellierung gezeigt werden. Dass dies möglich ist, zeigen jedoch die Simulationen in Abschnitt 5.5.

- Voraussetzung V3.4:

Die beiden Gütefunktionen sind anhand ihrer Regelziele gleichermaßen in jedem Horizontschritt definiert. Dies zeigt sich in der Struktur der Gütefunktionen vor der Substitution, da sie jeweils pro Horizontschritt die ohmschen Verluste beziehungsweise die Regelabweichung bestrafen und in jedem Schritt wie gefordert die gleiche Form annehmen.

- Voraussetzung V3.5:

Es gilt die Rangbedingung

$$\text{rg} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{R}^\top \mathbf{B}_s^\top \mathbf{B}_s \\ \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \right) = 2n_h. \quad (3.133)$$

$C_s B_s$  hat  $n_h$  Zeilen und  $n_h n_u = 2n_h$  Spalten und, wie bereits gezeigt, vollen Zeilenrang. Für die weiteren Ausführungen ist zunächst die Wahl der orthogonalen Rotationsmatrix  $R$  notwendig:

$$R = \begin{bmatrix} R_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & R_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h} \text{ mit } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Durch diese Wahl gilt  $\det R_2 = 1$ , folglich handelt es sich um eine reine Drehmatrix, die weder eine Streckung noch Stauchung durchführt ([BSMM05, Kap. 3.5.3.2]). Es ist zu erkennen, dass mit dieser Wahl  $R^T$  der Definition 3.14 genügt und daher ebenfalls eine orthogonale Rotationsmatrix ist. Aufgrund dieser Wahl ergibt sich für  $C_s B_s R^T$ :

$$\begin{bmatrix} C B_d R_2^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ C A_d B_d R_2^T & C B_d R_2^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C A_d^{n_h-1} B_d R_2^T & C A_d^{n_h-2} B_d R_2^T & \dots & C B_d R_2^T \end{bmatrix}. \quad (3.135)$$

Hier erfolgt ein Vergleich mit  $C_s B_s$  in Gleichung (3.132). Aus der Dreiecksform der beiden Matrizen ergibt sich, dass jede Zeile in  $C_s B_s$  nur linear abhängig sein kann zur gleichen Zeile in  $C_s B_s R^T$ , da nur diese die gleiche Anzahl an Elementen ungleich null haben. Diese beiden Zeilen können nicht linear abhängig sein, da sie aufgrund der Multiplikation mit  $R_2^T$  orthogonal zueinander sind. Somit hat die Matrix

$$\begin{bmatrix} C_s B_s R^T \\ C_s B_s \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

vollen Rang, da alle ihre Zeilen zueinander linear unabhängig sind. Aufgrund der Regularität von  $B_s^T B_s$  stellt die Multiplikation des oberen Blocks dieser Matrix nur elementare Zeilenumformungen dar, welche den Rang einer Matrix erhalten (siehe [BSMM05, Kap. 4.1.4.7.3]). Daraus folgt, dass die in Gleichung (3.133) gegebene Matrix ebenfalls vollen Rang besitzt und Voraussetzung V3.5 erfüllt ist.

Zusammenfassend kann festgehalten werden: Es sind alle Voraussetzungen erfüllt und im Falle von  $n_h > 1$  und  $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}$  liefert Satz 3.6 die Lösung des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems der PSM nach Definition 3.13. Mit dieser Berechnungsvorschrift ist die vorgestellte lexikographische Methode auf einen MPC zur Drehmomentregelung einer PSM angewendet und bis auf den Prädiktionshorizont vollständig definiert. Im folgenden Abschnitt erfolgt noch eine Anpassung in Vorbereitung auf die Implementierung.

### Vereinheitlichung der Berechnung der Gütefunktion für eine variable Horizontlänge

In diesem Abschnitt wird eine vektorielle Formulierung für die Berechnung von  $J_{\text{lex}}$  gezeigt, die eine effiziente Berechnung in *MATLAB* ermöglicht. Des Weiteren ermöglicht sie die Berechnung für  $n_h = 1$  nach Satz 3.5 und  $n_h > 1$  nach Satz 3.6 nach dem gleichen Schema. Die transformierte Gütefunktion ergibt sich für  $n_h = 1$  zu

$$J_{\text{lex}}(\mathbf{u}) = J_{1u}(\mathbf{u}) + \left( \frac{\partial J_{2u}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \text{ mit } \mathbf{r} = \frac{1}{\|\mathbf{H}_{1u}\|_2} \mathbf{H}_{1u} \mathbf{R}_2 \quad (3.137)$$

$$= J_{1u}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\|\mathbf{H}_{1u}\|_2^2} (\mathbf{H}_{1u} \mathbf{R}_2 \nabla J_{2u}(\mathbf{u}))^2. \quad (3.138)$$

Bei  $\mathbf{H}_{1u}$  handelt es sich im Fall  $n_h = 1$  um einen Zeilenvektor, der hier aus Gründen der Einheitlichkeit zu Gleichung (3.126) als große Variable geschrieben ist. Zur Vereinheitlichung wird die Summe aus Satz 3.6 für  $n_h > 1$  in eine vektorielle Formulierung überführt:

$$J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_s) = J_{1u}(\mathbf{u}_s) + J_{2T}(\mathbf{u}_s) \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} J_{2T}(\mathbf{u}_s) &= \|\mathbf{N} \mathbf{H}_{1u} \mathbf{R} \nabla J_{2u}(\mathbf{u}_s)\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{N} \mathbf{H}_{1u} \mathbf{R} 2(\mathbf{H}_{2u}^T \mathbf{H}_{2u} \mathbf{u}_s + \mathbf{h}_{2u})\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Dabei findet zur Normierung die Matrix

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\nabla d_{1,1}\|_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\nabla d_{1,2}\|_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\|\nabla d_{1,n_h}\|_2} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Verwendung. Die Umformung von der Summe auf die Vektornorm wird ersichtlich bei Betrachtung von Gleichung (3.129).  $\mathbf{H}_{1u}$  ist die Jacobimatrix der Funktion  $d_1$  und die Zeilen von  $\mathbf{H}_{1u}$  sind die transponierten Gradienten der Funktionen  $d_{1,i}$ . Diese Form hat den Vorteil, dass sie für  $n_h = 1$  die Gleichung (3.138) ergibt. Somit kann für alle Horizontlängen diese Gleichung zur lexikographischen Optimierung im MPC implementiert werden. Diese Berechnungsvorschrift ist als lexikographische Methode in *MATLAB* implementiert und bis auf den Prädiktionshorizont vollständig definiert. Der Horizont wird anhand des Regelergebnisses in Unterabschnitt 5.5.3 endgültig festgelegt.

### 3.4.5 Verwendung der quadratisch approximierten Drehmomentgleichung für das primäre Regelziel

Um die lexikographische Komposition nach obiger Methode auf die Funktion  $J_{1q}$  anzuwenden, ist eine umfangreiche Erweiterung der Methode notwendig. Die Gütefunktion  $J_{1q}$  entspricht nicht der strukturellen Voraussetzung V1.3. Die Funktion  $d(\mathbf{u})$  ist in diesem Fall nicht linear in  $\mathbf{u}$ , sondern entspricht  $\Gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$  aus Gleichung (3.95). Damit ergibt sich für diese Funktion eine nicht konstante Jacobimatrix. Die Richtungsableitung kann nicht auf die orthogonal rotierte Richtung von konstanten Vektoren erfolgen. Eine Erweiterung würde anstelle der Richtungsableitung eine Lie-Ableitung entlang eines Vektorfeldes erfordern. Dieses Vektorfeld muss hierfür orthogonal zum Gradientenfeld von  $J_{1q}$  sein. Durch die Normierung dieses Vektorfeldes entsteht für die nicht konvexe Version von  $J_{1q}$  in der optimalen Lösungsmenge eine Singularität, weil dort der Gradient verschwindet. Da die Methode unabhängig von der Richtung der Gradienten ist, kann deren Richtung umgedreht werden. Dadurch wird die Singularität hebbar. Die Eigenschaft des streng monotonen Abstiegs zum Minimum bleibt erhalten, aber die Gütefunktion verliert ihre Konvexität. Wird die konvexe Version von  $J_{1q}$  verwendet, verschwindet der Gradient für  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}_1$  und die Methode ist nicht anwendbar, da das normierte Gradientenfeld nicht stetig ist und die Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  ihre Stetigkeit verliert. Ein einfacher Weg, um die lexikographische Komposition zu integrieren, ist die Ersetzung des ersten Anteils  $J_1$  der Gütefunktion von  $J_{\text{lex}}$  in Gleichung (3.139) durch  $J_{1q}$  unter der Beibehaltung der lexikographischen Komposition  $J_{2T}$ :

$$J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_s) = J_{1q}(\mathbf{u}) + \|\mathbf{N}\mathbf{H}_{1u}\mathbf{R}2(\mathbf{H}_{2u}^T\mathbf{H}_{2u}\mathbf{u}_s + \mathbf{h}_{2u})\|_2^2. \quad (3.142)$$

Aufgrund der vorgestellten quadratischen Approximationsmethode in Unterabschnitt 2.1.2 stimmt die quadratische Funktion  $\mathbf{y}_{\text{qs}}(k)$  im Entwicklungspunkt in nullter sowie erster Ableitung überein. Dies trifft ebenso auf  $\mathbf{y}_{\text{as}}(k)$  zu. Dies garantiert für die Übereinstimmung von Entwicklungspunkt und Optimum obiger Funktion die Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den vorigen Abschnitten. Durch Verwendung der konvexen Version von  $J_{1q}$  entsteht eine konvexe Gütefunktion zur Berechnung des lexikographischen Optimums für den stationären Fall.

## 3.5 Zusammenfassung

Es ist erstmals gelungen einen MPC-Ansatz zur Optimierung der Stellgrößen vorzustellen, welcher das Drehmoment als Sollwert und die Verluste als zusätzliches Gütekriterium verwendet. Die Beschreibungsform dieses Mehrzielpblems als lexikographische Optimierung ist neu in der Drehmomentregelung von Antrieben. Sie ermöglicht es die beiden konträren Regelziele Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung frei von Kompromissen in eine Gütefunktion zu integrieren.

Um die Lösung eines mehrstufigen Optimierungsproblems zu vermeiden, wird eine Transformation entworfen, die es ermöglicht eine strenge Priorisierung von  $n_J$  Regelzielen in die Gütefunktion eines MPC zu integrieren. Dieser allgemeine Beitrag spiegelt einen Kern dieser Arbeit wieder und wurde für zwei Gütefunktionen für die PSM in [SHK18b] veröffentlicht. Die vorgestellte Methode hat in den folgenden Fällen exakt die gleiche Lösung wie die lexikographische Optimierung durch sequentielles Lösen von  $n_J$  Optimierungsproblemen: für MPC mit der Horizontlänge von eins im Fall einer Lösung innerhalb der Beschränkung und für längere Horizonte für den stationären Fall.

In einem zweiten Schritt werden die beiden Regelziele für die Anwendung auf den verlustoptimalen Betrieb der PSM beschrieben und vorerst unabhängig voneinander betrachtet. Durch die Wahl der Ströme als Zustände kann die Beschreibung der ohmschen Verluste der Maschine unmittelbar als streng konvexe quadratische Funktion der Zustände dargestellt werden. Für die Beschreibung der Drehmomenterreicherung wird eine quadratische Abstandsbestrafung zum Sollwert verwendet. Es ergeben sich zwei Optionen aufbauend auf den beiden Modellierungen für die Ausgangsgleichung in Kapitel 2. Die Modellierung der Ausgangsgleichung durch eine affine Funktion ergibt eine konvexe quadratische Funktion und kann unmittelbar für die Optimierung eingesetzt werden, da alle Minima dem Regelziel entsprechen. Die Modellierung der Ausgangsgleichung durch eine quadratische Funktion ergibt eine nicht konvexe Funktion mit unerwünschten Nebenminima. Um diese für einen MPC verwenden zu können, wird aufbauend auf der Methode der kleinsten konvexen Erweiterung die Erstellung einer konvexen Gütefunktion gezeigt, in deren Minima nur Spannungen liegen, die Drehmomente größer oder gleich dem Sollwert erzeugen, oder alternativ eine nicht konvexe Gütefunktion, die aber keine Nebenminima aufweist.

Abschließend wird die neu entwickelte Methode auf die entworfenen Gütefunktionen der PSM angewendet. Dabei wird gezeigt, dass alle zuvor formulierten Voraussetzungen zur Anwendung der neu entwickelten Methode für die PSM erfüllt sind. Die Methode ermöglicht die unmittelbare Anwendung auf die Gütefunktionen der PSM bei Verwendung der affinen Modellierung der Ausgangsgleichung.

## 4 Beschränkte Optimierung im lexikographischen MPC zur Regelung der PSM

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie die Optimierung im MPC unter Berücksichtigung der Begrenzungen von Spannung und Strom durch einen Optimierungsalgorithmus gelöst werden kann. Dafür wird zunächst das allgemeine Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} J(\mathbf{u}) \quad (4.1)$$

zur Berechnung der Stellgröße  $\mathbf{u}$  betrachtet und im weiteren Verlauf  $J(\mathbf{u})$  durch die eben vorgestellte Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  aus Gleichung (3.139) ersetzt. Zu Beginn des Kapitels wird der ausgewählte Optimierungsalgorithmus eingeführt (Abschnitt 4.1) und anschließend werden Projektionen in die Menge  $\mathcal{S}$  für die Berücksichtigung von Strom- und Spannungsbegrenzungen entworfen (Abschnitte 4.2 und 4.3). Bei Berücksichtigung dieser Begrenzungen im Optimierungsalgorithmus erfüllt der MPC bei aktiver Beschränkung nicht die formalen Voraussetzungen für die Sätze 3.5 und 3.6. Die Auswirkungen der zeitweisen Verletzung der Voraussetzung in der Berechnung des lexikographischen Optimums im MPC werden in Abschnitt 4.4 diskutiert. Es ist zunächst eine Hypothese dieses Kapitels, dass der Betrieb des MPC während dieser Verletzung möglich ist. Die Hypothese wird durch die Untersuchungen im Kapitel 5 bestätigt. Abschließend wird ein Verfahren zur Konditionierung des Optimierungsproblems (Abschnitt 4.5) behandelt. Zunächst wird auf die Wahl des Optimierungsalgorithmus eingegangen.

Es gibt eine Vielzahl an Optimierungsalgorithmen, die jeweils für bestimmte Problemklassen vorteilhaft sind (vgl. [Lue69, S. 297]). Die Auswahl eines Verfahrens ist daher in den seltensten Fällen eindeutig. Anhand einer Diskussion der in Unterabschnitt 1.4.2 vorgestellten Verfahren und den Erkenntnissen im Laufe der Arbeit wird im folgenden Abschnitt die Entscheidung für den ausgewählten Optimierungsalgorithmus motiviert. In Abschnitt 1.4 *Stand der Wissenschaft* sind bereits die drei Haupteinschränkungen aufgeführt: das Fehlen oder Approximieren von Strom- und Spannungsbegrenzung sowie die Verwendung von linearen Maschinenmodellen innerhalb des MPC. Zentrales Ziel ist die Vermeidung dieser limitierenden Modellvereinfachungen.

EMPC erlauben zwar die Integration von Beschränkungen, aber sie müssen ebenfalls wie die Streckenmodelle mit einer geringen Anzahl von affinen Approximationen dargestellt werden.

Bei diesem Verfahren kann keine Änderung von Parametern oder Beschränkungen während des Betriebs erfolgen. In der Masterarbeit [Neu16] ist daher ein EMPC-Entwurf für betriebspunktabhängige Induktivitäten beschrieben. Die Masterarbeit baut auf [BKKP11] auf, was die Berücksichtigung des Reluktanzmoments ermöglicht (vgl. Unterabschnitt 1.4.2). In Übereinstimmung mit dem Stand der Wissenschaft ergibt sich die Grenze zur Echtzeitfähigkeit bei Berücksichtigung von 16 affinen Beschränkungen des Optimierungsproblems. Diese werden auf Zustände und Eingänge gleichermaßen verteilt, wodurch Achtecke entstehen. Die Berücksichtigung des Reluktanzmoments und der Sättigung kann durch stückweise affine Modelle erfolgen. Hinsichtlich der Sättigung des Eisenkreises entspricht diese Modellierung der Verwendung mehrerer Maschinenmodelle mit unterschiedlichen Induktivitätswerten, denen entsprechende Gültigkeitsbereiche im Zustandsraum zugeordnet werden. In der Masterarbeit [Neu16] zeigt sich, dass die Wahrung der Echtzeitfähigkeit maximal vier affine Systeme zur Beschreibung zulässt, da ansonsten das Entscheidungsproblem des EMPC zur Auswahl der gültigen affinen Zustandsrückführungen zu komplex wird. Durch die geringe Anzahl an Induktivitätswerten führt dies zu Ergebnissen, die mit PI-Ansatz und entsprechender Parameteradaption erreicht werden können.

Aus dieser Betrachtung resultiert, dass die Überwindung der limitierenden Modellvereinfachungen nur mit Optimierungsverfahren möglich ist, die online eine Adaptation an zeitvariable Parameter im Maschinenmodell erlauben. Verfahren, die bisher eine exakte Spannungsbegrenzung ermöglichen, sind projizierende oder *Active Set* Methoden (vgl. Unterabschnitt 1.4.2). In der Masterarbeit [Dud16] ist der Einsatz des Optimierungsalgorithmus *Active Set* (PD) in der Implementierung *qpOASES* ([KBF<sup>+</sup>15, FKP<sup>+</sup>14]), wie es ebenfalls im Stand der Wissenschaft in [TCFB19] (vgl. Unterabschnitt 1.4.2) genutzt wird, untersucht. Er wird verglichen mit einem im Stand der Wissenschaft bisher nicht eingesetzten *Interior Point* (PD) Verfahren in der Implementierung *FORCESPro* ([DJ19, ZDJM17]). Das Ergebnis ist, dass beide zu vergleichbaren Berechnungszeiten führen. Dies untermauert die Uneindeutigkeit bei der Auswahl eines Optimierungsalgorithmus für die vorliegende Anwendung. Jedoch erlauben beide Implementierungen nur die Modellierung von affinen Begrenzungen im Optimierungsproblem, daher muss zwangsläufig bei diesem Vorgehen die im Zustandsraum kreisförmige Begrenzung des Stromes approximiert werden.

Dem gegenüber steht die Klasse der gradientenbasierten und projizierenden Verfahren zur Lösung des primalen Optimierungsproblems. Hierbei ist die *Projected Fast Gradient Method* (PFGM) als Algorithmus im Stand der Wissenschaft vertreten. In [PBD13] ist sie zur Stromregelung von PSM eingesetzt (vgl. Unterabschnitt 1.4.2), jedoch nur mit kreisförmiger Spannungsbegrenzung. In der Veröffentlichung [RMM10] hat Richter die PFGM zur Regelung des Stroms einer Sechspuls-Brücke als AC/DC-Wechselrichter mit Filter in Verbindung mit einer exakten zeitvarianten Spannungsbegrenzung eingesetzt. Richter hat ebenso umfangreiche Beiträge zur Abschätzung von Konvergenzraten und erzielbaren Genauigkeiten bei gradientenbasierten Verfahren für die Optimierung in echtzeitfähigen MPC durchgeführt ([Ric12]). Die Möglichkeit, die Anzahl der notwendigen Iterationen in Abhängigkeit einer Schranke für die Genauigkeit des berechneten Optimums vorgeben zu können, ist ein zentraler Vorteil im Ver-



gleich zu den *Active Set* Methoden ([RMM10]). Dies ist ein wichtiger Aspekt bei der Implementierung echtzeitfähiger MPC und ein großer Unterschied zu *Active Set* Verfahren. Bei projizierenden Verfahren liegt in jedem Iterationsschritt eine zulässige Lösung vor und es besteht eine schrittweise Verbesserung im Sinne der Gütefunktion innerhalb der Iterationen. Letzteres ist besonders wichtig, wenn die Optimierung aufgrund einer beschränkten Berechnungszeit abgebrochen werden muss, bevor ein Abbruchkriterium anhand einer definierten Genauigkeit erreicht wird. Aus diesen Gründen findet in dieser Arbeit ein projizierendes Gradientenverfahren Anwendung.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag, indem eine Methode vorgestellt wird, welche die Berücksichtigung von Eingangs- und Zustandsbegrenzungen bei gradientenbasierter Optimierung des primalen Problems ermöglicht. Zum Verständnis der folgenden Erklärungen wird daher der verwendete Optimierungsalgorithmus anschaulich erläutert und seine Parameter werden bestimmt.

## 4.1 Einführung der *Projected Fast Gradient Method* zur Lösung des Optimierungsproblems im MPC

Zur Optimierung wird das *Constant Step Scheme II for Simple Set* aus [Nes18, Kap. 2.3] von Y. Nesterov verwendet. Diese Methode geht zurück auf die frühen Arbeiten Nesterovs in den 80er Jahren ([Nes08]). In [Nes18, Kap. 2.14] ist eine untere Schranke für die Konvergenzrate von Optimierungsalgorithmen, die nur lokal den Funktionswert und den Gradienten auswerten, berechnet. Dies gilt für bestimmte Funktionsklassen, die in den folgenden Voraussetzungen beschrieben sind. Sind diese erfüllt, erreicht der verwendete Optimierungsalgorithmus diese Konvergenzrate<sup>34</sup> und kann als optimal bezeichnet werden. Reine Gradientenabstiegsverfahren erreichen diese Konvergenzrate nicht, daher werden Verfahren nach dem vorgestellten Schema als *Fast Gradient Method* (FGM) bezeichnet. Werden FGM für beschränkte Probleme verwendet, wird dem Algorithmus ein Projektionsschritt hinzugefügt, weshalb diese als *Projected FGM* (PFGM) bezeichnet werden. Dem Urheber dieser Verfahren folgend wird hier der Begriff *Constant Step Scheme II for Simple Set* für den verwendeten Algorithmus aus [Nes18, Kap. 2.3] von Y. Nesterov verwendet. Damit *Constant Step Scheme II for Simple Set* einen optimalen lokalen gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus für das beschränkte Optimierungsproblem Gleichung (4.1) darstellt, muss folgendes gelten ([Nes18, Kap. 2.3]):

V4 Die Funktion  $J(\mathbf{u})$

V4.1 ist zweifach<sup>35</sup> stetig differenzierbar auf der Menge  $\mathcal{S}$ .

<sup>34</sup> Abgesehen von einem konstanten Faktor, für Details siehe [Nes18, Kap. 2.14].

<sup>35</sup> [Nes18, Kap. 2.3] folgend ist einfache stetige Differenzierbarkeit ausreichend, hier wird zweifache stetige Differenzierbarkeit von  $J$  gefordert, um die Parameter  $L$  und  $\mu$  über die Ableitung zweiter Ordnung (siehe Gleichung (4.5)) bestimmen zu können.

V4.2 hat eine Lipschitz-stetige erste Ableitung auf der Menge  $\mathcal{S}$  mit der Lipschitzkonstanten  $L$ . Diese ist wie folgt definiert ([BBM17, Lemma 3.1]):

$$\|\mathcal{H}(J(\mathbf{u}))\|_2 \leq L, \quad (4.2)$$

V4.3 hat einen Konvexitätsparameter  $\mu$  größer null. Dieser ist wie folgt definiert ([BBM17, Theorem 3.2]):

$$\forall \mathbf{u} : \mathcal{H}(J(\mathbf{u})) - \mu \mathbf{I} \succeq 0. \quad (4.3)$$

Somit ist die Funktion streng konvex, das heißt es gilt die Definition A.3 im Anhang A.2.3.

V5 Die zulässige Menge  $\mathcal{S}$

V5.1 ist konvex und abgeschlossen,

V5.2 hat einen analytisch lösbaren Projektionsoperator.

Die Einhaltung der Anforderungen V5 an die Menge  $\mathcal{S}$  wird im weiteren Verlauf sichergestellt. Die anderen Anforderungen werden im Folgenden für die Funktion

$$\begin{aligned} J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_s) &= \|\mathbf{H}_{1u}\mathbf{u}_s(k) + \mathbf{h}_{1u}\|_2^2 + \|\mathbf{N}\mathbf{H}_{1u}\mathbf{R}2(\mathbf{H}_{2u}^\top\mathbf{H}_{2u}\mathbf{u}_s + \mathbf{h}_{2u})\|_2^2 & (4.4) \\ \text{mit } \mathbf{H}_{1u} &= \mathbf{C}_s\mathbf{B}_s, \quad \mathbf{H}_{2u} = \mathbf{B}_s, \\ \mathbf{h}_{1u} &= \mathbf{C}_s(\mathbf{A}_s\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}_s) + \mathbf{F}_s - \mathbf{y}_{s,\text{soll}}(k), \\ \mathbf{h}_{2u} &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}_s. \end{aligned}$$

aus Gleichung (3.139) geprüft. Unter der Annahme, dass  $\mathcal{S}$  abgeschlossen ist und der quadratischen Form von  $J_{\text{lex}}$  ergeben sich unmittelbar Voraussetzungen V4.1 und V4.2. In Abschnitt 3.2 mit Voraussetzung V1.4 ist eine strenge Konvexität der am niedrigsten priorisierten Gütefunktion gefordert. Das wird durch die Verlustmodellierung in Unterabschnitt 3.4.1 erfüllt. Daraus resultiert ein einziger Punkt als Lösung des MOP. Die Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  besitzt dieses Minimum exklusiv und ist quadratisch, daher erfüllt sie die Voraussetzung V4.3. Allgemein können für die Wahl der Konstanten  $\mu$  und  $L$  Werte gewählt werden, welche die Gleichungen (4.2) und (4.3) erfüllen. Hier wird  $\mu$  so groß und  $L$  so klein wie möglich gewählt. Für quadratische Funktionen kann dies beispielsweise anhand der Hessematrix erfolgen ([BBM17, Example 3.1 und 3.2]):

$$\mu = \min \Lambda(\mathcal{H}(J_{\text{lex}})), \quad (4.5)$$

$$L = \max \Lambda(\mathcal{H}(J_{\text{lex}})). \quad (4.6)$$

Dabei ist  $\Lambda(\mathbf{M}) := \{\lambda \mid \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0\}$  die Menge der Eigenwerte einer Matrix  $\mathbf{M}$ . Bei der Verwendung des quadratischen Ansatz für die Drehmomentgleichung in der Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  in Gleichung (3.142) mit  $J_{1q}$  aus Gleichung (3.121) ist die Hessematrix nicht kon-

stant. Um diese Funktion zu optimieren ohne Kenntnis von  $\mu$  und  $L$  sind adaptive Verfahren mit lokalen Schätzungen für  $L$  und  $\mu$  notwendig (siehe z. B. [AOH17]). Lokale Schätzungen von  $\mu$  können für die nicht konvexe Funktion jedoch zu negativen Werten führen. Die Optimierung dieser Funktion ist nicht mit dem eingesetzten Optimierungsverfahren verträglich. Des Weiteren ist die Kombination des vorgestellten lexikographischen Ansatzes mit der affinen Beschreibungsform der Ausgangsgleichung und der quadratischen Gütefunktion, wie in Unterabschnitt 3.4.5 beschrieben, verträglicher. Aus diesen Gründen erfolgt hier, wie eben eingeführt, die Evaluation für  $J_{\text{lex}}$  aus Gleichung (3.139) mit der quadratischen Gütefunktion  $J_1$  aus Gleichung (3.91).

Somit sind die Voraussetzungen erfüllt und die Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  kann mittels des *Constant Step Scheme II for Simple Set* in Algorithmus 1 optimiert werden. Dort zeigt der Index  $k$  einen Iterationsschritt des Optimierungsalgorithmus innerhalb eines Zeitschrittes des MPC an. Es folgt die Erklärung des Algorithmus, diese wird durch die schematische Darstellung in Abbildung 4.1 unterstützt. In Zeile drei von Algorithmus 1 ist mit  $\mathbf{u}_{\text{alt}}$  das Endergebnis des

---

**Algorithmus 1** *Constant Step Scheme II for Simple Set* ([Nes18, Kap. 2.3]) mit *Warm Starting* ([BBM17, S. 43])

---

- 1: **Initialisierung**
  - 2:      $k = 1, n_{\text{maxi}} \in \mathbb{Z}$
  - 3:      $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{\text{alt}} \in \mathcal{S}$
  - 4:      $\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k$
  - 5:      $\beta_k = 0$
  - 6:      $\alpha_k \in \left[ \sqrt{\frac{\mu}{L}}, \frac{2(3*\sqrt{\frac{\mu}{L}})}{3+\sqrt{21+\sqrt{\frac{\mu}{L}}}} \right]$
  - 7: **Wiederhole**
  - 8:      $\hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \beta_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1})$
  - 9:      $\hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_k - \frac{1}{L} \nabla J_{\text{lex}}(\hat{\mathbf{u}}_k)$
  - 10:     $\mathbf{u}_{k+1} = \Pi(\mathcal{S}, \hat{\mathbf{u}}_k)$
  - 11:     $\alpha_{k+1} = \{ \alpha_{k+1} | \alpha_{k+1}^2 = (1 - \alpha_{k+1})\alpha_k^2 + \frac{\mu\alpha_{k+1}}{L} \}$   
       mit  $\alpha_{k+1} \in (0, 1)$
  - 12:     $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k(1 - \alpha_k)}{\alpha_k^2 + \alpha_{k+1}}$
  - 13:     $k = k + 1$
  - 14: **Bis**  $k > n_{\text{maxi}} \vee \|\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_k\|_2 \leq \Delta u_{\text{min}} \vee \|J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_{k-1}) - J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_k)\|_2 \leq \Delta J_{\text{min}}$
  - 15: **Ergebnis**  $\mathbf{u}_k$  als Näherung für  $\mathbf{u}^*$
- 

Optimierungsalgorithmus aus der vorigen Taktperiode des MPC bezeichnet. Das bedeutet, der Optimierungsalgorithmus beginnt die Optimierung immer mit dem Optimierungsergebnis des vorangegangenen Taktes als Startwert. Dies wird als *Warm Starting* bezeichnet ([BBM17, S. 43]). In [RJM09] ist gezeigt, dass dieses Vorgehen die Anzahl von notwendigen Iterationen für eine geforderte Genauigkeit bei FGM verringert. Die Parameter  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  bestimmen die Schrittweiten des Verfahrens und werden im Folgenden erläutert. Die initiale Wahl von  $\beta_1$  ist



- eine minimale Schrittweite im Lösungsraum  $\Delta u_{\min}$  unterschritten oder
- eine minimale Änderung der Gütefunktion  $\Delta J_{\min}$  unterschritten ist.

Diese Kriterien werden in Abschnitt 5.5 für den vorliegenden Anwendungsfall gewählt. Zur Vervollständigung des Algorithmus des Optimierungsproblems fehlen die Wahl der Beschränkungsmenge  $\mathcal{S}$  und die zugehörige Projektionsvorschrift. Hierfür werden in den folgenden zwei Abschnitten Ansätze vorgestellt. Im ersten Abschnitt wird der einfache Fall für eine Berücksichtigung der Eingangsbeschränkung betrachtet:  $\mathcal{S} = \mathcal{U}_s$ . Im zweiten Abschnitt wird der Fall betrachtet, wenn zusätzlich sichergestellt werden soll, dass die Zustände innerhalb ihrer Beschränkung bleiben:  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ .

## 4.2 Projektionsoperator in die Eingangsbeschränkung

Die Eingangsbeschränkung  $\mathcal{U}$  für den MPC kann ohne Approximation unmittelbar von der Modellierung aus Abschnitt 1.3 übernommen werden. Dies ist der große Vorteil des gewählten gradientenbasierten Verfahrens gegenüber den anderen Optimierungsmethoden aus dem Stand der Wissenschaft, da die Beschränkung trotz ihrer Abhängigkeit vom Rotorwinkel ohne Vereinfachungen übernommen werden kann. Die Eingangsbeschränkung im normierten dq-Koordinatensystem ist über sechs Ungleichheitsnebenbedingungen definiert:

$$\mathcal{U}(\gamma_{\text{el}}) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{G}_U \mathbf{R}_{\gamma_{\text{el}}} \mathbf{u} \leq \mathbf{g}_U\} \quad (4.10)$$

$$\text{mit } \mathbf{R}_{\gamma_{\text{el}}} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{\text{el}} & -\sin \gamma_{\text{el}} \\ \sin \gamma_{\text{el}} & \cos \gamma_{\text{el}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_U = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_U = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Der Rotorwinkel  $\gamma_{\text{el}}$  ändert sich bei hohen Drehzahlen während einer Taktperiode. Um den Fehler klein zu halten, sollte für die Berechnung der Beschränkung der mittlere Winkel der Taktperiode, für welche die Spannung berechnet wird, verwendet werden. Für  $\gamma_{\text{el}}$  wird ein prädizierter Wert verwendet, dessen Berechnung vom Messzeitpunkt des Rotorwinkels abhängt. Unter der bereits diskutierten Annahme einer konstanten Drehzahl erfolgt dies hier in trivialer Weise durch  $\hat{\gamma}_{\text{el}}(k+1) = \gamma_{\text{el}}(k) + T_A \omega_{\text{el}}$ . Auf gleiche Weise wird für die Erweiterung der Eingangsbeschränkung über dem Prädiktionshorizont verfahren:  $\hat{\gamma}_{\text{el}}(k+i) = \gamma_{\text{el}}(k) + iT_A \omega_{\text{el}}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{n_h}$ . Somit ergibt sich im Unterschied zur Gleichung (3.44) aus der Einführung des MPC-Optimierungsproblems in Unterabschnitt 3.3.1 eine über dem Prädiktionshorizont veränderliche aber innerhalb der Optimierung pro Taktperiode im Zeitschritt  $k$  konstante Menge der Eingangsbeschränkungen:

$$\mathcal{U}_s(k) := \mathcal{U}(\hat{\gamma}_{\text{el}}(k+1)) \times \dots \times \mathcal{U}(\hat{\gamma}_{\text{el}}(k+n_h)), \dim(\mathcal{U}_s(k)) = 2n_h. \quad (4.11)$$

Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden definiert:  $\mathcal{U}_m := \mathcal{U}(\hat{\gamma}_{\text{el}}(m))$ . Der Projektionsoperator  $\Pi(\mathcal{U}_s(k), \hat{\mathbf{u}}_s)$  kann durch die mehrfache Anwendung von  $\Pi(\mathcal{U}_{k+i-1}, \hat{\mathbf{u}}(k+i-1))$ ,  $i \in \mathcal{I}_{n_h}$  gebildet werden. In jedem Zeitschritt  $i \in \mathcal{I}_{n_h}$  des Prädiktionshorizonts wird  $\hat{\mathbf{u}}(k+i-1)$  auf die Beschränkung  $\mathcal{U}_{k+i-1}$  projiziert:  $\mathbf{u}(k+i-1) = \Pi(\mathcal{U}_{k+i-1}, \hat{\mathbf{u}}(k+i-1))$ . Das Ergebnis der Gesamtprojektion  $\mathbf{u}_s(k) = [\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n_h-1)]^\top$  bildet sich aus diesen  $\mathbf{u}(k+i-1)$ . Es entsteht das gleiche Ergebnis wie durch  $\Pi(\mathcal{U}_s(k), \hat{\mathbf{u}}_s(k))$ , da aufgrund von Gleichung (4.11) die Beschränkung eines jeden Horizontschritts  $\mathcal{U}_{k+j-1}$ ,  $j \in \mathcal{I}_{n_h}$  orthogonal auf allen anderen  $\mathcal{U}_{k+i-1}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{n_h} \setminus \{j\}$  steht.

Somit wird nur ein Algorithmus für den Projektionsoperator  $\Pi(\mathcal{U}, \mathbf{u})$  benötigt. Der im Rahmen dieser Arbeit entworfene Algorithmus ist ebenfalls in [Pre13] vorgeschlagen. Hier wird die grundlegende Vorgehensweise beschrieben. Die exakte algorithmische Beschreibung ist in [Pre13, Algorithm 5.3] zu finden. Zu den einfachsten Formen von Beschränkungen gehören achsparallele Ungleichungen, diese werden als *Box Constraint* bezeichnet. Sie sind insbesondere für Projektionen vorteilhaft, da Projektionen in der Form

$$\Pi(\mathcal{A}_{\text{Box}}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} & , \hat{\mathbf{u}} > \bar{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{u}} & , \hat{\mathbf{u}} < \underline{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (4.12)$$

einfach zu implementieren sind. Dabei steht  $\bar{\mathbf{u}}$  für einen maximal und  $\underline{\mathbf{u}}$  für einen minimal zulässigen Grenzwert. Mit dem Ziel solch einfache Begrenzungen zu erhalten, wird eine ähnliche Strategie wie bei der *Active Set* Methode in der Optimierung angewendet. Aufgrund des gleichseitigen Sechsecks, das durch  $\mathcal{U}$  beschrieben wird, kann durch Winkelberechnung einfach die aktive Ungleichheitsnebenbedingung, welche einer Zeile in Gleichung (4.10) entspricht, ermittelt werden. Dann wird eine Rotationstransformation ausgeführt, sodass diese aktive Ungleichheitsnebenbedingung achsparallel wird. In diesen rotierten Koordinaten können aufgrund der Gleichseitigkeit und Symmetrie des Sechsecks immer drei achsparallele Projektionen durchgeführt werden. Der erhaltene Punkt wird zurück rotiert und stellt das Ergebnis dar. Somit ist eine analytische und algorithmisch einfache Implementierung des Projektionsoperators  $\Pi(\mathcal{U}_s(k), \hat{\mathbf{u}}_s)$  gelungen. Wird diese in Algorithmus 1 zusammen mit der Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  verwendet, löst dies das lexikographische MPC-Optimierungsproblem. Durch die bisherigen Beschreibungen ist der MPC abgesehen von der Parametrierung, welche in Abschnitt 5.5 erfolgt, vollständig beschrieben.

## 4.3 Integration von Zustandsbeschränkungen

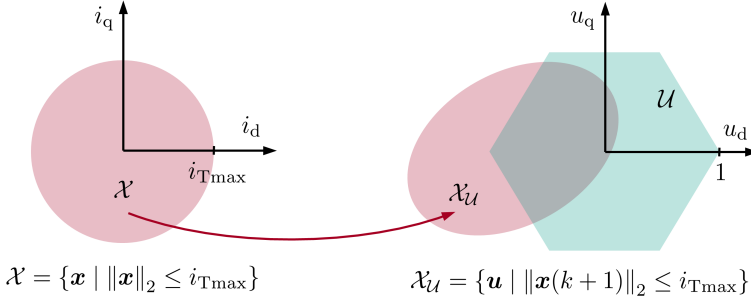
Dieser Abschnitt verfolgt das Ziel zusätzlich die in Abschnitt 1.3 erläuterte Strombegrenzung zu berücksichtigen. Diese formuliert sich für einen maximalen Strombetrag  $i_{T\max}$  wie folgt:

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq i_{T\max}\}. \quad (4.13)$$

Da die Zustände aufgrund des *Condensing* aus dem Optimierungsproblem durch die Substitution mit dem Prädiktionsmodell ersetzt werden, können diese nicht unmittelbar beschränkt werden. Eine Berücksichtigung wird dadurch möglich, dass nur Spannungen erlaubt werden, die zulässige Ströme in der Maschine erzeugen. Diese Berechnung erfolgt mit dem Prädiktionsmodell, folglich wird die Strombegrenzung innerhalb der Modellgenauigkeit eingehalten. Dieses Vorgehen für die Integration von Zustandsbegrenzungen ist ein Beitrag dieser Arbeit. Er ist im Folgenden allgemeingültig für MPC beschrieben. Er kann angewendet werden, falls eine affine Systemdynamik vorliegt und ein analytisch lösbarer Projektionsoperator für die in den Eingangsraum projizierte Zustandsbeschränkung existiert. Harte Begrenzungen werden durch den Optimierungsalgorithmus sicher und exakt anhand der beschreibenden Ungleichheitsnebenbedingungen eingehalten. Dies ist beispielsweise im vorigen Abschnitt für die Eingangsbeschränkungen erfolgt. Der Nachteil besteht in der Unlösbarkeit des MPC-Optimierungsproblems ([ZM95]), falls dieses mit einem aktuellen Zustand außerhalb der Zustandsbeschränkung  $\mathbf{x}(k) \notin \mathcal{X}$  initialisiert wird. Dies kann beim Betrieb in der Nähe der Zustandsbeschränkung durch kleine Störungen, Messfehler oder Modellungenauigkeiten verursacht werden. Im Gegensatz dazu wird im vorgeschlagenen Ansatz das MPC-Optimierungsproblem nur dann unlösbar, wenn die zur Verfügung stehende Stellgröße nicht ausreicht, das System im nächsten Taktzyklus in einen zulässigen Zustand zu überführen. Diese Einschränkung kann nur durch die Verwendung von weichen Beschränkungen und den damit verbundenen Nachteilen vermieden werden.

### 4.3.1 Transformation der Zustandsbeschränkung in den Eingangsraum

Die beschriebene Vorgehensweise kann durch eine Transformation der Zustandsbeschränkung  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  in den Eingangsraum betrachtet werden, dies ist in Abbildung 4.2 veranschaulicht. In der rechten Bildhälfte ist die Zustandsbeschränkung  $\mathcal{X}$  im Zustandsraum zu sehen, welche die Menge aller zulässigen Zustände repräsentiert. Diese wird in den Eingangsraum transformiert und als  $\mathcal{X}_U$  bezeichnet.  $\mathcal{X}_U$  enthält wie eingangs beschrieben, nur Eingänge, die im nächsten Schritt zulässige Zustände erzeugen. Die transformierte Zustandsbeschränkung  $\mathcal{X}_U$  lässt sich folglich mit der Zustandsgleichung in affiner Form aus Gleichung (2.23) formulieren:



**Abbildung 4.2:** Transformation der Zustandsbeschränkung in den Eingangsraum

$$\mathcal{X}_U := \{\mathbf{u}(k) \mid \|\mathbf{x}(k+1)\|_2 \leq i_{T\max}\} \quad (4.14)$$

$$= \{\mathbf{u}(k) \mid \|\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k)\|_2 \leq i_{T\max}\}. \quad (4.15)$$

Dass diese Transformation in den Eingangsraum zulässig ist, ergibt sich aus der bereits in Unterabschnitt 3.4.4 gezeigten Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{B}_d$ . Daraus folgt, dass der Folgezustand im diskreten System eine eindeutige Funktion des Eingangs ist. Das stellt jeweils lokal für alle affinen Modelle die Erfüllung der eindeutigen Beziehung zwischen Zuständen und Eingängen sicher. Diese Begründung wird durch die globale Betrachtungsweise der Flachheit und Invertierbarkeit des vorliegenden Systems unterstützt. Die Veröffentlichungen [ESP13] und [DS04] zeigen, dass bei linearer Modellierung der PSM ein flaches System entsteht. In [ESP13] werden die Ströme im dq-Koordinatensystem als flacher Ausgang verwendet. Somit existiert aufgrund der Flachheit unmittelbar ein inverses System, welches aus den Zuständen den Systemeingang bestimmt (siehe z. B. [Thü06, Kapitel 4.4]). Das kann auf Systeme mit nichtlinearem magnetischen Kreis übertragen werden. Zwei dynamische Systeme werden als äquivalent bezeichnet, wenn die glatte Abbildung  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty$  lokal jeden Zustand des einen Systems eindeutig in einen Zustand des anderen Systems überführt ([FLMR99, Def. 4]). Der Zusammenhang zwischen Strömen und Flüssen in der linearen Modellierung ist eindeutig, da es sich um lineare Zusammenhänge handelt. Folglich sind lineare Modelle mit den Flüssen und Strömen als Zuständen äquivalent. In der Arbeit [RGD14] ist allgemein für PSM mit Kreuzverkopplung und Sättigung gezeigt, dass der Zusammenhang von Strömen zu Flüssen

$$\mathbf{f}_\psi : (i_d, i_q) \rightarrow (\psi_d, \psi_q) \quad (4.16)$$

im dq-Koordinatensystem invertierbar und somit eindeutig ist. Aus der zulässigen Annahme  $\mathbf{f}_\psi \in \mathcal{C}^\infty$  folgt, dass die Systeme mit linearer und nichtlinearer Modellierung des magnetischen Kreises äquivalent sind. Nach [FLMR92, Lemma 1] ist ein System, das zu einem flachen System äquivalent ist, selbst flach. Dies belegt global die Flachheit des betrachteten Systems unabhängig von der konkreten Form der Modellierung. Es untermauert den eindeutigen



Zusammenhang von Eingang und Zuständen in der lokalen affinen Approximation.

Es wird nur die Zustandsbeschränkung für den ersten Horizontschritt projiziert. Der Grund liegt in der fehlenden Orthogonalität der Zustandsbeschränkung je Schritt im Prädiktionshorizont der projizierten Zustandsbegrenzung  $\mathcal{X}_U$ : Wird  $\mathcal{X}_U$  in Gleichung (4.15) über allen Schritten des Prädiktionshorizonts definiert, ist der Projektionsoperator für diese Menge nicht ohne Optimierung bestimmbar. Dies wird erkennbar durch die Struktur der Matrix  $\mathbf{B}_s$  in Gleichung (2.29). Aufgrund ihrer Dreieckstruktur muss bei der Projektion für das MPC-Optimierungsproblem im Zeitschritt  $k$  der Zustand  $\mathbf{x}(k+j)$  im Horizont, ebenfalls alle Vorgängerzustände  $\mathbf{x}(k)$  bis  $\mathbf{x}(k+j-1)$  variieren. Daher kann die Projektion nicht getrennt auf jedem Horizontschritt erfolgen, wie es für die Eingangsbeschränkung der Fall ist. Es liegt keine analytisch lösbare Projektionsoperation mehr vor. Aus diesem Grund wird hier die Hypothese angenommen, dass für die vorliegende Anwendung eine Zustandsbeschränkung für den ersten Horizontschritt ausreichend ist. Dadurch entsteht für  $n_h > 1$  eine größere Menge an planbaren Trajektorien über dem Prädiktionshorizont, da solche hinzukommen, die nicht zulässige Zustände für die Folgeschritte im Horizont erzeugen. Es ergeben sich im Allgemeinen nicht die gleichen Stellgrößen, wie mit einer Zustandsbegrenzung über dem gesamten Horizont.

### 4.3.2 Projektionsoperator für die projizierte Zustandsbeschränkung

In diesem Abschnitt wird die algorithmische Lösung des Projektionsoperators  $\Pi(\mathcal{X}_U, \mathbf{x})$  vorgestellt. Der genaue Algorithmus ist in der Masterarbeit [Li18] dargestellt und wird im Folgenden strukturell beschrieben. Die Projektion ist nur notwendig, wenn die Ungleichung in Gleichung (4.15) nicht erfüllt ist, ansonsten ist der Projektionsoperator die identische Abbildung:

$$\Pi(\mathcal{X}_U, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \Pi(\partial(\mathcal{X}_U), \hat{\mathbf{u}}) & , \|\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_d + \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{u}}\|_2 > i_{T\max} \\ \hat{\mathbf{u}} & , \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.17)$$

Im Folgenden wird der Projektionsoperator für  $\partial(\mathcal{X}_U)$  beschrieben.  $\partial(\mathcal{X}_U)$  ist eine Ellipse im Eingangsraum. Sie ergibt sich durch Umwandlung der Ungleichung in Gleichung (4.15) zu einer Gleichung. Diese quadratische Gleichung im Eingangsraum muss anhand physikalischer Überlegungen eine geschlossene Menge sein und stellt damit zwangsläufig eine Ellipse oder einen Kreis dar. Der gesuchte Projektionsoperator ist die Projektion eines Punktes auf eine Ellipse mit kürzester Distanz. Die oben beschriebene vektorielle implizite Gleichung der Ellipse lässt sich im Eingangsraum des ersten Horizontschritts mit den Koordinaten  $u_d$  und  $u_q$  durch die Funktion

$$u_d(u_q) = t_0 \pm \sqrt{t_1 + t_2 u_q + t_3 u_q^2 + t_4 u_q} \quad (4.18)$$

beschreiben. Die Parameter  $t_i, i \in \mathcal{I}_4$  bestimmen sich aus den Elementen der Matrizen  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$  und  $\mathbf{G}_d$  und dem Anfangszustand  $\mathbf{x}(k)$ . Das  $\pm$  zeigt an, dass es sich um zwei Funktionen handelt, die jeweils eine Hälfte der Ellipse beschreiben. Ist Gleichung (4.18) erfüllt und die Tangente an  $\partial(\mathcal{X}_U)$  im Ergebnispunkt ist orthogonal auf der Geraden durch  $\hat{\mathbf{u}}$  und den

Ergebnispunkt, stellt dies die Lösung des Projektionsoperators dar. Wird durch  $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_d, \hat{u}_q]^\top$  der gegebene Punkt außerhalb der Ellipse beschrieben, ergibt sich

$$\frac{du_d(u_q)}{du_q} = -\frac{(u_q - \hat{u}_q)}{(u_d - \hat{u}_d)}. \quad (4.19)$$

Diese Orthogonalitätsbedingung und die Funktion für die Ellipse kann zu einer quartischen Funktion in  $u_q$  zusammengefasst werden. Die Lösung von quartischen Funktionen ist analytisch möglich, während höhere Polynome nur noch numerisch lösbar sind ([Far08, S. 38]). Als analytisches Lösungsverfahren kommt die Ferrari Methode (siehe z. B. [Far08, Kap. 3.3]) zum Einsatz.<sup>36</sup> Die quartische Gleichung ist aus den beiden notwendigen Bedingungen in Gleichungen (4.18) und (4.19) entstanden. Es sind daher nicht alle gefundenen Lösungen relevant. Daher wird aus den vier analytisch gefundenen Punkten durch Abstandsberechnung das Ergebnis ermittelt. Somit ergibt sich für den Projektionsoperator  $\Pi(\mathcal{X}_U, \hat{\mathbf{u}})$  eine analytische Lösung, die keine Iterationen oder Schleifen enthält. Die Optimierung nach Algorithmus 1 kann direkt mit diesem Projektionsoperator erfolgen. Dann berechnet der MPC unbeschränkte Stellgrößen, die durch zusätzliche Maßnahmen, wie in herkömmlichen Regelansätzen, begrenzt werden müssen. Dies ist nicht zielführend, da die Spannungsbegrenzung relevanter ist. Sie ist bei fast allen dynamischen Vorgängen aktiv, während die Strombegrenzung nur in bestimmten Betriebsbereichen aktiv ist. Daher ist der umgekehrte Fall, die Spannungsbegrenzung im MPC vorzunehmen und die Strombegrenzung zu vernachlässigen, naheliegender. Dabei ist es üblich das kurze Überspringen der Ströme zu akzeptieren und die Sollwerte zu begrenzen ([Pre16a]). Im nächsten Abschnitt wird die Kombination von Zustands- und Eingangsbegrenzung betrachtet.

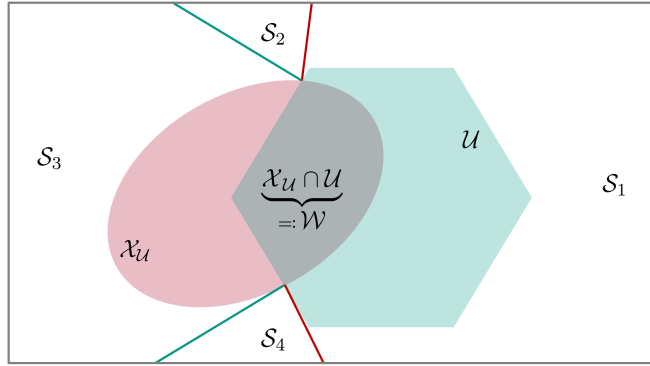
### 4.3.3 Projektionsoperator in die Schnittmenge aus Eingangs- und Zustandsbeschränkung

Die Einhaltung der Zustands- und Eingangsbegrenzung ist gewährleistet für Stellgrößen aus der Menge  $\mathcal{X}_U \cap \mathcal{U}_s(k)$ . Sie ist ebenfalls konvex, da sie aus dem Schnitt zweier konvexer Mengen entstanden ist ([BV04, Kap. 2.3.1]). Die Menge  $\mathcal{X}_U$  ist lediglich von  $\mathbf{u}(k)$  abhängig und liegt daher in einem Unterraum, der orthogonal auf allen  $\mathcal{U}_{k+i}$ ,  $i \in \mathcal{I}_{n_h-1}$  liegt.  $\mathcal{X}_U$  befindet sich im gleichen zweidimensionalen Unterraum wie die Eingangsbegrenzung des ersten Horizontschritts  $\mathcal{U}_k$  und muss daher nur mit diesem geschnitten werden. Die Projektion in den übrigen Dimensionen kann wie in Abschnitt 4.2 berechnet werden. Ziel dieses Abschnitts ist eine analytische Lösung für den Projektionsoperator  $\Pi(\mathcal{W}, \hat{\mathbf{u}})$  mit der Menge

$$\mathcal{W} := \mathcal{X}_U \cap \mathcal{U}(\gamma_{el}). \quad (4.20)$$

<sup>36</sup> Aus numerischen Aspekten sind in bestimmten Fällen iterative Lösungsverfahren von Vorteil (vgl. [CW13]), dies wird hier nicht weiter betrachtet.

Zur einfacheren Notation wird im Folgenden die Abhängigkeit der Eingangsbeschränkung vom Rotorwinkel  $\gamma_{el}$  nicht explizit ausgewiesen. Das im Folgenden vorgestellte Verfahren ist allgemein anwendbar für die Projektion in die Schnittmenge zweier konvexer Mengen beliebiger Form, für die bereits Projektionsoperatoren vorhanden sind. Es können allgemein drei



**Abbildung 4.3:** Veranschaulichung für die Projektion in die Schnittmenge aus Eingangs- und Zustandsbeschränkung

Fälle auftreten, wie sie am Beispiel der Eingangs- und Zustandsbeschränkung in Abbildung 4.3 beschrieben werden. Die umgebenden Mengen  $S_1$  bis  $S_4$  sind durch die Normalen an die beiden Mengen  $\mathcal{X}_U$  und  $\mathcal{U}$  in den Schnittpunkten der Ränder  $\partial(\mathcal{X}_U)$  und  $\partial(\mathcal{U})$  getrennt. Daraus folgt die Berechnung für den gesuchten Operator mithilfe der in Abbildung 4.3 definierten Mengen  $S_1$  bis  $S_4$

$$\Pi(\mathcal{W}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}} & , \hat{\mathbf{u}} \in (\mathcal{X}_U \cap \mathcal{U}) \\ \Pi(\mathcal{X}_U, \hat{\mathbf{u}}) & , \hat{\mathbf{u}} \in S_1 \cup (\mathcal{U} \setminus \mathcal{X}_U) \\ \Pi(\mathcal{U}, \hat{\mathbf{u}}) & , \hat{\mathbf{u}} \in S_3 \cup (\mathcal{X}_U \setminus \mathcal{U}) \\ \arg \min_{\mathbf{v} \in \partial(\mathcal{U}) \cap \partial(\mathcal{X}_U)} \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{u}}\|_2^2 & , \hat{\mathbf{u}} \in S_2 \cup S_4 \end{cases} \quad (4.21)$$

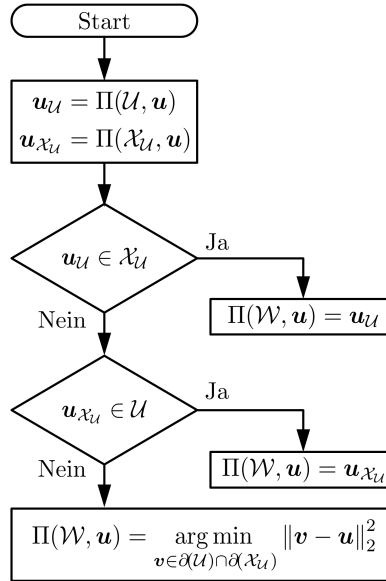
Der Fall in der letzten Zeile beschreibt den nächsten Schnittpunkt zum gegebenen Punkt  $\hat{\mathbf{u}}$ . Da nur zwei Schnittpunkte existieren, ist hier die Lösung durch Längenvergleich der Schnittpunkte tragbar. Die Berechnung der Schnittpunkte ergibt sich aus den Lösungen der sechs Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} i_{T_{\max}} &= \|\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k)\|_2 \\ 0 &= e_i(\mathbf{u}(k)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

für  $i \in \mathcal{I}_6$  mit  $[e_1(\mathbf{u}(k)) \quad \dots \quad e_6(\mathbf{u}(k))]^\top := \mathbf{G}_U \mathbf{R}_{\gamma_{el}} \mathbf{u} - \mathbf{g}_U$ ,

wobei die Matrizen  $\mathbf{G}_U$  und der Vektor  $\mathbf{g}_U$  in Gleichung (4.10) definiert sind. Diese sechs Gleichungssysteme lassen sich jeweils als quadratische Gleichung formulieren und daher analytisch lösen. Die Lösungen außerhalb  $\mathcal{U}$  müssen aussortiert werden. Anstatt die Mengen  $S_1$

bis  $\mathcal{S}_4$  explizit über ihre Normalenvektoren in den Schnittpunkten zu bestimmen, können die Fälle in Gleichung (4.21) durch das Ergebnis der bereits vorhandenen Projektionsoperatoren  $\Pi(\mathcal{X}_U, \hat{\mathbf{u}})$  und  $\Pi(\mathcal{U}, \hat{\mathbf{u}})$  identifiziert werden. Daraus ergibt sich der Algorithmus zur Berechnung von  $\Pi(\mathcal{W}, \hat{\mathbf{u}})$  im Ablaufplan in Abbildung 4.4. Der triviale Fall, dass der Punkt



**Abbildung 4.4:** Algorithmus zur Projektion in die Schnittmenge  $\mathcal{W}$  der konvexen Eingangbeschränkung  $\mathcal{U}$  und der projizierten Zustandsbeschränkung  $\mathcal{X}_U$

innerhalb der Menge  $\mathcal{W}$  liegt, wird durch dieses Vorgehen inhärent berücksichtigt und muss nicht zusätzlich geprüft werden. Der Berechnungsaufwand beschränkt sich auf: die Ausführung des Projektionsoperators der Mengen  $\mathcal{X}_U$  und  $\mathcal{U}$ , die Überprüfung der Zugehörigkeit zu den Mengen  $\mathcal{X}_U$  und  $\mathcal{U}$  sowie der Berechnung der Schnittpunkte durch die Lösung von maximal sechs quadratischen Gleichungen. In diesem Abschnitt ist gezeigt, wie eine analytische Lösung für den Projektionsoperator  $\Pi(\mathcal{W}, \hat{\mathbf{u}})$  berechnet werden kann. Dies ermöglicht die systematische Berücksichtigung von Zustands- und Eingangsbeschränkungen unter der Verwendung der PFGM. Die Auswertung der Regelergebnisse des MPC mit der hier vorgeschlagenen Methode erfolgt durch Simulation des Verhaltens einer PSM an der Stromgrenze in Unterabschnitt 5.6.1.

## 4.4 Auswirkungen der Beschränkung auf die lexikographische Gütefunktion

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen der hinzugefügten Beschränkungen auf das Ergebnis des lexikographischen MPC-Optimierungsproblems betrachtet. Allgemein lässt sich für das in Unterabschnitt 3.3.3 vorgestellte Verfahren Folgendes festhalten. Das Gleichungssystem (3.85) ist regulär und könnte alternativ zur vorgeschlagenen Methode ebenfalls analytisch gelöst werden. Dies ist jedoch nur ohne Eingangsbeschränkungen möglich. Bezogen auf das LOP entspricht es der Lösung des sequentiellen Optimierungsproblems in Korollar 3.1 durch die Auswertung der KKT-Bedingungen. Kommen Eingangsbeschränkungen hinzu, können sie in den Schritten des Horizonts teilweise aktiv und nicht aktiv sein. Daher ist das Gleichungssystem nicht unmittelbar in einem MPC verwendbar, der inhärent die Eingangsbeschränkungen berücksichtigt. Im Gegensatz dazu liefert die vorgestellte Methode immer eine Lösung, die aber bei Verletzung der Voraussetzungen von der LOP-Lösung abweicht.

Bei der Verwendung der hier vorgeschlagenen Transformation in Verbindung mit gradientenbasierten Suchverfahren, wie beispielsweise der PFGM, ergeben sich die folgenden Erkenntnisse. Gegenstand der Betrachtung sind alle Taktperioden des MPC, in denen das Ergebnis der Optimierung in  $\partial(\mathcal{W})$  liegt. Für eine Horizontlänge von  $n_h = 1$  entsteht in diesem Fall im Allgemeinen eine Abweichung vom lexikographischen Optimum. Dies entspricht der Verletzung der in V1.1 formulierten Voraussetzung. Da in Kapitel 5 die Auswertung für  $n_h = 1$  erfolgt, wird exemplarisch dieser Fall hier näher betrachtet. Ähnliches gilt bei  $n_h > 1$  für alle Taktperioden mit nicht konstantem Betriebspunkt, was einer Verletzung von Voraussetzung V3.3 entspricht. Durch die Optimierung unter aktiven Beschränkungen mit PFGM wird der Punkt in  $\partial(\mathcal{W})$  gefunden, in dem der Gradient der Gütefunktion und die Tangente an  $\partial(\mathcal{W})$  orthogonal aufeinander stehen. Der Gradient an die Gütefunktion  $J_{\text{lex}}$  ist eine Richtung aus dem konvexen Kegel der lexikographischen Abstiegsrichtungen  $\mathcal{D}_{\text{lex}}$  aus Definition 3.10. In [MN09] ist das lexikographische Minimum dadurch charakterisiert, dass die Schnittmenge aus allen erlaubten Richtungen und dem Kegel der lexikographischen Abstiegsrichtungen  $\mathcal{D}_{\text{lex}}$  leer ist. Für eine lexikographische Optimierung unter Beschränkungen durch gradientenbasierte Verfahren müssen daher alle Gradienten innerhalb des Kegels der lexikographischen Abstiegsrichtungen  $\mathcal{D}_{\text{lex}}$  ausgewertet werden. Es wird der Punkt mit dem geringsten Wert der Gütefunktion gesucht, der in  $\partial(\mathcal{W})$  liegt und für den ein Vektor innerhalb von  $\mathcal{D}_{\text{lex}}$  existiert, der zum Gradienten von  $J_{\text{lex}}$  orthogonal ist. Für die Optimierung durch PFGM wird nur einer dieser Vektoren als Richtung für die Suche verwendet. In [RTL96] finden diese Überlegungen zur Generierung von Optimalitätskriterien von LOP Anwendung. Das Ergebnis ist, dass die KKT-Bedingungen für lexikographische Minima nicht anwendbar sind. Dort ist daher eine erweiterte Form für die KKT-Bedingungen für LOP dargestellt. Abweichend von den herkömmlichen KKT-Bedingungen benötigen diese zusätzlich die zweite Ableitungsordnung. Aus den diskutierten Gründen geht hervor, dass gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen zur exakten Lösung in diesem Fall nicht unmittelbar verwendet werden können. Die ergebnislose Recher-

che nach solchen Verfahren bestätigt dies. Die Abweichung vom lexikographischen Optimum während der aktiven Beschränkung lässt sich als Ablenkung hin zu den niedriger priorisierten Regelzielen interpretieren. Zwischen den in den Gütefunktionen  $J_{1u}$  und  $J_{2T}$  quantifizierten Regelzielen wird ein Kompromiss analog zu den konventionellen Ansätzen mit gewichteter Summation der Gütefunktionen erzielt. Wird die Lage der jeweiligen globalen Minima von  $J_{1u}$  und  $J_{2T}$  als gegeben betrachtet, bestimmt sich die Lage des Kompromiss folglich durch das Verhältnis der Krümmung der Gütefunktionen zueinander. Dieses Verhalten kann daher durch die Einführung eines Gewichtungsfaktors angepasst werden. Umso stärker das primäre Regelziel gewichtet wird, umso näher wir das lexikographische Optimum erreicht, ähnlich wie bei der Relaxation von Gleichheitsnebenbedingungen. Aus diesen Gründen wird im folgenden Abschnitt ein Gewichtungsfaktor eingeführt. Seine Wahl beeinflusst das dynamische Verhalten des MPC und muss für die konkrete Anwendung gewählt werden. Da sich der Gewichtungsfaktor ebenso auf die Konvergenzrate von PFGM auswirkt, wird er zusammen mit der Vorkonditionierung des Optimierungsproblems im folgenden Abschnitt eingeführt.

An dieser Stelle wird die Motivation zur Vermeidung von Gewichtungsfaktoren aus Unterabschnitt 3.1.1 aufgegriffen. Die Einführung des LOP vermeidet die Notwendigkeit eines Gewichtungsfaktors zur Einstellung des Regelziels. Dies hat weiterhin Gültigkeit für den Fall, dass die diskutierten Voraussetzungen (V2 bzw. V3) gelten, was an dieser Stelle den Unterschied zu anderen Verfahren darstellt. Die Verwendung des Gewichtungsfaktors hat positive Auswirkung auf die dynamischen Vorgänge. Während dieser Vorgänge sind die Voraussetzungen für die Übereinstimmung zwischen lexikographischem Optimum und dem Minimum von  $J_{lex}$  in den beschriebenen Fällen nicht gegeben.

## 4.5 Konditionierung der Gütefunktion und Einstellung des dynamischen Verhaltens

In diesem Abschnitt werden zwei Gewichtungsfaktoren eingeführt. Zuerst wird der Gewichtungsfaktor  $k_{vk}$  nach numerischen Aspekten bestimmt. Der im Anschluss daran erklärte Gewichtungsfaktor  $k_v$  ermöglicht die Anpassung des Verhaltens während der im vorigen Abschnitt behandelten Verletzung der Voraussetzungen.

$k_{vk}$  wird zur Konditionierung der Gütefunktion so gewählt, dass die Optimierung schneller zur Lösung konvergiert. Bisher war die Lage des Optimums Zentrum der Betrachtungen. Bei der numerischen Optimierung mittels der PFGM ist es aber von Vorteil, wenn die Gütefunktion in jeglicher Richtung eine ähnliche Krümmung aufweist. Dies ist in der Masterarbeit [Dud16] an einem Beispiel gezeigt. Die Stärke der Krümmung wird durch die Eigenwerte der Hessematrix quantifiziert. Da hier mit konvexen und rein quadratischen Gütefunktionen gerechnet wird, sind diese stets positiv und konstant. Ideal wäre die Wahl

$$k_{vk}^* = \arg \min_{k_{vk}} \left( \max \left( \Lambda(\mathcal{H}(J_{1u}) + k_{vk}\mathcal{H}(J_{2T})) \right) - \min \left( \Lambda(\mathcal{H}(J_{1u}) + k_{vk}\mathcal{H}(J_{2T})) \right) \right). \quad (4.23)$$

Dadurch würde der Abstand zwischen der Quantifizierung der größten und der kleinsten Krümmung der Gesamtgütefunktion minimiert. Dieses Optimierungsproblem lässt sich im Allgemeinen nicht vereinfachen oder analytisch lösen, weshalb in dieser Arbeit ein approximativer Ansatz vorgestellt wird. Er hat zum Ziel die beiden Gütefunktionsanteile  $J_{1u}$  und  $J_{2T}$  bei ähnlicher Krümmung zu addieren. Die beiden Gütefunktionsanteile  $J_{1u}$  und  $J_{2T}$  sind jeweils nicht streng konvex (siehe Definition A.3 im Anhang A.2.3), sondern nur konvex (siehe Definition A.2 im Anhang A.2.2), daher besitzen die Hessematrizen jeweils einen Eigenwert von null. Daher wird die Berechnung von  $k_{vk}$  so gewählt, dass die maximale Krümmung der beiden Anteile gleich wird:

$$k_{vk} = \frac{\max \Lambda(\mathcal{H}(J_{1u}))}{\max \Lambda(\mathcal{H}(J_{2T}))}. \quad (4.24)$$

Die Hessematrizen berechnen sich ausgehend von Gleichungen (3.126) und (3.140) durch

$$\mathcal{H}(J_{1u}) = 2\mathbf{H}_{1u}^T \mathbf{H}_{1u} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{H}(J_{2T}) = 8\mathbf{H}_{2u}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{H}_{2u}, \quad (4.26)$$

$$\text{mit } \mathbf{K} = \mathbf{N} \mathbf{H}_{1u} \mathbf{R} \mathbf{H}_{2u}^T. \quad (4.27)$$

Durch Einführen des zweiten Gewichtungsfaktors  $k_v$  ergibt sich die Gütefunktion

$$J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_s) = J_{1u}(\mathbf{u}_s) + k_v k_{vk} J_{2T}(\mathbf{u}_s). \quad (4.28)$$

Aufgrund der Vorkonditionierung ist aus numerischer Sicht  $k_v = 1$  sinnvoll, um die erzielte numerische Verbesserung durch  $k_{vk}$  nicht zu verändern.  $k_v$  dient jedoch der Anpassung des Verhaltens während der im vorigen Abschnitt behandelten unumgänglichen Verletzung der Voraussetzungen. Somit kann durch  $k_v$  das dynamische Verhalten des Regelkreises eingestellt werden. Die konkrete Wahl von  $k_v$  für die PSM sowie die Betrachtung der Auswirkungen erfolgt anhand der Auswertung des Regelergebnisses im Unterabschnitt 5.5.2. Der zuvor berechnete Faktor  $k_{vk}$  ist dadurch jedoch nicht obsolet, da durch ihn die geometrische Gestalt der Gütefunktion vor der Gewichtung mit  $k_v$  unabhängiger vom aktuellen Betriebspunkt wird. Somit hängt ebenso die Wahl des Gewichtungsfaktors  $k_v$  weniger vom aktuellen Betriebspunkt der PSM ab. Dies vereinfacht die Einstellung von  $k_v$  und vermeidet eine vom Betriebspunkt abhängige Anpassung.

## 4.6 Zusammenfassung

In Kapitel 4 ist der verwendete Optimierungsalgorithmus PFGM vorgestellt und die Voraussetzung für seine Anwendbarkeit geprüft für das vorliegende lexikographische MPC-Optimierungsproblem. Im Anschluss sind mögliche Projektionsoperationen für die Berücksichtigung von Eingangs-, Zustandsbeschränkungen und deren Kombination vorgestellt. Abschließend sind zwei Themen, welche die beschränkte Optimierung im MPC betreffen, diskutiert: erstens die Auswirkungen der Abweichung vom lexikographischen Optimum während der aktiven Eingangsbeschränkung ( $n_h = 1$ ) und zweitens die daraus resultierende Verwendung eines Gewichtungsfaktors und die dafür sowie aus numerischer Sicht vorteilhafte Konditionierung der Gütefunktion.



# 5 Anwendung der vorgestellten Methode auf eine PSM mit vergrabenen Magneten

In diesem Kapitel wird das vorgestellte Verfahren an einem Antrieb erprobt. Dies erfolgt durch Simulation mithilfe einer experimentell validierten Maschinenmodellierung nach [Ric15]. Wie bereits erläutert wird die affine Form der Ausgangsgleichung in der Gütefunktion verwendet. Das Kapitel beginnt mit der Versuchsbeschreibung, danach erfolgt die Validierung des Prädiktionsmodells. Als vorbereitender Schritt für die verschiedenen Untersuchungen wird nochmals eine Übersicht über die Implementierung gegeben. Dabei werden zusätzlich einzelne wichtige Aspekte der Implementierung aufgegriffen und erläutert. Die Einleitung für die Untersuchungen stellt dann die Vorstellung der betrachteten Szenarien und verwendeten Kennzahlen zur Beurteilung dar. Vor den Untersuchungen wird mittels der gleichen Szenarien und Kennzahlen die Parametrierung des MPC vorgenommen. Mit dieser Einstellung werden dann die folgenden Aspekte untersucht:

- Bewertung der Regelergebnisse des MPC im ungestörten Fall und Vergleich zum PI-Zustandsregler
- Bewertung der Regelergebnisse bei Parameterfehlern
- Bewertung der Regelergebnisse bei Messfehlern
- Bewertung der Regelergebnisse bei oszillierenden Sollwerten

Während die ersten drei Punkte von allgemeinem Interesse sind, stellt der letzte Punkt einen konkreten Aspekt für die Verwendung im Antriebsstrang eines PKW dar. Es zeigt das Potential für die Kompensation von Drehmomentschwingungen, die durch das Getriebe verursacht werden. Des Weiteren ist in der Abschlussarbeit [Mül18] die Erweiterung des Verfahrens auf die zusätzliche Optimierung der Zwischenkreisspannung unter Berücksichtigung der Verluste im Wechselrichter dargestellt.

## 5.1 Versuchsbeschreibung

Dieser Abschnitt behandelt drei Themen. Im ersten Unterabschnitt werden die Komponenten des betrachteten Antriebssystems, die der Modellerstellung in der Simulation zugrunde liegen, vorgestellt. Im zweiten wird diese Simulationsumgebung erläutert. Der dritte Abschnitt stellt

einen PI-Regler nach dem Stand der Wissenschaft vor, der zur Einordnung der Simulationsergebnisse in den Folgeabschnitten als Vergleich dient.

### 5.1.1 Betrachtetes Antriebssystem

Bei dem betrachteten Antriebssystem handelt sich um eine dreiphasige PSM, die an einem Sechspuls-Wechselrichter betrieben wird. Die Maschine ist in Bauform und Leistungsklasse für den Einsatz in Elektrofahrzeugen geeignet. Die Daten der Maschine mit vergrabenen Magneten entstammen einem FEM Modellentwurf des Elektrotechnischen Institut des KIT. Das Maschinenmodell ist laut den Daten der Tabelle 5.1 ausgelegt. Die Maschine weist aufgrund

Maximalmoment	$M_{\max}$	170 Nm
Maximalstrom	$I_{\text{eff},\max}$	230 A
Nennspannung	$U_N$	280 V
Nennleistung	$P_N$	90,32 kW
Nenndrehzahl	$\Omega_N$	5000 $\text{min}^{-1}$
Statorwiderstand	$R_S$	0,0284 $\Omega$
Polpaarzahl	$p$	3
Maximaldrehzahl	$\Omega_{\max}$	12 000 $\text{min}^{-1}$
Aktive Rotorlänge	$l$	200 mm
Mag. Fluss der Permanentmagnete	$\Psi_{\text{PM}}$	0,1019 Wb

**Tabelle 5.1:** Daten des FEM Modells der PSM der Simulation ([WR15])

ihres Designs für hohe Leistungsdichten einen nichtlinearen magnetischen Kreis sowie aufgrund der vergrabenen Magneten eine magnetische Asymmetrie auf. Die genaue Ausprägung dieser Effekte kann den Flusskennfeldern der Maschine in Anhang A.6.1 entnommen werden. Dort sind noch weitere Maschinenparameter aufgeführt. Die Flusskennfelder werden ebenfalls für die in Kapitel 2 vorgestellte Erstellung des Prädiktionsmodells des MPC verwendet. Dem Wechselrichter liegen die Daten eines *SKiiP* Moduls ([SEM07]) bestehend aus sechs IGBT Transistoren mit Freilaufdioden in Sechspuls-Brückenschaltung zugrunde wie es für die Antriebe in Elektrofahrzeugen typisch ist ([Hof11, S. 145]). Dessen Grenzwerte sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Zwischenkreisspannung des Systems wird auf  $U_{\text{ZW}} = 400 \text{ V}$  und die Takt-

Maximale Zwischenkreisspannung	$U_{\text{ZW},\max}$	900 V
Maximalstrom	$I_{\text{Tmax}70^\circ\text{C}}$	375 A

**Tabelle 5.2:** Daten des simulierten Wechselrichters

frequenz sowie die Abtastfrequenz werden auf  $T_A^{-1} = 8 \text{ kHz}$  festgelegt. Taktfrequenz des Wechselrichters und Abtastfrequenz der Regelung sind somit gleich. Daraus ergibt sich eine Abtastperiode von 125  $\mu\text{s}$ .

### 5.1.2 Beschreibung der Simulationsumgebung

Bevor die Simulationsumgebung beschrieben wird, erfolgt zunächst in Abbildung 5.1 ein Überblick über den Regelkreis, wie er in der Simulation implementiert ist. Der Regelkreis zeigt die Schnittstellen der Strecke aus PSM und Wechselrichter (WR) zur Regelung (MPC) auf.

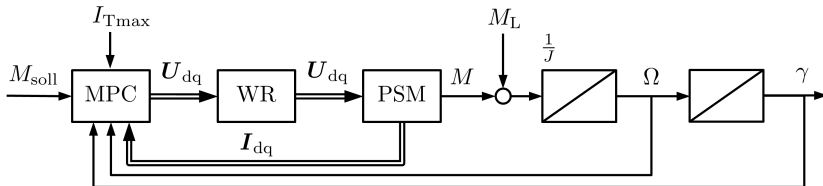


Abbildung 5.1: Aufbau des Regelkreises in der Simulation

Die Untersuchungen werden durch numerische Simulation mit *MATLAB Simulink* ([MAT17]) durchgeführt. Die Simulationsumgebung wurde im elektrotechnischen Institut (ETI) des KIT entwickelt und ist in der Arbeit [Ric15] publiziert. Die Simulationsumgebung gliedert sich in zwei Teile. Ein physikalisches Modell des Antriebssystems wird akausal durch *Simscape* modelliert. *Simscape* ist eine Erweiterung von *MATLAB Simulink*, welche die domänenübergreifende bidirektionale Simulation ermöglicht. In diesem Teil sind die Modelle des Wechselrichters, die Last und die PSM implementiert. Der andere Teil ist in *Simulink* implementiert und beinhaltet alle signalverarbeitenden Anteile, dies sind die untersuchten Regler. Schnittstellen zwischen diesen beiden Teilen sind die Schnittstellen des Reglers: die Stell- und Messgrößen. Die technischen Daten des Simulationsrechners können dem Anhang A.6.2 entnommen werden. Die Simulation wird im dq-Koordinatensystem durchgeführt, da aufgrund der getroffenen Annahmen keine Phasengrößen notwendig sind. Dies gilt nicht für die Untersuchung im Abschnitt 5.8. Dort werden Messfehler betrachtet und es ist notwendig auf das real vorliegende Koordinatensystem zu wechseln.

Im Folgenden werden die Annahmen des Simulationsmodells aufgeführt. Der Prüfling wird unmittelbar in *Simscape* durch die elektrische Differentialgleichung (1.1), die Flusskennfelder der Maschine (siehe Anhang A.6.1) für die Flussgleichung (1.2), die Drehmomentgleichung (1.3) und die mechanische Differentialgleichung (1.4) beschrieben. Folglich können alle Effekte als berücksichtigt gelten, die sich darin abbilden lassen. Durch die mit FEM Berechnung erstellten Flusskennfelder werden folglich die Sättigung des Eisenkreises und dessen Kreuzverkopplung berücksichtigt. Effekte, die nicht modelliert sind, aber in der Realität auftreten, sind vielfältig, dazu zählen: Eisen- und Magnetverluste, Stromverdrängung, temperaturbedingte Parameterschwankungen. Die Last ist als Drehzahlquelle implementiert (Begründung hierzu in Unterabschnitt 2.1.1). Somit können ohne eine dynamische Simulation eines Trägheitsmoments, respektive einer Last, alle mechanischen Betriebspunkte der Maschine angefahren werden. Das Modell des Wechselrichters im dq-Koordinatensystem ist je eine Gleichspannungsquelle für

die d- und q-Spannung mit einem maximalen Wert von  $\frac{2}{3}U_{ZW}$  (siehe Abschnitt 1.3), wobei  $U_{ZW}$  die Spannung des Gleichspannungszwischenkreises ist.

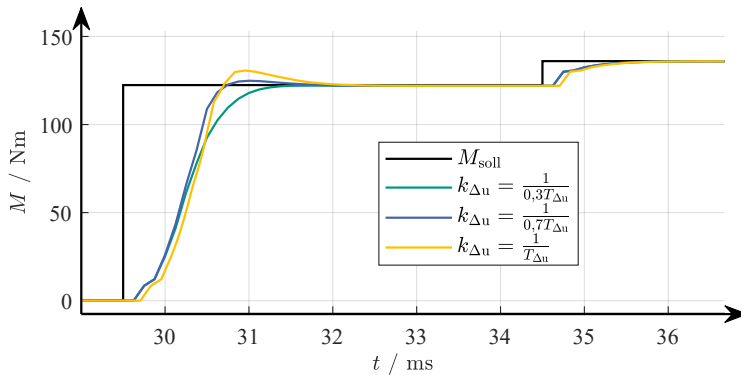
### 5.1.3 Vorstellung des Vergleichsreglers

Neben dem in dieser Arbeit vorgestellten MPC-Ansatz wurde ein weiterer Regler nach dem Stand der Wissenschaft implementiert, um die Simulationsergebnisse hinsichtlich der Reglerzielereichung besser einordnen zu können. Als Vergleichsregler für das Drehmoment der Maschine dient der Vorschlag aus der Dissertation [Gem15]. Dieser Regelansatz besteht im Kern aus zwei entkoppelten PI-Zustandsreglern im dq-Koordinatensystem und kann zu den PI-Regelansätzen gezählt werden. Die verwendete Entwurfsmethodik für die PI-Zustandsregler entstammt der Literatur für Antriebstechnik [Nuß10] für Gleichstromantriebe. Unter der Verwendung einer Vorsteuerung zur Entkopplung des d- und q-Strompfades kann dieser für PSM herangezogen werden. Das genaue Entwurfsverfahren wird in den zitierten Quellen als Zustandsregler mit Dead-Beat-Verhalten bezeichnet. Die Pole werden jedoch nicht in den Ursprung gelegt, wie es bei einem reinen Dead-Beat-Ansatz der Fall wäre. Die Masterarbeit [Par17] zeigt Zusammenhänge zum klassischen PI-Zustandsregler auf, weshalb er in dieser Arbeit als PI-Zustandsregler (PIZR) bezeichnet wird. Die hier relevanten Erweiterungen und Anpassungen, um Maschinen mit nichtlinearem magnetischem Verhalten im Betriebsbereich voll ausnutzen zu können, sind wie folgt:

- Die Berechnung des Zusammenhangs vom Drehmoment auf verlustarme Sollzustände erfolgt im hier relevanten Betriebsbereich durch Minimierung des Strombetrags (MMPA-Verfahren) nach [Gem15, Kap. 5.1].
- Die Parameter des Reglers sind von der Induktivität der Maschine abhängig. Durch das nichtlineare Verhalten des Magnetkreises handelt es sich um zustandsabhängige Parameter. Diese werden durch eine geschickte Wahl, die nicht nur vom aktuellen Zustand sondern ebenso vom Sollzustand abhängt, bestimmt.
- Die Parameter der Vorsteuerung zur Entkopplung hängen vom magnetischen Fluss ab. Er wird ebenfalls nicht unmittelbar aus den aktuellen Zuständen bestimmt, sondern approximativ prädiziert, um die Berechnungstotzeit des diskreten Reglers zu berücksichtigen.
- Zur Begrenzung der vom Regler berechneten Stellgröße auf den physikalisch möglichen Spannungswert des Wechselrichters werden in [Gem15] drei Verfahren aus der Literatur vorgestellt. Das im Vergleichsregler verwendete Verfahren ist physikalisch motiviert: Es begrenzt den Spannungsraumzeiger so, dass die Auswirkungen auf beide Stromkomponenten im dq-Koordinatensystem in einem bestimmten Verhältnis erfolgen. Das Verhältnis soll gleich sein wie das Verhältnis der Stromkomponenten des unbegrenzten Spannungsraumzeigers wie er vom Regler berechnet wurde.

- Als Anti-Wind-Up Strategie kommt eine physikalisch motivierte Methode aus [Nuß10] zum Einsatz. In der Masterarbeit [Par17] ist diese Struktur als eine Abwandlung des *Back Calculation and Tracking* Verfahrens nach [ÄH95, Kapitel 3.5] identifiziert. Dabei wird die Differenz zwischen gestellter und vom Regler berechneter Spannung dem Eingang des Integrators des PIZR mit separater Verstärkung  $k_{\Delta u} = \frac{1}{T_{\Delta u}}$  hinzuaddiert.

Die Parametrierung des Vergleichsreglers erfolgt im Wesentlichen wie in den genannten Quellen. Die Stellgrößen-Ausnutzung bei diesem PIZR ist bei großen Sprüngen sehr gut, da er wie oben beschrieben nahe am Dead-Beat-Verhalten ausgelegt ist. Zur Minimierung des Überschwingens ist daher der letztgenannte Punkt der Auflistung essentiell. In Abbildung 5.2 sind exemplarisch Sprungantworten für drei Parametrierungen von  $k_{\Delta u}$  gezeigt. Zu sehen sind zwei Sprungantworten des PIZR auf Sprünge im Solldrehmoment bei Stillstand der Maschine. Zum einen der Wert, wie in der Literatur vorgestellt,  $k_{\Delta u} = \frac{1}{T_{\Delta u}}$  und zwei langsamere Konfigurationen:  $k_{\Delta u} = \frac{1}{0,3T_{\Delta u}}$  und  $k_{\Delta u} = \frac{1}{0,7T_{\Delta u}}$ . Für den kleinen Sprung bei hohem Dreh-



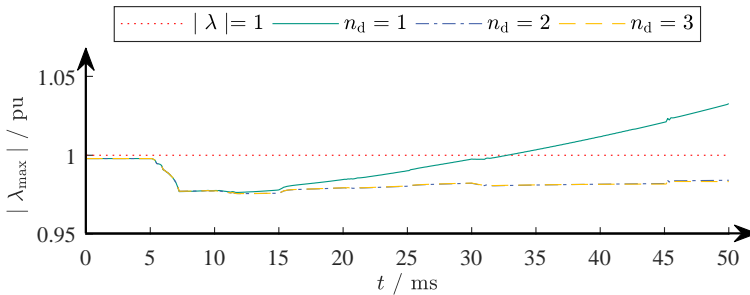
**Abbildung 5.2:** Sprungantwort des PI-Zustandsreglers für verschiedene Werte der integralen Verstärkung des *Back Calculation and Tracking* bei Stillstand der Maschine

moment ist eine langsame Annäherung an das Solldrehmoment zu erkennen. Die Wahl der integralen Verstärkung des *Back Calculation and Tracking* beeinflusst dies kaum. Die Ursache dafür ist die Kombination aus der Parameteradaption der Induktivitäten welche insbesondere für kleine Sprünge die Induktivität in q-Richtung zu schnell absenkt. Für den Vergleich in den folgenden Abschnitten wird der Wert  $k_{\Delta u} = \frac{1}{0,7T_{\Delta u}}$  als guter Kompromiss zwischen kurzer Anregelzeit und geringem Überschwinger gewählt.

## 5.2 Validierung des Prädiktionsmodells

Zunächst muss die Diskretisierungsordnung  $n_d$  des diskreten Zustandsraummodells in Gleichungen (2.20) bis (2.22) gewählt werden. Dies ist der einzige Parameter, der im Prädiktionsmodell einzustellen ist. Die Validierung des Simulationsmodells zeigt danach, dass das in Ab-

schnitt 2.2 vorgestellte gestapelte Prädiktionsmodell der Maschine die notwendige Genauigkeit für eine Regelung erreicht. Dies wird mithilfe des Drehmomentverlaufs durchgeführt, da es die Regelgröße ist und nicht gesondert an den beiden Zuständen – den Strömen im dq-Koordinatensystem. Wie bereits in Unterabschnitt 2.1.3 beschrieben, sind Eulerapproximationen in diesem Anwendungsfeld für hohe Drehzahlen nicht immer ausreichend. Die Untersuchung der Eigenwerte der Systemmatrix  $A_d$  des diskreten Zustandsraummodells aus Gleichung (2.20) bei steigender Drehzahl bestätigt dies für die vorliegende PSM. In Abbildung 5.3 ist der Betrag des Eigenwertes der Systemmatrix  $A_d$  mit dem höchsten Betrag über der Zeit aufgetragen. Während der Zeit steigt die Drehzahl zwischen 5 und 50 ms linear von 0 auf  $12\,000\text{ min}^{-1}$  an.



**Abbildung 5.3:** Validierung des Maschinenmodells während einer Drehzahlrampe vom Stillstand bis zur Maximaldrehzahl

Somit ist zu erkennen, dass das Modell mit der Diskretisierungsordnung  $n_d = 1$  mit steigender Drehzahl deutlich von den anderen beiden Modellen abweicht und ab 33 ms, das entspricht etwa  $7500\text{ min}^{-1}$ , instabil wird. Sollten nur Drehzahlen bis  $1800\text{ min}^{-1}$  notwendig sein, kann auf die aufwendigere Berechnung verzichtet werden. Die Eulerapproximation weicht für diesen Fall nur unwesentlich von den Diskretisierungen höherer Ordnung ab. Für den vollen Drehzahlbereich der Maschine sollte die Diskretisierungsordnung folglich größer eins gewählt werden. Eine Diskretisierungsordnung von  $n_d = 2$  ist bereits ausreichend, wie die folgende Validierung zeigt.

Die Validierung betrachtet die Frage: Wie gut kann das erstellte Modell bei exakter Kenntnis der zukünftigen Spannungen das Drehmoment vorhersagen? Die Tatsache, dass ein affines Maschinenmodell am aktuellen Zustand erstellt und über den gesamten Prädiktionshorizont verwendet wird, ist die größte Fehlerquelle. Umso weiter die Folgezustände im Horizont vom Entwicklungspunkt der Linearisierung entfernt sind, umso stärker ist dieser Einfluss. Es wird ein hoher Prädiktionshorizont von vier Schritten<sup>37</sup> zur Modellvalidierung verwendet, während eine Zustandstransition mit maximaler Änderungsrate der Zustände erfolgt. Dies sichert ei-

<sup>37</sup> Es zeigt sich bei der Wahl des Prädiktionshorizonts in Unterabschnitt 5.5.3, dass Horizontlängen von  $n_h < 4$  ausreichend sind. Daher kann durch die Betrachtung bei  $n_h = 4$  der Linearisierungsfehler nach oben abgeschätzt werden.

ne möglichst weite Entfernung des Endzustandes im Prädiktionshorizont vom Entwicklungspunkt der Linearisierung. Das Vorgehen zur Modellvalidierung verlangt die Kenntnis der zukünftigen Stellgrößen, die im Regler berechnet werden. Um diese zu erhalten, wird zunächst ein Simulationslauf mit einem Drehmomentregler durchgeführt. Dabei werden die Spannungen und das Drehmoment aufgezeichnet. Im zweiten Schritt wird zur Validierung das Prädiktionsmodell in jedem Zeitschritt  $k$  mit den zuvor aufgezeichneten Spannungswerten der nächsten vier Zeitschritte  $k+1$  bis  $k+4$  als Eingangsvektor  $\mathbf{u}_s(k)$  gespeist. In jedem Zeitschritt  $k$  werden die Ströme für die nächsten vier Schritte berechnet und daraus die Drehmomente der nächsten vier Schritte. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.4 zu sehen, in der es mit dem entstandenen Drehmoment, das im Durchlauf zuvor aufgezeichnet wurde, zusammen dargestellt ist. Die Abbildung ist eine besondere Darstellung des gestapelten Drehmomentvektors. Dort sind

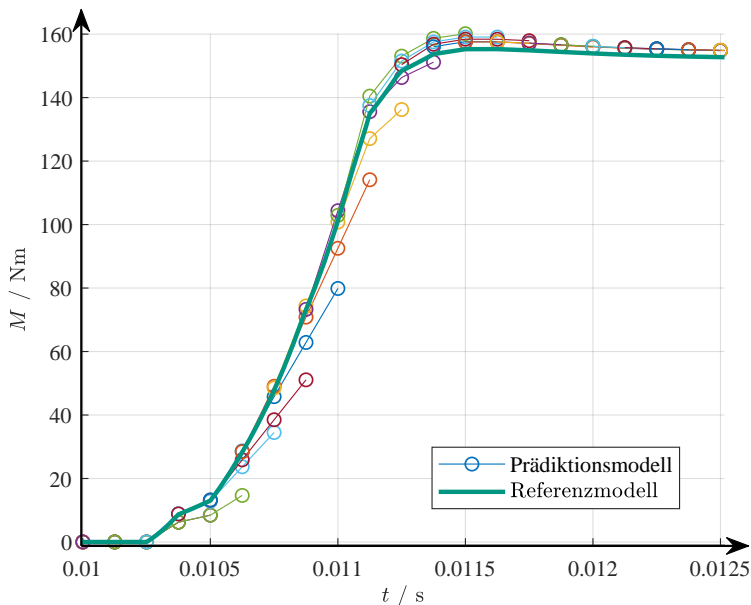


Abbildung 5.4: Validierung des Maschinenmodells mit  $n_d = 2$  im Stillstand

die Einträge des Vektors nicht über dem Zeitschritt  $k$ , in dem dieser Vektor berechnet wurde, aufgetragen, sondern über dem Schritt, für den sie prädiziert wurden: für  $k+1$  bis  $k+4$ . Um die verschiedenen Drehmomente ihrem Berechnungszeitpunkt zuordnen zu können, sind alle Drehmomente eines gestapelten Vektors in einer einheitlichen Farbe dargestellt und durch eine Linie dieser Farbe verbunden. Von jedem Zeitpunkt  $k$  startet eine Linie mit vier Kreisen. Das Bild zeigt, dass lediglich die letzten beiden Zustände einer jeden Prädiktion erkennbar abweichen. Die früheren Prädiktionen treffen sehr gut das Referenzmodell. Dieser Verlauf wurde im Stillstand aufgezeichnet. Dort steht die volle Spannung zur Verfügung, weil keine induzierten Spannungen kompensiert werden müssen, die durch Rotation induziert werden. Somit ent-

steht in der Maschine eine maximale Stromänderung pro Zeitschritt und eine maximale Entfernung vom Entwicklungspunkt der Linearisierung zum Startzustand. Der größte Effekt, der in den Zustandsgleichungen (siehe Gleichung (2.29)) durch die Linearisierung vernachlässigt wird, ist die Sättigung der Induktivitäten. Dieser Effekt kann den Fehler, der durch die Linearisierung entsteht, vergrößern. Die magnetischen Flüsse, die im Prädiktionsmodell berechnet werden, sind nicht korrekt. In den Zustandsgleichungen werden die Flüsse mit der Drehzahl multipliziert, dadurch könnte sich die Linearisierung besonders bei hohen Drehzahlen negativ auswirken. Dies ist durch Abbildung 5.5 widerlegt. Dort ist ein Sprung auf das maximale Drehmoment<sup>38</sup> bei der maximalen Drehzahl der Maschine von  $12\,000\text{ min}^{-1}$  zu sehen. Die Drehzahl

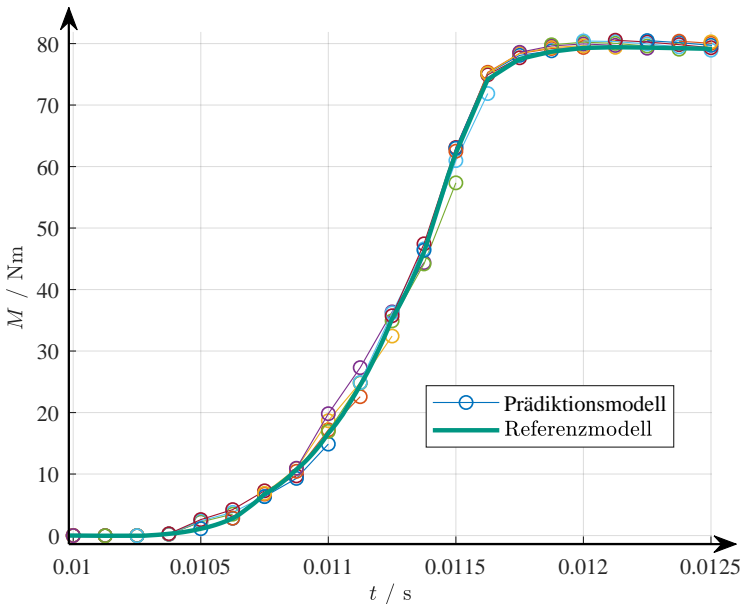


Abbildung 5.5: Validierung des Maschinenmodells mit  $n_d = 2$  bei  $12\,000\text{ min}^{-1}$

hat keinen negativen Einfluss auf die Güte des Prädiktionsmodells. Das Prädiktionsmodell bildet das Drehmoment über einem langen Horizont von vier Schritten gut nach. Lediglich bei schnellen Zustandstransitionen gegen Ende des Horizonts kommt es zu erkennbaren Abweichungen. Diese sind aber als unkritisch zu sehen, da im MPC die Strategie des gleitenden Horizonts zum Einsatz kommt und nur die für den ersten Schritt berechnete Spannung die Strecke erreicht. Dass durch eine weitere Erhöhung der zu  $n_d = 2$  gewählten Diskretisierungsordnung keine weitere Verbesserung der Modellgenauigkeit zu erreichen ist, kann den Bildern im Anhang A.7.2 entnommen werden. Des Weiteren zeigen die Simulationen, dass die Annahme im

<sup>38</sup> Das maximale Drehmoment ist dort aufgrund der Feldschwächung bereits auf  $80\text{ Nm}$  reduziert (vgl. Abbildung 5.7).



Kapitel 2 über die Entfernung zwischen Entwicklungspunkt  $\xi$  und zu präzifizierendem Zustand zulässig ist. Dies kann durch eine weitere Untersuchung bestätigt werden, die hier kurz erklärt wird. In [RS12, HM98] wird eine besondere Form der Linearisierung für Prädiktionsmodelle in MPC beschrieben. Dabei werden mithilfe der berechneten Stellgrößen über dem Prädiktionshorizont der vorigen Taktperiode  $\mathbf{u}_s(k-1)$  die Zustände über dem Prädiktionshorizont  $\mathbf{x}_s(k)$  berechnet. Zur Erstellung des Prädiktionsmodells werden diese präzifizierten Zustände als Entwicklungspunkte gewählt. Das bedeutet, dass nicht ein Zustandsraummodell über dem Prädiktionshorizont gestapelt wird, sondern für jeden Zeitschritt im Prädiktionshorizont ein eigenes Zustandsraummodell mit eigenem Entwicklungspunkt berechnet wird. Dadurch werden die Abstände der Entwicklungspunkte zu den präzifizierten Zuständen kleiner im Vergleich zur Verwendung eines einzigen Entwicklungspunktes. Der Einsatz dieser Methode zeigt keine Verbesserung der Modellgüte, die den Mehraufwand rechtfertigt. Dies führt zu zwei Erkenntnissen: Zum einen ist der Einsatz dieser Methode hier nicht zielführend, zum anderen aber bestätigt es die getroffene Annahme. Da eine Verringerung der Abstände der Entwicklungspunkte zu den präzifizierten Zuständen keine positive Auswirkung hat, ist die Annahme für die Modellierung nach Kapitel 2 für diese Anwendung zulässig.

### 5.3 Übersicht des MPC und Implementierungsaspekte

In Abbildung 5.6 ist eine Detaillierung der Architektur des MPC-Blocks aus dem in Abbildung 5.1 betrachteten Regelkreis in normierten Größen dargestellt. Des Weiteren ist eine zeitvariante Stromgrenze  $i_{Tmax}$  als weitere Detaillierung eingezeichnet, die dem MPC aus einer übergeordneten Struktur vorgegeben werden kann. Anhand dieser Abbildung wird ein

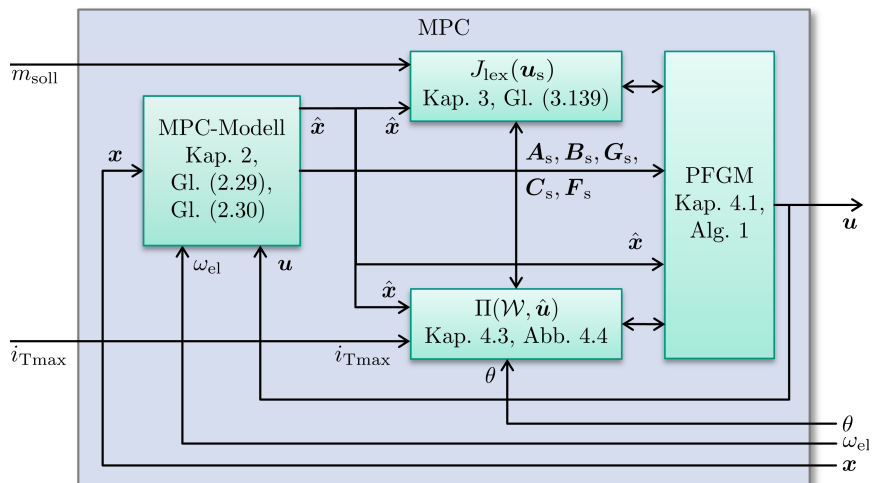


Abbildung 5.6: Übersicht der Architektur des MPC

Überblick über das Zusammenspiel der entworfenen Komponenten gegeben. Es werden zusätzliche Aspekte erläutert, die bei der Implementierung zu berücksichtigen sind. Die Modellerstellung im Funktionsblock *MPC-Modell* wird in jeder Taktperiode des Reglers mit den aktuellen Werte von  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  und  $\omega_{e1}$  durchgeführt. Dort sind die Gleichungen zur Berechnung der Matrizen  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{B}_s$ ,  $\mathbf{G}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  und  $\mathbf{F}_s$  aus Kapitel 2 im normierten Koordinatensystem implementiert. Die gewählten Bezugswerte der Normierung nach Abschnitt 1.3 sind in den Tabellen A.2 und A.3 in Anhang A.6.3 dargestellt. Die Matrizen werden in allen Funktionsblöcken benötigt, die Berechnungen anhand der Zustands- und Ausgangsgleichung durchführen. Die PFGM im gleichnamigen Funktionsblock benötigt sie für die Ermittlung der Parameter  $\mu$ ,  $L$  und  $k_{vk}$  nach Kapitel 4. Die PFGM verwendet ebenfalls Funktionswerte und Gradienten der Gütefunktion  $J_{\text{lex}}(\mathbf{u}_s)$  sowie den in den Abschnitten 4.2 und 4.3 vorgestellten Projektionsoperator.

Die berechnete Stellgröße  $\mathbf{u}$  wird in der Simulation für die auf die Berechnung folgende Taktperiode an das Simulationsmodell der Strecke gegeben. Dadurch entsteht eine Totzeit. Deren Länge hängt vom genauen Messzeitpunkt der Zustände ab. Aufgrund der Simulation kann hier angenommen werden, dass die Messung der Ströme unmittelbar zu Beginn der Berechnungstaktperiode erfolgt. Daraus ergibt sich eine zu kompensierende Totzeit von einer Taktperiode. Dies erfolgt durch folgendes Vorgehen. Die diskreten Systemmatrizen in Gleichung (2.23) werden mit dem aktuellen Messwert  $\mathbf{x}$  berechnet. Mit diesem Systemmodell wird ein Wert  $\hat{\mathbf{x}}$  für den Folgezustand prädictiert. Mit dem Folgezustand  $\hat{\mathbf{x}}$  wird das Prädiktionsmodell, respektive die Matrizen  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{B}_s$ ,  $\mathbf{G}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  und  $\mathbf{F}_s$ , berechnet. Alle Funktionsblöcke der Abbildung 5.6 erhalten den prädictierten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$ , da dieser während der Berechnungsperiode als gültig betrachtet wird.

## 5.4 Szenarien und Kennzahlen zur Bewertung des Regelergebnisses

In diesem Abschnitt werden die Szenarien und die Kennzahlen zur Analyse des Regelergebnisses definiert. Diese werden in den folgenden Abschnitten eingesetzt, um die Parametrierung des MPC vorzunehmen, da dies in Teilen anhand der Beurteilung des Regelergebnisses erfolgt. Ebenso werden sie genutzt, um das Regelergebnis mit dem des PIZR zu vergleichen. Des Weiteren werden sie bei Parameter- und Signalunsicherheiten zur Beurteilung der Sensitivität und Robustheit verwendet.

Die Szenarien legen fest, in welchen Betriebspunkten die Regelgüte betrachtet wird. Ein Betriebspunkt der Maschine setzt sich zusammen aus dem Drehmoment und der Drehzahl. Wie bereits ausführlich in Unterabschnitt 2.1.1 begründet, beschränkt sich die Untersuchung hier auf konstante Drehzahlen. Aufgrund der im Folgenden diskutierten Voraussetzung werden die Drehzahlen innerhalb des Grunddrehzahlbereichs der Maschine gewählt. Um die Stabilität des MPC während der hohen Drehzahlen zu garantieren, sind zusätzliche Zustandsbeschränkungen auf ein *Control Invariant Set* notwendig. Eine kurze Einführung zum *Control Invariant*

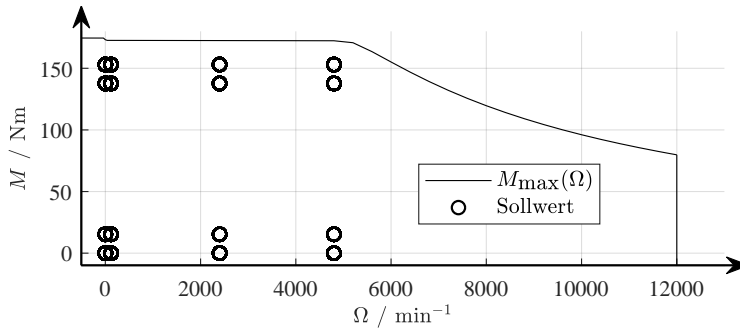
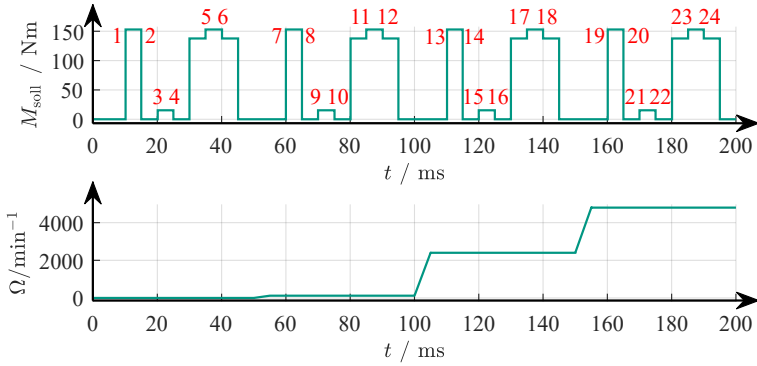


Abbildung 5.7: Darstellung der Szenarien im  $M$ - $\Omega$ -Diagramm

*Set* und dessen Zusammenhang zur Stabilität von PSM findet sich in Anhang A.5. Zusätzliche Beschränkungen zu den hier vorgestellten lassen sich nicht analytisch integrieren und eignen sich nicht für die Optimierung mit der PFGM. Im Betriebsbereich mit Feldschwächung berechnet der MPC für konstante stationäre Betriebspunkte eine Spannung in  $\partial(\mathcal{W})$ . Dies führt aufgrund der Erkenntnisse in Abschnitt 4.4 inhärent zu Fehlern in diesem Grenzbereich. Die Voraussetzung für die stabile Einregelung von Arbeitspunkten mit der vorgestellten Methode ist ein ausreichender Abstand dieses Arbeitspunktes zum Rand des *Control Invariant Set*. Die Drehzahlen werden darum innerhalb des Grunddrehzahlbereichs zwischen vier Werten variiert: 0 %, 1 %, 20 % und 40 % der Maximaldrehzahl  $\Omega_{\max} = 12000 \text{ min}^{-1}$ . Der Betrieb an der Strom-, respektive der Drehmomentgrenze, wird gesondert in Unterabschnitt 5.6.1 untersucht. Die Untersuchung der anderen Szenarien soll bei der Simulation unabhängig von der Drehmomentgrenze sein und hält daher einen Abstand von 10 % vom maximalen Drehmoment:  $M_{U,\max} = 0,9 \cdot 170 \text{ Nm}$ . Es werden sechs Sprünge definiert:

- Von 0 % auf 100 %  $M_{U,\max}$  und zurück
- Von 0 % auf 10 %  $M_{U,\max}$  und zurück
- Von 90 % auf 100 %  $M_{U,\max}$  und zurück

Jedes Soll Drehmoment wird für jeweils 50 ms gehalten, bevor der nächste Sprung ausgeführt wird. Diese sechs Sprünge werden jeweils bei den vier Drehzahlwerten durchgeführt. Die Drehzahl wird während der sechs Drehmomentsprünge konstant auf diesem Wert gehalten. Insgesamt ergeben sich  $6 \cdot 4 = 24$  Sprünge. Die Simulation führt beginnend im Stillstand (0 %  $\Omega_{\max}$ ) jeweils die sechs Drehmomentsprünge durch und erhöht danach die Drehzahl auf den nächsten Wert. Die Transition der Drehzahl findet jeweils bei  $M_{\text{soll}} = 0 \text{ Nm}$  statt und ist nicht Gegenstand der Betrachtung. Die angefahrenen Betriebspunkte sind in Abbildung 5.7 im  $M$ - $\Omega$ -Diagramm zusammen mit dem drehzahlabhängigen maximalen Drehmoment der Maschine dargestellt. Es zeigt sich eine gute Abdeckung des Grunddrehzahlbereichs. Der zeitliche Verlauf von  $M_{\text{soll}}$  ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Sprünge in ihrer oben aufgeführten Reihenfolge werden in den Diagrammen zur Auswertung mit steigender Drehzahl fortlaufend



**Abbildung 5.8:** Darstellung der Szenarien über der Zeit mit rot eingetragener Nummerierung der ausgewerteten Sprünge

Sprungnummer	Drehzahl
1 bis 6	0 % $\Omega_{\text{max}}$
7 bis 12	1 % $\Omega_{\text{max}}$
13 bis 18	20 % $\Omega_{\text{max}}$
19 bis 24	40 % $\Omega_{\text{max}}$

**Tabelle 5.3:** Charakterisierung der Sprünge zur Auswertung der Regelergebnisse und Parametrierung des MPC

durchnummeriert. Diese Nummerierung ist in Abbildung 5.8 in Rot eingetragen. Daraus ergibt sich die Zuordnung zur Drehzahl in Tabelle 5.3. Eine detaillierte Auflistung der 24 Sprünge mit ihren absoluten Werten und den Sollströmen für den PIZR sind im Anhang A.7.3 zu finden.

Die Erreichung des Regelziels soll übersichtlich in den eben beschriebenen Szenarien überprüft werden. Dafür werden drei Kennzahlen eingeführt, die auf die Untersuchung angepasst sind und die Erreichung des Regelziels quantifizieren:

- Mittlere stationäre Abweichung  $\Delta \bar{M}$   
 Dies ist der Abstand des Mittelwertes des vom Regler erzielten Drehmoments zum Soll-drehmoment. Er wird über dem letzten Fünftel ( $10 \mu\text{s}$ ), während dieses Soll-drehmoment anliegt, ausgewertet. Bei einem Beginn des Sprungs bei  $t = 0$  bedeutet dies:

$$\Delta \bar{M} = \frac{1}{10 \mu\text{s}} \underbrace{\int_{40 \mu\text{s}}^{50 \mu\text{s}} M(t) dt}_{\bar{M}} - M_{\text{soll}}. \tag{5.1}$$

- Höhe des Überschwingers  $\Delta h$

Die Höhe des Überschwingers wird auf den mittleren stationären Wert  $\overline{M}$  des Drehmoments bezogen und nicht auf das Solldrehmoment:

$$\Delta h = \max \left( 0, \max_{t \in [0 \mu\text{s}, 50 \mu\text{s}]} (M(t)) - \overline{M} \right). \quad (5.2)$$

Dadurch bewertet diese Kennzahl bei einer größeren stationären Abweichungen die Dynamik und bezieht nicht den Einfluss der stationären Abweichung mit ein. Des Weiteren wird nicht nur der erste Wendepunkt des Drehmomentverlaufs als Überschwinger ausgewertet, sondern das maximale Drehmoment während der Gesamtzeit, in welcher das Solldrehmoment unverändert bleibt.

- 90 %-Anregelzeit  $t_a$

Die Verwendung der Anregelzeit auf 100 % Erreichung des Solldrehmoments ist bei der Untersuchung nicht hilfreich, da bei der Sensitivitäts- und Robustheitsanalyse der Sollwert zum Teil nicht erreicht wird. Um dennoch die Geschwindigkeit des Reglers in diesem Fall untersuchen zu können, wird die 90 %-Anregelzeit gewählt:

$$t_a = \min_t (\{t \mid M(t) > 0,9M_{\text{Soll}}\}). \quad (5.3)$$

Sollten 90 % des Solldrehmoments nicht erreicht werden, wird diese Kenngröße nicht in den Auswertungen aufgeführt.

## 5.5 Parametrierung des MPC und deren Analyse

Grundsätzlich lassen sich alle Parameter des MPC entweder der Gütefunktion oder dem Optimierungsalgorithmus zuordnen. Es wäre wünschenswert diese getrennt zu betrachten. Der Optimierungsalgorithmus sollte so eingestellt werden, dass das Optimierungsergebnis eine vorgegebene Genauigkeit erreicht, die für die Anwendung ausreicht. Im zweiten Schritt kann die Gütefunktion parametrierung werden. Bei MPC-Ansätzen für Echtzeitsysteme verhindert die Begrenzung der Berechnungszeit dieses Vorgehen. Die angestrebte Taktperiode muss durch die Berechnungszeit unterschritten werden. Dies führt dazu, dass angestrebte Genauigkeiten im Ergebnis untergeordnet werden. Solche Ansätze werden als *suboptimal* oder *unvollständige Optimierung* bezeichnet. Der Optimierungsalgorithmus wird unabhängig von der erzielten Genauigkeit des Ergebnisses terminiert, sobald das Ergebnis am Ende der Taktperiode bereitstehen muss. Dadurch ist es nicht möglich die Parametrierung von Optimierung und Gütefunktion getrennt zu betrachten, da sie sich gegenseitig beeinflussen. Die Parameter der Gütefunktion lassen sich weiter unterteilen in die Parameter, die direkt die Modellierung der Maschine betreffen und jene, welche die Gütefunktion betreffen. Die Modellparameter sollten gesondert eingestellt werden, indem die Modellgüte als Bewertungsmaßstab herangezogen

wird, wie es in Abschnitt 5.2 für die Ordnung der Diskretisierung erfolgt ist. Im vorliegenden Fall ist es nicht sinnvoll Parameter des Prädiktionsmodells und des Optimierungsalgorithmus entkoppelt voneinander zu betrachten. Das wird deutlich bei der Betrachtung des Horizonts im Prädiktionsmodell. Dieser beeinflusst unmittelbar die Anzahl der Optimierungsvariablen. Er hat eine Auswirkung auf die Parametrierung des Optimierungsalgorithmus, insbesondere, da die PFGM nach einer maximalen Iterationszahl terminiert wird, um den Berechnungsaufwand beschränken zu können. Wäre dies nicht der Fall und es würden nur Abbruchkriterien verwendet, welche die Genauigkeit des Optimierungsergebnis beurteilen, könnte dieser Zusammenhang aufgebrochen werden. Eine höhere Anzahl an Optimierungsvariablen erfordert aufgrund des höher dimensionalen Optimierungsproblems eine höhere Anzahl an maximalen Iterationsschritten. Daher wird in dieser Arbeit folgendes Vorgehen bei der Parametrierung vorgeschlagen:

1. Festlegung der physikalisch interpretierbaren Parameter der PFGM zur Terminierung der Iteration anhand der Anwendung.
2. Vorläufige Festlegung der maximalen Iterationszahl der PFGM zu  $n_{\max i} = 20$  und des Prädiktionshorizonts zu  $n_h = 2$ .
3. Variation und Wahl des Gewichtungsfaktors der Verluste in der Gütefunktion  $k_v$  unter Betrachtung des Regelergebnisses.
4. Variation und Wahl der Länge des Prädiktionshorizonts  $n_h \in \{1, 2, 3\}$  bei  $n_{\max i} = 20$  unter Betrachtung des Regelergebnisses.
5. Variation und Wahl der maximalen Iterationszahl der PFGM  $n_{\max i}$  unter Betrachtung des Regelergebnisses.

Diese Schritte und ihre Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

### 5.5.1 Parametrierung der Abbruchkriterien der PFGM

Im Algorithmus 1 in Zeile 14 sind drei Abbruchkriterien aufgeführt. Die Auswahl und Bestimmung dieser drei Kriterien erfolgt in diesem Unterabschnitt. Die maximale Iterationszahl  $n_{\max i}$  wird zunächst auf einen Wert von  $n_{\max i} = 30$  festgelegt. Sie kann die Rechenzeit maßgeblich beschränken und hat Auswirkungen auf das Regelergebnis und wird daher unter Betrachtung der entstehenden Regelergebnisse im letzten Schritt angepasst. Des Weiteren könnte ein maximaler Betrag für den Gradienten der Gütefunktion als Abbruchkriterium gewählt werden. Dieser kann nicht unmittelbar physikalisch motiviert bestimmt werden und wird hier daher nicht eingesetzt. Es werden die folgenden beiden Abbruchkriterien betrachtet:

- minimale Schrittweite im Lösungsraum  $\Delta u_{\min}$ ,
- minimale Änderung der Gütefunktion  $\Delta J_{\min}$ .

Die Festlegung der minimalen Änderungsrate im Lösungsraum von einer Iteration der PFGM zur nächsten kann sich zum einen an der Abschätzung der Größe von unmodellierten Effekten orientieren oder an der Genauigkeit der Spannungsmessung. Ersteres ist für den Temperaturdrift der Halbleiter möglich, falls dieser nicht kompensiert wird. Das Datenblatt des Halbleitermoduls [SEM07] gibt als Temperaturdrift für die Kollektor-Emitter-Spannung bei einem Wechsel von 25 auf 125 °C einen Wert von 0,2 V an. Für die Spannungsmessung ergibt sich bei einer Auflösung von 10 bit und  $U_{ZW} = 400$  V ein maximaler Fehler von ca. 0,4 V. Um die mögliche Genauigkeit des Antriebssystems bezüglich der Spannung nicht zu beeinflussen wird daher

$$\Delta u_{\min} = \frac{0,2 \text{ V}}{u_{\max}} \quad (5.4)$$

als minimale Schrittweite im normierten Lösungsraum festgelegt.

Als Nächstes erfolgt die Berechnung des Grenzwertes für den Abbruch aufgrund einer zu kleinen Veränderung im Wert der Gütefunktion von einem Iterationsschritt zum nächsten. Diese mindestens erforderliche Verbesserung der Gütefunktion wird mit  $\Delta J_{\min}$  bezeichnet. Als Zielerreichung wird eine Genauigkeit im Drehmoment von 0,1 Nm definiert. Dieser Wert wird umgerechnet ins normierte Koordinatensystem und quadriert, da in der Gütefunktion die quadratische Abweichung vom Sollmoment bestraft wird. Änderungen kleiner als dieser Wert in diesem Teil der Gütefunktion können folglich das Drehmoment nur um weniger als 0,1 Nm verbessern. Für die Berechnung des minimalen Wertes für den Verlustanteil der Gütefunktion wird wiederum vom Spannungswert 0,2 V ausgegangen. Der daraus resultierende Wert der Gütefunktion soll nach unten abgeschätzt werden. Daraus folgt, dass eine kleinere Änderung im Wert der Gütefunktion sicher eine kleinere Auswirkung hat als eine Spannungsänderung von 0,2 V. Der durch diese Spannung im Stillstand verursachte ohmsche Verlust im Statorwiderstand der Maschine wird normiert und mit den Verlustgewichtungsfaktoren  $k_v$  und  $k_{vk}$  multipliziert. Somit ergibt sich die untere Abschätzung für die mindestens erforderliche Verbesserung des Gütefunktionswerts

$$\Delta J_{\min} = \min \left( \left( \frac{0,1 \text{ Nm}}{m_{\max}} \right)^2, k_v k_{vk} \frac{(0,2 \text{ V})^2}{r_S u_{\max} i_{\max}} \right). \quad (5.5)$$

Da der Verlustgewichtungsfaktor der Vorkonditionierung  $k_{vk}$  in jedem Taktzyklus erneut berechnet wird, muss  $\Delta J_{\min}$  ebenfalls zur Laufzeit bestimmt werden. Die Auswertung der ausgeführten Abbruchkriterien und deren Analyse erfolgt am Ende dieses Abschnitts, nachdem die restlichen Parameter des MPC bestimmt sind.

### 5.5.2 Wahl des Gewichtungsfaktors in der Gütefunktion

Die Erreichung des primären Regelziels, das Einstellen des Sollmoments, ist weitestgehend unabhängig vom Verlustgewichtungsfaktor  $k_v$ . Dies ist der große Vorteil, der hier neu

vorgestellten Methode. Die stationäre Abweichung zeigt kaum Abhängigkeit vom Verlustgewichtungsfaktor. Dies ist für die im Abschnitt 5.4 vorgestellten Sprünge in Abbildung 5.9 aufgetragen. Hier ist der zusätzliche Verlustgewichtungsfaktor auf die drei Werte 0,5, 0,05 und 0,005

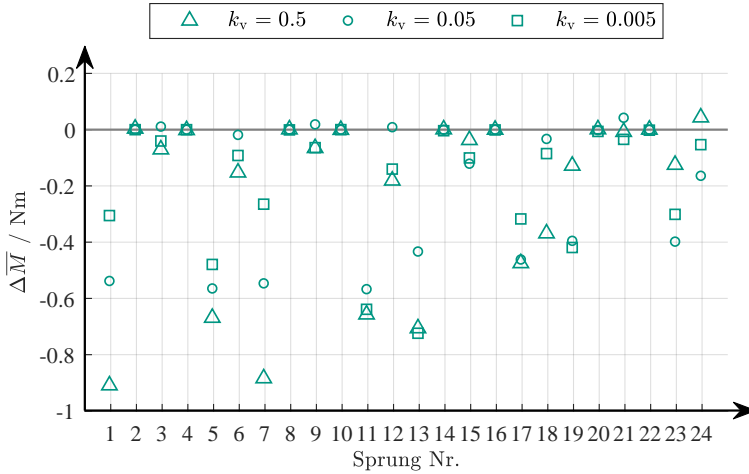
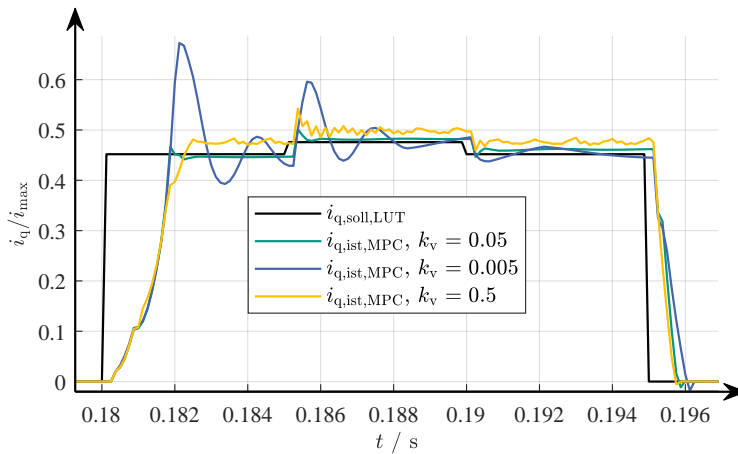


Abbildung 5.9: Stationäre Abweichung für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren

0,005 eingestellt. Selbst durch eine Erhöhung des Verlustgewichtungsfaktors um den Faktor 100 schwankte die mittlere stationäre Abweichung nur um 0,6 Nm. Für die ermittelten 90 %-Anregelzeiten und Überschwinger entsteht ebenfalls nur eine sehr schwache Abhängigkeit vom Verlustgewichtungsfaktor. Die detaillierten Werte können den Abbildungen A.5 und A.6 im Anhang A.7.4 entnommen werden. Ein anderes Bild ergibt die Betrachtung der Stromverläufe. Sie hängen sehr stark von der Wahl des Gewichtungsfaktors ab. Während sich das Drehmoment bereits in einem konstanten Zustand befindet, sind die Ströme noch nicht konstant. Sie pendeln sich in der Stromebene entlang der Hyperbel mit konstantem Drehmoment auf die verlustoptimalen Werte ein. Wie schnell dieser Vorgang abläuft, bestimmt der Verlustgewichtungsfaktor. Der Zusammenhang ist in Abbildung 5.10 exemplarisch für den q-Strom und die Sprünge Nummer 23 und 24, das bedeutet bei der Drehzahl  $\Omega = 0,4$  pu, gezeigt. In der Abbildung sind zusätzlich die Sollwerte für den q-Strom aus der *Look-Up*-Tabelle des PIZR eingezeichnet. Diese wurden nicht im MPC verwendet und dienen nur als Anhaltspunkt für die stationären Zustände mit den kleinsten ohmschen Verlusten. Somit zeigt sich deutlich, dass unter den gezeigten Verlustgewichtungsfaktoren der Wert  $k_v = 0,05$  das beste Ergebnis in den Stromverläufen erzielt. Die Stromregelung ist hier zwar nicht das Ziel, aber das Einschwingverhalten der Ströme ist gleichzusetzen mit der Konvergenzgeschwindigkeit des MPC zum stationär verlustoptimalen Betriebspunkt. Daher sollen die Ströme ebenfalls möglichst schnell gegen die Sollwerte des konventionellen Reglers konvergieren. Aus diesem Grund wird der Wert  $k_v = 0,05$  gewählt.





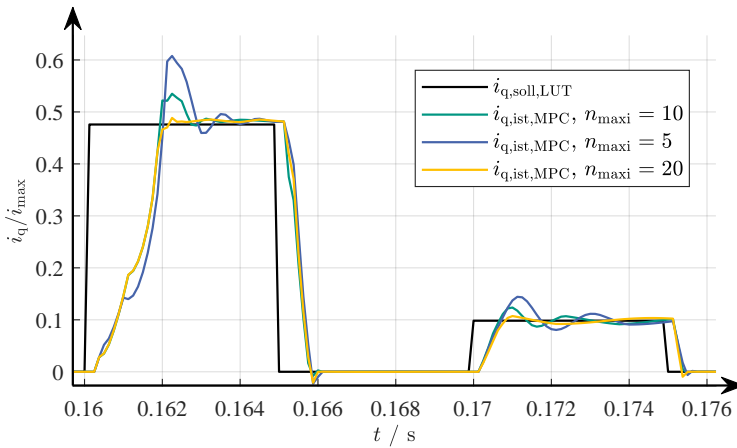
**Abbildung 5.10:** Verlauf des q-Stroms für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren für die Sprünge Nummer 23 und 24

### 5.5.3 Wahl der Länge des Prädiktionshorizonts

Die Wahl des Prädiktionshorizonts wird auf die Werte eins, zwei und drei beschränkt. Ein höherer Wert ist aufgrund der quadratisch mit der Horizontlänge ansteigenden Berechnungszeit (siehe Unterabschnitt 5.5.7) nicht sinnvoll. Die Entscheidung zwischen diesen Werten ist nicht eindeutig. Die Auswertungen im Detail sind im Anhang A.7.5 zu finden. Hier werden diese zusammengefasst und es wird auf einzelne Details eingegangen. Die Auswertung des Regelergebnisses des Drehmoments im Sinne der festgelegten Kennzahlen zeigt keine eindeutige Präferenz. Zum einen schwanken die Ergebnisse nicht wesentlich, dies trifft vor allem auf die 90 %-Anregelzeit zu, zum anderen weisen sie keinen eindeutigen Trend auf. So sind beispielsweise bei den kleinen negativen Sprüngen bei niedrigen Drehmomenten und Drehzahlen Prädiktionshorizonte von drei schlechter für die Höhe des Überschingers und der stationären Abweichung. Bei den positiven Sprüngen dieser Art ist beim Überschwingen keine wesentliche Abhängigkeit vom Prädiktionshorizont zu sehen. Die stationäre Abweichung ist bei diesen Sprüngen deutlich geringer. In Anbetracht der Tatsache, dass die Rechenzeit mit der Horizontlänge quadratisch ansteigt, wird hier ein Prädiktionshorizont von eins gewählt. Ein Vergleich der Berechnungszeiten erfolgt nach Abschluss der Parametrierung in Unterabschnitt 5.5.7. Die folgende Analyse soll zeigen, dass die vorgestellte Methode mit dem minimal möglichen Prädiktionshorizont bereits Verbesserungspotentiale eröffnet.

### 5.5.4 Wahl der maximalen Iterationszahl der PFGM

Die Parameter des MPC sind alle eingestellt und die abschließende Wahl der maximalen Iterationszahl der PFGM kann getroffen werden. Bisher war diese auf  $n_{\max i} = 20$  eingestellt. Aufgrund des niedrigeren Prädiktionshorizonts könnte bei Betrachtung des Regelergebnisses des Drehmoments dieser Wert weiter verringert werden. Die Betrachtung der definierten Kennzahlen für den Drehmomentverlauf zeigt kein eindeutiges Ergebnis. Die Auswertungen im Detail sind im Anhang A.7.5 zu finden. Es ist notwendig den Verlauf der Ströme als zusätzliches Kriterium zu betrachten. Diese sind in Abbildung 5.11 exemplarisch für den q-Strom und die Sprünge Nummer 18 bis 22, das bedeutet bei der Drehzahl  $\Omega = 0,4$  pu, gezeigt. Der



**Abbildung 5.11:** Verlauf des q-Stroms für verschiedene maximale Iterationszahlen  $n_{\max i}$  der PFGM für die Sprünge Nummer 18 bis 22

positive Einfluss der Erhöhung der maximalen Iterationszahl ist im Verlauf der Ströme im Gegensatz zum Drehmoment sehr gut zu erkennen. Die Höhe des Überschwingers sowie die Einschwingzeit verkürzen sich durch die Erhöhung auf  $n_{\max i} = 20$ . Die Wahl für die durchgeführten Untersuchungen dieser Arbeit fällt daher auf  $n_{\max i} = 20$  und bleibt im Vergleich zur bisherigen Betrachtung unverändert.

### 5.5.5 Zusammenfassung der Parametrierung

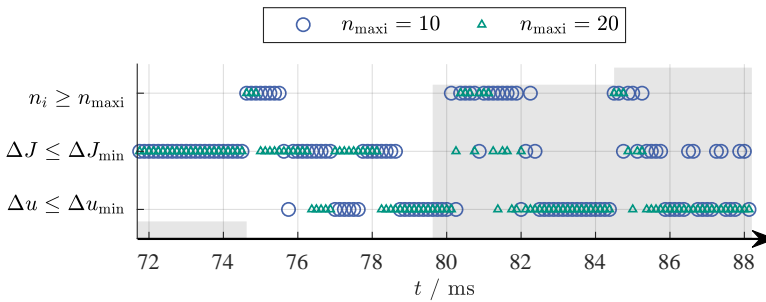
Zunächst wird hier das Vorgehen zur Parametrierung zusammengefasst und eingeordnet. Die Abbruchkriterien minimale Schrittweite im Lösungsraum und in der Gütefunktion der PFGM sind physikalisch motiviert und bestimmt. Der Prädiktionshorizont ist festgelegt auf  $n_h = 2$  und die maximale Iterationszahl auf  $n_{\max i} = 20$ . Mit dieser Einstellung ist der Verlustgewichtungsfaktor  $k_v = 0,05$  ermittelt. Dieser Parameter hat sehr wenig Einfluss auf die Regelgüte des Drehmoments. Er ist so eingestellt, dass sich der stationäre Zustand in den Strömen

schnellstmöglich einstellt. Im Anschluss ist der Prädiktionshorizont auf  $n_h = 1$  reduziert, da weder Drehmoment- noch Stromverläufe eine Rechtfertigung für höhere Werte liefern. Abschließend ist die Wahl der Iterationszahl mit  $n_{\max i} = 20$  überprüft und unter Betrachtung der Stromverläufe als minimal ermittelt. Obwohl die hier eingeführte Gütefunktion aufgrund der direkten Drehmomentregelung sehr unterschiedlich ist, kommt die bereits erläuterte Arbeit [PBD13] (siehe Unterabschnitt 1.4.2) über einen MPC mit PFGM zur Stromregelung zu ähnlichen Ergebnissen. Dort ist für die experimentelle Erprobung eine maximale Iterationszahl von fünf und ebenfalls eine Länge des Prädiktionshorizonts von eins gewählt.

Abschließend erfolgt eine Einordnung der Ergebnisse. Es ist eine Strategie für die Einstellung und Parametrierung für echtzeitfähige MPC mit PFGM am Beispiel einer PSM dargelegt, insbesondere mit dem Augenmerk auf die neu vorgestellte Methode der lexikographischen Optimierung von Verlusten und der Drehmomentabweichung in der Gütefunktion. Die Parametrierung berücksichtigt die besonderen Zusammenhänge, die durch die Kombination aus der PFGM, der *unvollständigen Optimierung* und der neu vorgestellten Methode entstehen. Diese Zusammenhänge sind im Wesentlichen nur für echtzeitfähige Anwendungen wichtig. Eine Motivation für die Arbeit und den MPC-Ansatz ist der verringerte Parametrierungsaufwand im Vergleich zu den klassischen Regelansätzen. Dort müssen die Parameter durch Erprobung und/oder Simulation für jede Maschine neu eingestellt werden. Hier erfolgte eine ähnliche Vorgehensweise zur Parametrierung des Optimierungsalgorithmus und des Prädiktionsmodells. Der entscheidende Unterschied ist, dass hierfür keine Maschinenparameter verwendet werden. Bei der Einstellung eines klassischen PI-Reglers haben die Reglerparameter immer eine Abhängigkeit von den Parametern der Maschine. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich der Parametrierungsaufwand beim MPC auf den Optimierungsalgorithmus konzentriert, dieser aber unabhängig von den konkreten Parametern der Maschine ist. Die Maschinenparameter werden nur für die Parametrierung des Prädiktionsmodells benötigt. Dieser Vorgang ist unabhängig vom Reglerentwurf und kann isoliert als reine Modellierungsaufgabe durchgeführt werden.

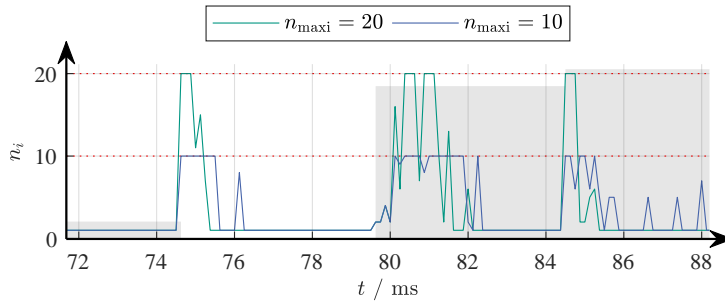
### 5.5.6 Analyse der Abbruchkriterien der Parametrierung der PFGM

In diesem Abschnitt wird das Eintreten der Abbruchkriterien des Optimierungsalgorithmus analysiert. Die Fragestellung ist, wann welches Abbruchkriterium zum Tragen kommt. Das kann die Plausibilität der getroffenen Werte für die Abbruchkriterien zeigen, falls sie alle eintreten und liefert ebenfalls Erkenntnisse für die im Anschluss analysierten Berechnungszeiten. Für die Analyse sind die in Abschnitt 5.4 vorgestellten Szenarien herangezogen. Der Verlauf über dem gesamten Szenario ist im Anhang A.7.6 in Abbildungen A.13 und A.14 dargestellt. Repräsentativ erfolgt hier die Auswertung für die Sprünge Nummer zehn und elf und den dazwischen liegenden großen Sprung. Dies entspricht dem Zeitraum von 72 bis 88 ms. In Abbildung 5.12 ist das erreichte Abbruchkriterium über der Zeit aufgetragen.  $n_i$  ist die erreichte Iterationsanzahl vor Abbruch des Optimierungsalgorithmus. Zur besseren Einordnung ist im



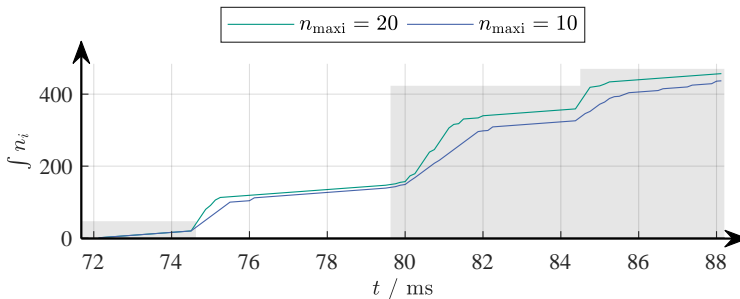
**Abbildung 5.12:** Erreichtes Abbruchkriterium der PFGM während der Sprünge Nummer zehn und elf des Szenarios aus Abschnitt 5.4

Hintergrund als graue Schattierung der Verlauf des Solldrehmoments während dieser Zeit angedeutet. In der Abbildung werden die Ergebnisse für zwei unterschiedliche Parametrisierungen dargestellt. Zum einen ein MPC mit einer maximalen Iterationszahl der PFGM von  $n_{\text{maxi}} = 10$  und  $n_{\text{maxi}} = 20$ . Für beide Konfigurationen ist die Ausnutzung der maximalen Iterationsanzahl während der dynamischen Transition nach einem Sprung ersichtlich. Er erstreckt sich bei der kleineren Iterationszahl der PFGM von  $n_{\text{maxi}} = 10$  über etwa den doppelten Zeitraum. Auffällig ist beim großen Sprung im Vergleich zum kleinen, dass beim großen die maximale Iterationsanzahl mit einer Verzögerung von einigen Taktzyklen erreicht wird. Dieser Effekt wird später in diesem Unterabschnitt betrachtet. Während der eingeschwungenen Phasen konstanten Drehmoments wird die in Unterabschnitt 5.5.1 definierte Genauigkeit erreicht. Das erreichte Abbruchkriterium verteilt sich in dieser Zeit auf die gewünschten Genauigkeiten im Lösungsraum ( $\Delta J \leq \Delta J_{\text{min}}$ ) und im Zielraum ( $\Delta u \leq \Delta u_{\text{min}}$ ). Dies belegt die ausgewogene Wahl der Kriterien. Es ist zu beobachten, dass für eingeschwungene Zustände bei kleinen Drehmomenten vornehmlich zuerst die definierte Genauigkeit im Lösungsraum erreicht wird, während es bei hohen Drehmomenten die Optimierung aufgrund des Kriteriums im Zielraum ist. Zur Einsparung unnötiger Iterationen des Optimierungsalgorithmus haben beide Kriterien ihre Berechtigung, falls sie physikalisch motiviert, wie in Unterabschnitt 5.5.1, eingeführt werden können. In Abbildung 5.13 ist die erreichte Iterationsanzahl  $n_i$  vor Abbruch aufgrund der in Abbildung 5.12 dargestellten Kriterien zu sehen. Die maximale Iterationsanzahl für beide Konfigurationen ist als rote Linie dargestellt. Diese wird erreicht, falls in Abbildung 5.12  $n_i > n_{\text{maxi}}$  markiert ist. Eine Gemeinsamkeit der beiden Konfigurationen zeigt die bereits angesprochene verzögerte Ausnutzung der maximalen Iterationsanzahl nach dem großen Sprung. Hier fällt während des dynamischen Vorgangs die Iterationszahl zurück auf  $n_i = 2$ . Dies kann damit begründet werden, dass eine Spannung auf der Spannungsbegrenzung gewählt wurde und bei der vorliegenden geringen Drehzahl sich die Begrenzung im dq-Koordinatensystem langsam dreht. Dieser Effekt kann folglich ausschließlich bei Vorgängen auftreten, bei denen die Abweichung vom Optimum und somit der Gradient selbst so groß ist, dass die Optimierungsvariable in nur einem Iterationsschritt der PFGM aus der



**Abbildung 5.13:** Anzahl an Iterationen in der PFGM bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums während der Sprünge Nummer zehn und elf des Szenarios aus Abschnitt 5.4

Begrenzung herausgeschoben wird. Das gleiche gilt, falls die Maschine in der Nähe der Spannungsbeschränkung betrieben wird. Während der eingeschwungenen Phase zeigt sich ein Betrieb bei der minimalen Iterationsanzahl von  $n_i = 1$ , was eine notwendige Bedingung für einen eingeschwungenen Zustand ist. Dies gilt nicht für die Konfiguration mit  $n_{\max i} = 10$ . Dort sind aufgrund der längeren Einschwingphase der Ströme (vgl. Abbildung 5.11) mehrere Iterationen notwendig, dies ist für  $n_{\max i} = 20$  nicht der Fall. Des Weiteren wird nach einem Sprung für  $n_{\max i} = 10$  länger die maximale Iterationsanzahl ausgeschöpft, um die definierte Genauigkeit zu erreichen. Für den Gesamtrechenaufwand ist es daher naheliegend zusätzlich die akkumulierte Anzahl der stattgefundenen PFGM Iterationen zu betrachten. Die Darstellung



**Abbildung 5.14:** Im betrachteten Zeitraum akkumulierte Iterationen der PFGM

in Abbildung 5.14 zeigt die akkumulierten ausgeführten Iterationen der PFGM. Die Differenz am Ende des Zeitraums fällt mit 20 Iterationen zugunsten der Parametrierung  $n_{\max i} = 10$  gering aus. Dies ist plausibel, da es aufgrund des *Warm Starting* im stationären Fall für die Optimierung keine Rolle spielt, ob diese sich über mehrere Taktzyklen verteilt oder nicht. Sie erreicht daher im stationären Fall die gleiche Genauigkeit, ermöglicht aber durch die geringere Rechenzeit höhere Taktraten. Dabei wird jedoch die dynamische Regelgüte, insbesondere die Konvergenz der Ströme, verschlechtert, wie es bereits in Unterabschnitt 5.5.4 diskutiert ist.

### 5.5.7 Analyse der Berechnungszeiten der Parametrierung

Die Auswirkungen der Parametrierung auf die Rechenzeit sind ein wichtiges Kriterium bei einer Implementierung für eine experimentelle Erprobung. Daher stellt sich in diesem Fall bei der Parametrierung die Frage, wie sich die Parameter auf die Berechnungszeit auswirken. Bei dieser Fragestellung hängt die Antwort sehr stark von der gewählten Hardware ab. In jedem Fall wäre für eine Umsetzung ein Zusammenspiel aus digitalem Signalprozessor und FPGA (Field Programmable Gate Array) nötig. Dadurch können wesentlich kürzere Berechnungszeiten erzielt werden. Die explizite Berechnung des Prädiktionsmodells und insbesondere die Linearisierung stellen Berechnungen expliziter Gleichungen dar, die sich sehr gut für die parallelisierte Berechnung in einem FPGA anbieten. Funktionen des Optimierungsalgorithmus, wie die explizite analytische Berechnung von Gradienten oder die Projektionen, lassen sich dort ebenfalls parallelisiert umsetzen. Begrenzender Faktor für die Auslagerung von Funktionen ist die Anzahl der Logikbausteine des FPGA, welche den implementierbaren Funktionsumfang beschränken. Die Aufteilung und Anpassung der verwendeten Algorithmen auf eine Hardwarearchitektur ist eine Fragestellung, der hier nicht nachgegangen werden soll. Stattdessen erfolgt eine Betrachtung anhand der Programmlaufzeit der entscheidenden Programmabschnitte auf dem Simulationsrechner (technische Daten siehe Anhang A.6.2). Die Betrachtung der Berechnungszeiten ist für konkrete Implementierungen nicht aussagekräftig. Der Vergleich der Berechnungszeiten der Schritte bei sequentieller unoptimierter Code-Abarbeitung liefert aber Hinweise auf den jeweiligen Ressourcenbedarf im Vergleich der Programmbestandteile untereinander. Da das simulierte System eine Taktperiode von  $125\ \mu\text{s}$  hat, muss auf einer Hardware diese Berechnungszeit zwingend eingehalten werden, ansonsten muss die Taktrate reduziert werden. Die hier erfolgte Betrachtung legt den Schwerpunkt auf die Parametrierung und deren Auswirkung. Die entscheidenden Programmabschnitte sind wie folgt den Berechnungszeiten  $T_{bx}$ ,  $x \in \{o, l, d, p, \}$  zugeordnet:

- Optimierung:  $T_{bo}$
- Modellerstellung:
  - Linearisierung:  $T_{bl}$
  - Diskretisierung:  $T_{bd}$
  - Prädiktionsmodell:  $T_{bp}$

Dabei besteht die Modellerstellung aus der jeweils zweimaligen Ausführung der Linearisierung und der Diskretisierung zur Prädiktion des Startzustandes für den Optimierungsalgorithmus (siehe Abschnitt 5.3) sowie der Erstellung der gestapelten Gleichung für das Prädiktionsmodell.

Zu Beginn wird nochmals der im vorigen Abschnitt betrachtete Zeitverlauf mit den Sprüngen Nummer zehn und elf betrachtet. Abbildung 5.15 zeigt die Berechnungszeit für den Optimierungsalgorithmus  $T_{bo}$ . Hier ist eindeutig die Korrelation mit der Anzahl der Iterationen  $n_i$  in

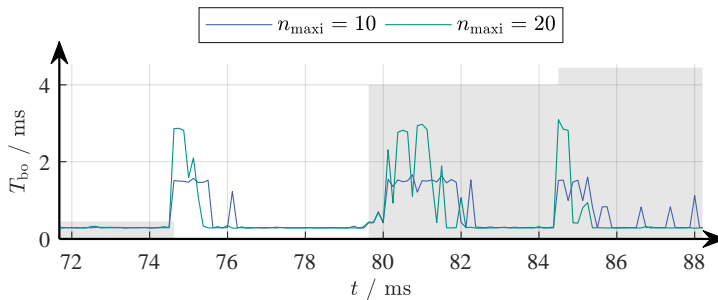
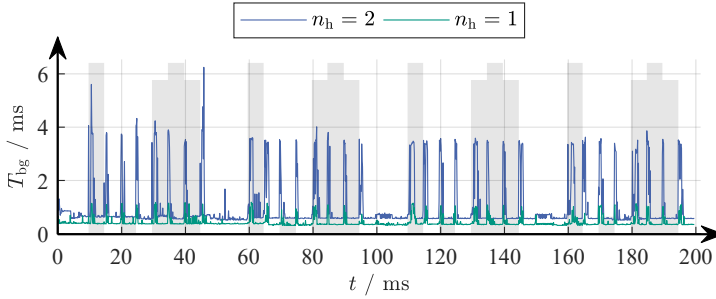


Abbildung 5.15: Berechnungszeit der Optimierung

Abbildung 5.13 zu erkennen. Daher kann geschlussfolgert werden, dass sich die maximale Berechnungszeit des Optimierungsalgorithmus in guter Näherung proportional zur maximalen Iterationsanzahl  $n_{\max i}$  verhält. Daraus lässt sich eine wichtige Erkenntnis ableiten, die sich mit der Erkenntnis über die akkumulierte Iterationszahl der PFGM aus dem vorigen Abschnitt deckt. Für  $n_{\max i} = 20$  ist die Zeit der maximalen Auslastung kürzer und die Gesamtbelastung im Sinne der akkumulierten Berechnungszeit für das betrachtete Szenario kaum höher als im Vergleich zu  $n_{\max i} = 10$ . Es hängt von der Anwendung ab, ob sie über die notwendige Zeitdauer stationäre Sollwerte fordert. Dies bekräftigt die Aussage, dass die Parametrierung des Optimierungsalgorithmus für experimentelle Erprobungen sowohl von der Hardware als auch von der Anwendung abhängig ist. Auf die anderen Berechnungszeiten hat die maximale Iterationsanzahl keine Auswirkung. Sie beeinflusst nur die Dauer der Optimierung.

Die weitere Betrachtung der Berechnungszeiten erfolgt über den gesamten Zeitraum der Szenarien aus Abschnitt 5.4. Begründet mit höheren Berechnungszeiten und indifferenten Regelergebnissen ist im Unterabschnitt 5.5.7 der Prädiktionshorizont auf  $n_h = 1$  reduziert. Zur Quantifizierung erfolgt hier zusätzlich der Vergleich zwischen  $n_h = 1$  und  $n_h = 2$ . Dieser Parameter hat einen Einfluss auf die Berechnungsdauer der Erstellung des Prädiktionsmodells sowie auf die Optimierung. Die Quantifizierung gestaltet sich schwierig, da für echtzeitfähige Implementierungen die maximale Rechenzeit ausschlaggebend ist. Die Ausführungszeit des Programmcodes auf dem Simulationsrechner ist aber von Hintergrundprozessen abhängig. Das kann die maximale Zeit stark beeinflussen. Somit sind die Ergebnisse am besten zu erfassen, indem die Zeitverläufe betrachtet und einzelne Ausreißer nicht beachtet werden. Die weiteren Verläufe der Berechnungszeiten sind in der Abbildung A.15 im Anhang A.7.7 zu finden. In Abbildung 5.16 ist die gesamte Berechnungszeit der beschriebenen Programmabschnitte  $T_{bg} = T_{bo} + 2(T_{bl} + T_{bd}) + T_{bp}$  dargestellt. Die Ausreißer können nicht algorithmisch erklärt werden, da es die Lösung einer deterministischen Berechnung ist. Folglich sind sie auf die Messmethode der Programmlaufzeit zurückzuführen. Deutlich erkennbar sind die Ausschläge zu den Zeiten der Sprünge sowie eine höhere mittlere und maximale Berechnungszeit. Ebenso sind die deutlich längeren maximalen Berechnungszeiten und ebenfalls die längere minimal notwendige Rechendauer während der eingeschwungenen Phasen für den höheren



**Abbildung 5.16:** Gesamte Berechnungszeit ( $T_{bg} = T_{bo} + 2(T_{bl} + T_{bd}) + T_{bp}$ )

Horizont sichtbar. Zur quantitativen Erfassung werden die Ergebnisse hier anhand des jeweiligen Mittelwertes  $\bar{T}_{bx}$  und Maximalwertes  $\hat{T}_{bx}$  charakterisiert und in Tabelle 5.4 dargestellt. Berechnungszeiten für die Optimierung  $T_{bo}$  zeigen in der mittleren Berechnungsdauer etwa

	$n_h = 1$		$n_h = 2$	
	Mittelwert $\bar{T}_{bx}$	Maximalwert $\hat{T}_{bx}$	Mittelwert $\bar{T}_{bx}$	Maximalwert $\hat{T}_{bx}$
$T_{bo}$	143 $\mu$ s	874 $\mu$ s	739 $\mu$ s	5,71 ms
$T_{bp}$	1,68 $\mu$ s	16,9 $\mu$ s	2,73 $\mu$ s	463 $\mu$ s
$T_{bl}$	138 $\mu$ s	281 $\mu$ s	136 $\mu$ s	416 $\mu$ s
$T_{bd}$	1,87 $\mu$ s	15,8 $\mu$ s	1,88 $\mu$ s	19,0 $\mu$ s
$T_{bg}$	424 $\mu$ s	1,19 ms	1,02 ms	6,25 ms

**Tabelle 5.4:** Berechnungszeiten für die Optimierung  $T_{bo}$ , die Erstellung des Prädiktionsmodells  $T_{bp}$ , die Linearisierung  $T_{bl}$ , die Diskretisierung  $T_{bd}$  und Gesamtdauer  $T_{bg} = T_{bo} + 2(T_{bl} + T_{bd}) + T_{bp}$

den vierfachen Wert. Dies deckt sich mit dem Fluch der Dimensionalität: Da hier durch den Wechsel von  $n_h = 1$  zu  $n_h = 2$  eine Verdopplung der Dimension des Lösungsraums vorliegt, steigt die Berechnungszeit um den Faktor  $2^2 = 4$ . Die Erstellung des Prädiktionsmodells dauert für den größeren Prädiktionshorizont im Mittelwert nur 70 % länger. Die Linearisierung und Diskretisierung werden am Zustandsraummodell durchgeführt und weisen daher keine Abhängigkeit vom Prädiktionshorizont auf.

Abschließend werden die Ergebnisse der Analyse der Abbruchkriterien und Berechnungszeiten zusammengefasst und eingeordnet. Die Wahl der Abbruchkriterien im Lösungsraum ( $\Delta J < \Delta J_{\min}$ ) und im Zielraum ( $\Delta u < \Delta u_{\min}$ ) in Unterabschnitt 5.5.1 sind durch die Auswertung der eingetretenen Kriterien als plausibel bewertet. Sie tragen beide zur Einsparung unnötiger Iterationen des Optimierungsalgorithmus bei und sind physikalisch motiviert festgelegt. Die Wahl einer maximalen Iterationsanzahl bestimmt proportional die maximale Berechnungsdauer des Optimierungsvorgangs, da diese immer ausgeschöpft wird. Eine kleinere maximale Iterationsanzahl verlängert den Optimierungsvorgang und bringt kaum eine Verringerung des Gesamtrechenaufwandes. Dies spielt bei einer echtzeitfähigen Implementierung



oft eine untergeordnete Rolle, da es dort nur auf die maximale Berechnungszeit ankommt, um eine gewünschte Taktrate zu erzielen. Das verwendete *Warm Starting* stellt dabei die gleiche stationäre Regelgüte sicher. Bei konservativer Rechnung für den Prädiktionshorizont von  $n_h = 1$  fehlt der Faktor zehn zur Echtzeitfähigkeit mit 8 kHz Taktung der Leistungsendstufe und für  $n_h = 2$  der Faktor 50 bei Ausführung der Implementierung auf dem Simulationsrechner. Zusammen mit den folgenden Erkenntnissen aus dem Einsatz der PFGM in MPC in anderen Veröffentlichungen kann die Einschätzung abgegeben werden, dass eine Echtzeitfähigkeit und Erprobung denkbar ist. Beim Einsatz zur Regelung einer PSM mit Spannungsbegrenzung auf den Inkreis ermöglicht die PFGM in [PBD13] mit  $n_h = 1$  und  $n_{\max i} = 5$  eine Schaltfrequenz von 10 kHz. In der Arbeit [RMM10], welche einen MPC zur Regelung des Stroms einer Sechspuls-Brücke als AC/DC-Wechselrichter mit Filter vorstellt, erzielt die PFGM mit exakter Spannungsbegrenzung sowie  $n_h = 5$  und  $n_{\max i} = 16$  Berechnungszeiten unter 51  $\mu\text{s}$ .

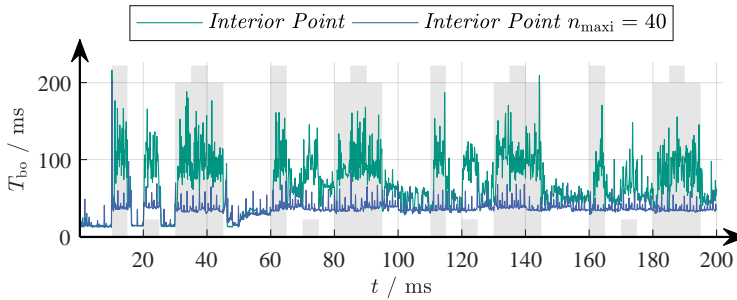
### Vergleich der Berechnungszeiten zwischen der Optimierung durch Transformation und sequentieller Lösung des LOPs

Zur Einordnung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts wird hier eine Implementierung des sequentiellen Lösungsalgorithmus eines LOPs nach Korollar 3.1 aufgezeigt. Der Vergleich erfolgt für eine Horizontlänge von  $n_h = 1$ . Unter Berücksichtigung der eingeführten Gütefunktionen  $J_{1u}(k)$  in Gleichung (3.126) für die Drehmomenterreicherung und  $J_{2u}(k)$  in Gleichung (3.127) für die ohmschen Verluste muss dafür folgendes gelöst werden:

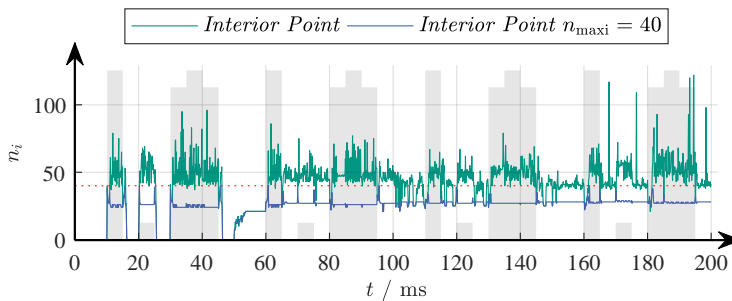
$$1.) \quad J_{1u}^*(k) = \min_{\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}} J_{1u}(k) \quad (5.6)$$

$$2.) \quad \mathbf{u}^{*\text{lex}}(k) = \text{Arg min}_{\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}} J_{2u}(k) \text{ unter der NB } J_{1u}(k) \leq J_{1u}^*(k). \quad (5.7)$$

Zur Lösung wird der *Interior Point* Algorithmus des in *MATLAB* integrierten Optimierungsbefehls *fmincon* verwendet. Die Lösung der beiden Optimierungsprobleme erfolgt zunächst ohne Vorgabe einer maximalen Iterationsanzahl. Obwohl wie oben in Gleichung (5.6) ersichtlich die Zustandsbegrenzungen vernachlässigt werden, weist die Berechnungszeit Spitzen von über 200 ms auf. Die mittlere Berechnungszeit von 67,8 ms entspricht etwa dem 470-fachen der hier vorgestellten Methode für  $n_h = 1$ . Um die Vergleichbarkeit zu verbessern ist in Abbildung 5.17 zusätzlich die Berechnungszeit bei einer Begrenzung auf insgesamt 40 Iterationen gezeigt. Jedem der beiden Optimierungsschritte aus Gleichung (5.6) ist der gleiche maximale Wert für die Iterationsanzahl von  $n_{\max i} = 20$  vorgegeben, der somit identisch ist zur Wahl von  $n_{\max i}$  für die PFGM. Wie Abbildung 5.18 zeigt, wird dadurch die Iterationsanzahl im Vergleich zum Fall ohne Obergrenze nochmals deutlich reduziert. Es werden jedoch bereits schlechtere Regelergebnisse wie ohne maximale Iterationszahl mit dem *Interior Point* Algorithmus oder mit der vorgestellten lexikographischen Optimierung durch Transformation mit PFGM erzielt. Dennoch sind die Berechnungszeiten im Mittel mit 35,2 ms noch etwa um den Faktor 250 größer als mit PFGM. Diese Ergebnisse verdeutlichen die große Einsparung an Rechenzeit, die



**Abbildung 5.17:** Berechnungszeit der sequentiellen Optimierung des LOPs mit einem *Interior Point* Algorithmus

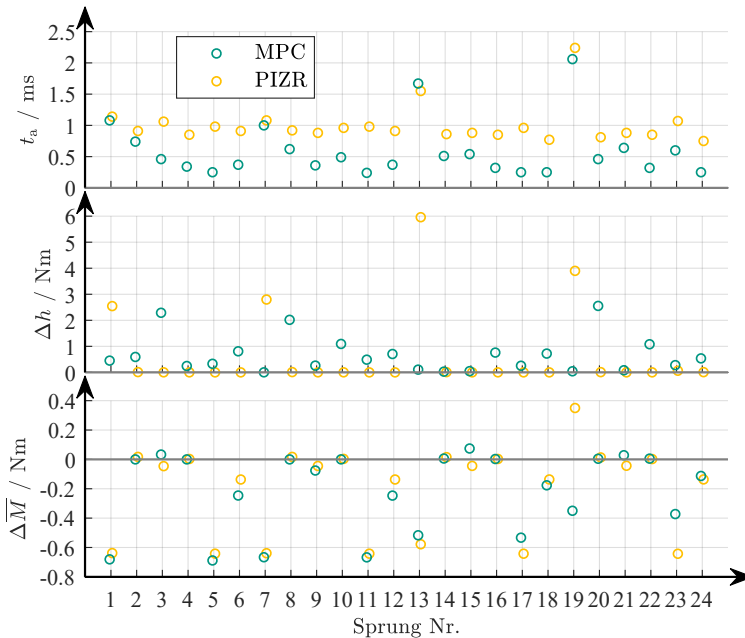


**Abbildung 5.18:** Aufsummierte Anzahl an Iterationen (über die beiden Optimierungsschritte in Gleichung (5.6)) des *Interior Point* Algorithmus

durch die vorgeschlagene Transformation in Verbindung mit einem gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus erzielt werden kann.

## 5.6 Bewertung der Regelergebnisse des MPC im ungestörten Fall und Vergleich zum PI-Zustandsregler

Die im Abschnitt 5.4 erläuterte Vorgehensweise wird angewendet, um die Regelgüte des MPC zu quantifizieren. Zur Beurteilung dient der Vergleich zu dem im Unterabschnitt 5.1.3 vorgestellten PIZR, der hier ebenfalls mit den vorgestellten Kenngrößen ausgewertet ist. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 5.19 dargestellt. Aufgrund der ausführlichen Diskussion der weiterführenden Untersuchungen sind die Ergebnisse hier kurz zusammengefasst. Die Auswertung der 90 %-Anregelzeit ergibt für große positive Sprünge vergleichbare Ergebnisse. Bei den kleineren Sprüngen ist die 90 %-Anregelzeit des MPC im Schnitt nur halb so groß. Die mittlere stationäre Abweichung ergibt vergleichbare Werte, die für beide Ansätze im Bereich



**Abbildung 5.19:** Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschingers

$[-0,8, 0,4]$  Nm liegen. Im Modell der PSM in *Simscape* sind die gleichen Flusskennfelder hinterlegt wie bei der Erstellung der Sollstromtabellen für den PIZR und in der Erstellung des Prädiktionsmodells im MPC. Die Modellierungsgrundlage ist daher gleich und entstehende Abweichungen sind verfahrensbedingt. Die Vergleichbarkeit der Ergebnisse führt daher zu zwei Erkenntnissen über die verwendeten Verfahren. Die Berechnung der stationären Sollströme für die PIZR sowie die Gütefunktionserstellung nach dem lexikographischen Schema führen zu vergleichbaren stationären Abweichungen. Die Zielerreichung des Abbruchkriteriums im Drehmoment von  $0,1$  Nm wird nur bei der Hälfte der Sprünge erreicht. Die Wahl des Abbruchkriteriums beeinflusst nicht das Regelergebnis. Die Überschwinger für den MPC liegen generell unter  $2,6$  Nm und für den PIZR unter  $6$  Nm, daraus resultiert bei Betrachtung der maximalen Überschwingerhöhe über alle Sprünge eine Verringerung um  $50\%$ . Diese Verbesserung ist maßgeblich durch die großen positiven Sprünge (Nr. 1,7,13 und 19) mit den größten Überschwingern des PIZR gegeben. Bei den hohen negativen Sprüngen (Nr. 2,8 und 20) entstehen beim Einsatz des MPC ein mit der Drehzahl zunehmender bis auf die  $2,6$  Nm anwachsender Überschwinger, während der durch den PIZR verursachte Überschwinger bei diesen Sprüngen auf null bleibt. Im Folgeabschnitt wird der Aspekt der Strombegrenzung ausführlicher betrachtet, welcher aufgrund der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Methode von besonderem Interesse ist.

### 5.6.1 Betrieb an der Stromgrenze

In diesem Abschnitt erfolgt die Analyse des Verhaltens an der Stromgrenze. Das Verhalten an der Spannungsgrenze wird im Rahmen der Untersuchung des Verhaltens bei oszillierenden Sollwerten im Abschnitt 5.9 näher betrachtet. Die Besonderheit des MPC ist, dass die Stromgrenze als Parameter an den Regler übergeben werden kann. Es ermöglicht die Einhaltung zeitvarianter Vorgaben für die Strombegrenzung. Die Untersuchung dieses Abschnitts setzt voraus, dass ein aktueller maximaler Strombetrag  $i_{Tmax}$  bekannt ist. Dieser bestimmt sich über ein Temperaturmodell, gemessene oder geschätzte Temperaturen sowie die zugeführte und abgeführte Wärmemenge. Welche Änderungsrate für eine zeitvariante Stromgrenze mindestens notwendig ist, erfolgt anhand einer Abschätzung. In [KHL14] wird ein vereinfachtes thermisches Modell für eine PSM mit vergrabenen Magneten entwickelt<sup>39</sup>. Die Abschätzung erfolgt anhand des Temperaturmodells der Wicklungen. Die zugeführte Wärmemenge entspricht dabei den ohmschen Verlusten in den Wicklungen. Die wirksame Wärmekapazität ist dort für die Wicklung mit etwa  $1000 \text{ W s K}^{-1}$  angegeben. Für den angegebenen thermischen Leitwert von etwa  $10 \text{ W K}^{-1}$  ergibt sich dabei eine thermische Zeitkonstante von  $100 \text{ s}^{-1}$ . Die Änderungsrate der Stromgrenze  $i_{Tmax}$  im MPC ist in diesen Zeitbereichen unkritisch. Die simulierte Änderungsrate von  $1000 \text{ A s}^{-1}$  reicht für die beschriebene Anwendung zur Temperaturkontrolle aus und demonstriert das Potential der Strombegrenzung  $i_{Tmax}$ . Zur Untersuchung einer zeitvarianten Strombegrenzung werden die Drehzahlen der Szenarien aus Abschnitt 5.4 verwendet. In Abbildung 5.20 ist das Verhalten für ein konstantes Soll Drehmoment

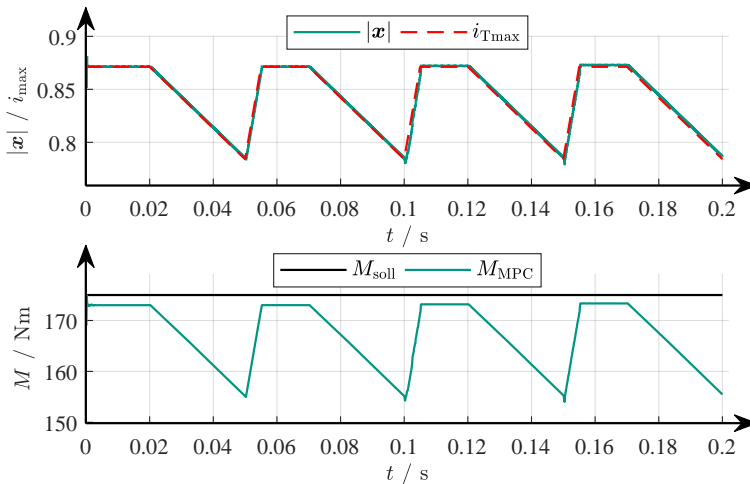
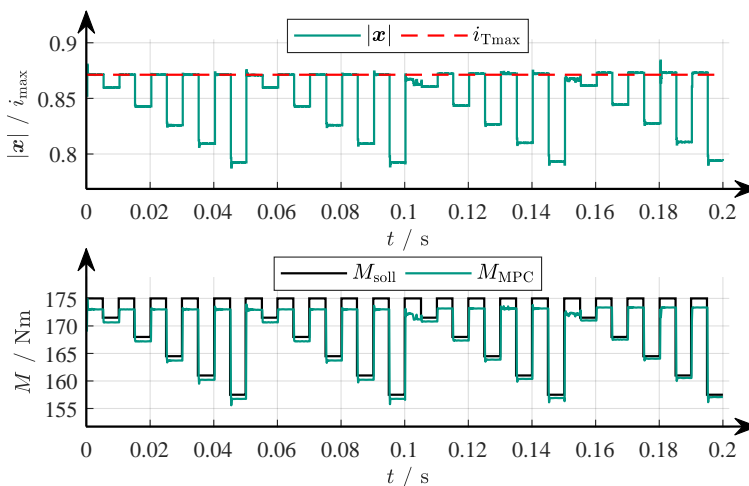


Abbildung 5.20: Verhalten an der Stromgrenze bei konstantem Soll Drehmoment

<sup>39</sup> Die dort verwendete Maschine hat eine etwa zehnfach kleinere Leistung, dies stört bei der Abschätzung nicht, da dort die thermischen Zeitkonstanten kleiner sind.

von 175 Nm zu sehen. Die vier Drehzahlen werden jeweils für 40 ms konstant gehalten und währenddessen erfolgt die Variation der Strombegrenzung  $i_{Tmax}$ . Sie wird zunächst konstant gehalten, um das stationäre Verhalten zu betrachten. Im Anschluss erfolgt eine Verkleinerung der Stromgrenze  $i_{Tmax}$  um 10 % mit  $1000 \text{ A s}^{-1}$ . Während die Drehzahl sprunghaft angehoben wird<sup>40</sup>, erfolgt gleichzeitig die Rücksetzung der Stromgrenze auf den nominellen Wert des Maschinenmodells  $i_{Tmax} = 0,871 i_{max}$ <sup>41</sup>. Bezogen auf die nominelle Stromgrenze bleibt der Fehler bei den untersuchten Drehzahlen unter 0,23 %. Der entstehende Strombetrag  $|i|$  liegt über der Stromgrenze  $i_{Tmax}$ , dies ist aufgrund der geringen Abweichung nicht als problematisch einzustufen. Der maximale Strombetrag wird voll ausgeschöpft und stellt sicher, dass das primäre Regelziel, die Erreichung des Soll Drehmoments, im Sinne der Gütefunktion optimal erreicht wird. Des Weiteren ist eine Zunahme des Fehlers über der Drehzahl zu erkennen. Dies ist erklärbar durch den Einsatz des Zustandsraummodells zur Transformation der Stromgrenze und der Gütefunktion in den Eingangsraum, in dem der MPC die Stellgrößen optimiert. Die Drehzahl ist der Parameter mit der größten Schwankungsbreite in den Matrizen des affinen Systemmodells und hat daher erheblichen Einfluss auf dieses. Im unteren Teil der Abbildung ist der zeitliche Verlauf des entstehenden Drehmoments zu sehen. Es zeigt aufgrund der Begrenzung des maximalen Strombetrages ein analoges Verhalten. Der Verlauf ist trotz der schnellen Änderungsrate von  $1000 \text{ A s}^{-1}$  sehr glatt.

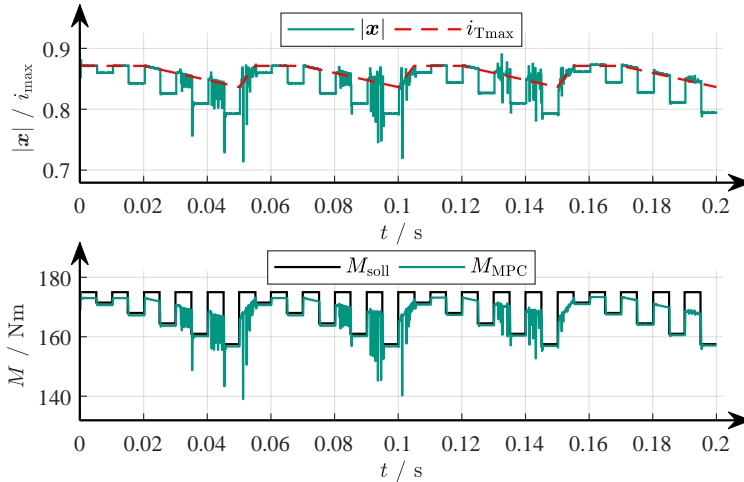


**Abbildung 5.21:** Verhalten an der Stromgrenze bei Soll Drehmomentsprüngen

<sup>40</sup> Während dieses Vorganges ist die Drehzahländerung in physikalisch nicht möglichen Größenordnungen (bis zu  $480\,000 \text{ min}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ).

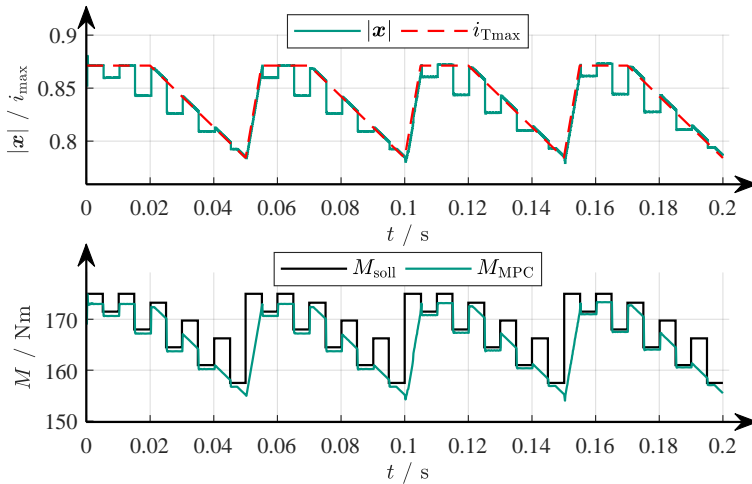
<sup>41</sup> Dieser Wert ergibt sich aus den Maschinendaten in Unterabschnitt 5.1.1 und den gewählten Bezugswerten der Normierung aus Tabellen A.2 und A.3 in Anhang A.6.3.

Das gleiche Szenario bezüglich Drehzahl und Stromgrenze bei konstanter Strombegrenzung  $i_{T\max}$ , aber mit Sprunganregung des Soll Drehmoments des MPC, ist in Abbildung 5.21 dargestellt und liefert vergleichbar gute Ergebnisse. Dort beträgt die maximale Verletzung der Stromgrenze 0,5 %. Die Ausnutzung der Strombegrenzung ist geringfügig schlechter. Sie fällt zeitweise auf unter 98 %, was mit Schwingungen einhergeht.



**Abbildung 5.22:** Verhalten an der Stromgrenze bei Soll Drehmomentsprüngen

Wird das gleiche Szenario mit zeitvarianter Stromgrenze betrachtet, ergeben sich die Ergebnisse in Abbildung 5.22. Hier sind deutliche Schwingungen im Drehmoment und im Strombetrag erkennbar. Die Absenkung der Stromgrenze  $i_{T\max}$  ist hier auf 5 % reduziert. Es zeigen sich im stationären Betrieb sowie für geringe Abweichungen der Stromgrenze  $i_{T\max}$  von unter 1 % vom nominellen Wert  $0,871 i_{\max}$  vergleichbare Ergebnisse zur Betrachtung bei konstantem Soll Drehmoment. Das Verhalten außerhalb dieses Bereichs ist für Anwendungen bereits als problematisch einzustufen. Genaue ursächliche Zusammenhänge sind nicht zu ergründen. Eine weitere Untersuchung des Effektes zeigt, dass der Abstand des Soll Drehmoments zum Drehmoment, das bei einer Stromgrenze  $i_{T\max}$  noch erreicht werden kann, entscheidend ist. Ist die Zielzustandsmenge des MPC, die durch das linearisierte Soll Drehmoment festgelegt wird, zu weit außerhalb der zulässigen Stromgrenze führt dies zu dem gezeigten Verhalten. Abbildung 5.23 belegt diese Hypothese. Wird durch eine Begrenzung des Soll Drehmoments sichergestellt, dass es sich nicht zu weit vom erreichbaren Drehmoment entfernt, verbessern sich die Ergebnisse deutlich. Die maximal erlaubte Abweichung ist stark vom Betriebspunkt abhängig. Bei den betrachteten Szenarien lösen in bestimmten Betriebspunkten bereits Abweichungen ab 2 Nm den beschriebenen Effekt aus. Das Regelergebnis sowie die Verletzung und Ausnutzung der Strombegrenzung sind vergleichbar mit dem ersten betrachteten Fall mit konstantem Soll Drehmoment. Obwohl methodisch sichergestellt ist, dass die Ströme im Rahmen



**Abbildung 5.23:** Verhalten an der Stromgrenze bei Soll Drehmomentsprüngen und nachgeführtem Solldrehmoment

der Modellgenauigkeit nicht den maximalen Strombetrag überschreiten, sollte das maximale Solldrehmoment begrenzt sein, falls das Drehmoment an der Strombegrenzung schnellen Veränderungen unterliegt. Dies ist wichtig, da sich die Beschreibung der Zielmenge dadurch im Zustandsraum nicht zu weit vom Rand der Strombegrenzung entfernt, was zu einer schlechten Modellierung der Zielzustandsmenge und keinem stationären Verhalten des MPC führen würde.

Für konstante Solldrehmomente kann mit der vorgestellten Methode zuverlässig eine dynamische Verringerung der Strombegrenzung von 10 % gegenüber des Nominalwerts erreicht werden. Die Verletzung der Strombegrenzung liegt unter 0,23 %. Der zur Verfügung stehende Strom wird maximal ausgenutzt. Für schnell veränderliche Solldrehmomente wird die konstante nominelle Strombegrenzung ebenfalls maximal um 0,5 % überschritten. Dabei neigt das Drehmoment zeitweise zu Schwingungen. Eine Kombination aus schnell veränderlichem Solldrehmoment und einer Abweichung des Solldrehmoments vom erreichbaren Drehmoment unter der aktuellen Stromgrenze  $i_{T\max}$  führt zu starken Schwingungen im Drehmoment. Dies kann verhindert werden durch die Begrenzung des maximalen Solldrehmoments auf Werte, die das erreichbare Drehmoment in kritischen Betriebspunkten nicht um mehr als 2 Nm übersteigen.

## 5.7 Bewertung der Regelergebnisse bei Parameterfehlern

Das Ziel der Untersuchung bei Parameterfehlern ist die Analyse der Reaktion des MPC auf Effekte, die nicht im Prädiktionsmodell enthalten sind. Es werden Versuche bei Parameter-

schwankungen über die in Abschnitt 5.4 eingeführten Szenarien durchgeführt. Dabei wird das Simulationsmodell der Maschine mit den nominellen Parametern betrieben, während der Regler mit verfälschten Werten rechnet. Diese verfälschten Werte des MPC sind mit einer Tilde gekennzeichnet. Die Simulation erfolgt ebenso mit den nominellen Werten, um den direkten Vergleich zum fehlerfreien Fall zu ermöglichen.

### Bestimmung der zu variierenden Parameter

Als Nächstes erfolgt die Auflistung der für Modellfehler verantwortlichen Parameter und deren zu untersuchende Wertebereiche. Diese Auswahl basiert auf der Masterarbeit [Kru17]. Es gibt nur zwei Parameter der PSM, die relevant sind für diese Betrachtung, denn die Polpaarzahl kann als exakt vorausgesetzt werden:

- Stator Widerstand  $R_S$

Die beiden wesentlichen Effekte, die zu einer Veränderung des als konstant angenommenen Statorwiderstands führen, sind die Widerstandserhöhung durch Temperaturanstieg und Stromverdrängung bei Frequenzerhöhung. Ersteres kann durch die bekannten Temperaturkoeffizienten der Kupferleiter und eine maximal zu erwartende Temperatur von etwa  $180^\circ\text{C}$  ermittelt werden. Der Einfluss der Stromverdrängung kann beispielsweise durch FEM Simulation ermittelt werden. Da die Temperatur der Maschine ausgehend von einer Umgebungstemperatur von  $20^\circ\text{C}$  wesentlich stärker nach oben ansteigt, ist mit  $\tilde{R}_S \in \{0,7R_S, R_S, 1,7R_S\}$  eine unsymmetrische Parameterschwankung angesetzt.

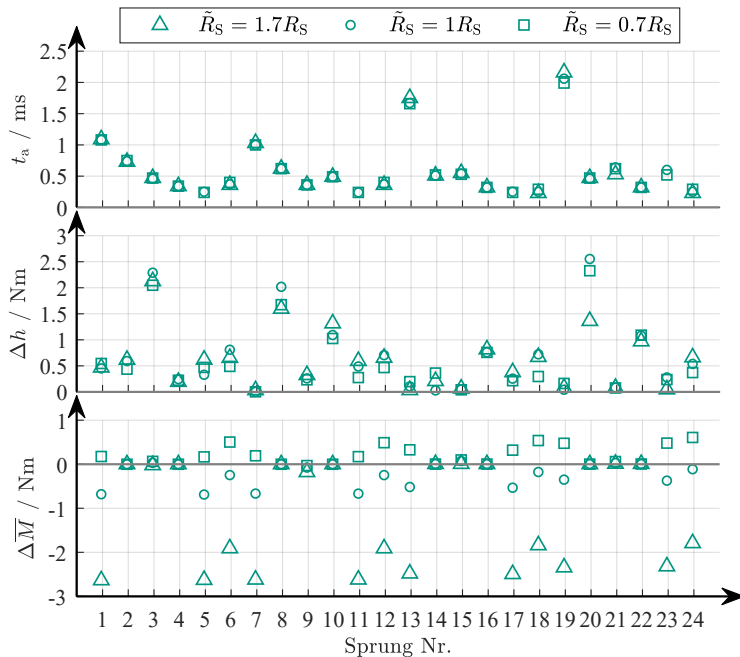
- Flusskennfelder  $\Psi_d$  und  $\Psi_q$

Die unmodellierten Einflüsse auf die Flusskennfelder sind vielfältig. Während die Eisensättigung und die Kreuzverkopplung durch die Flusskennfelder berücksichtigt sind, verbleiben Oberwellen, Eisenverluste, Temperaturabhängigkeit und Fertigungsschwankungen als Fehlerquellen. Der mittlere Fehler für die Identifikation von Flusskennfeldern liegt bei Identifikationsverfahren nach aktuellem Stand unter 5 % ([LFG<sup>+</sup>18]). Die Variation der Flusskennfelder wird auf  $\pm 5\%$  festgelegt. Die vom Regler verwendeten Flusskennfelder  $\tilde{\Psi}_d$  und  $\tilde{\Psi}_q$  nehmen daher die Werte  $\pm 5\%$ :  $\tilde{\Psi}_d \in \{0,95\Psi_d, \Psi_d, 1,05\Psi_d\}$  sowie  $\tilde{\Psi}_q \in \{0,95\Psi_q, \Psi_q, 1,05\Psi_q\}$  an. Des Weiteren sind alle davon abhängigen Größen, die der Regler verwendet, basierend auf diesen verfälschten Kennfeldern berechnet.

### Auswertung

Bei der 90 %-Anregelzeit zeigen sich in Abbildung 5.24 kaum Abhängigkeiten vom Statorwiderstand. Die Unterschiede über alle Sprünge und Drehzahlen hinweg liegen maximal bei  $200\ \mu\text{s}$ . Ebenfalls als gering ist der Einfluss auf die Höhe des Überschingers einzustufen. Sie verändert sich bezogen auf die Sprunghöhe um maximal 3 %. Die Höhe des Überschingers

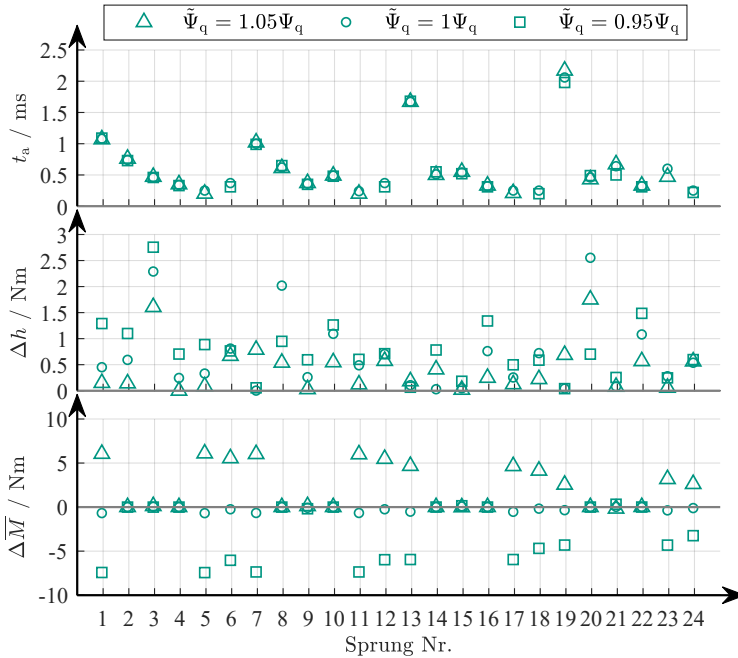




**Abbildung 5.24:** Vergleich der 90%-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschwingers für Fehler im Statorwiderstand

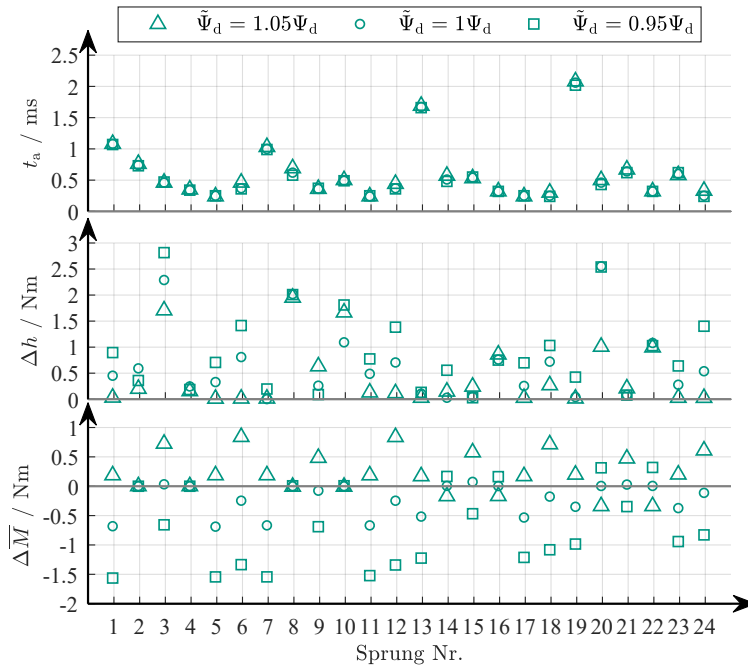
bei den kleinen Drehmomentsprüngen schwankt wesentlich stärker durch fehlerhafte Widerstandswerte. Ansonsten ist die Ausschlagsrichtung hier indifferent. Es zeigt sich kein klares Muster, nachdem sich dieser Wert ändert. Zum Teil führt ein zu klein angenommener Widerstand zu höheren, zum Teil zu kleineren Überschwängern. Anders verhält es sich bei der mittleren stationären Abweichung. In Abbildung 5.24 lässt sich ein deutliches Muster erkennen. Bei den Sprüngen auf ein hohes Drehmoment (Sprünge Nummer 1,5,6,7,11,12,13,17,18,19,23 und 24) ist ein wesentlich stärkerer Einfluss eines fehlerhaften Statorwiderstands erkennbar. Erklären lässt sich dieses Verhalten durch den höheren Stromfluss in diesen Arbeitspunkten nach dem Sprung. Aufgrund des verfälschten Widerstandes ergibt sich eine wesentlich höhere Fehlspannung. Ebenfalls ist in Abbildung 5.24 ein klares Muster bezüglich der Verschiebung des stationären Mittelwertes zu sehen. Bei einem zu klein angenommenen Widerstand im Modell erhöht sich der mittlere stationäre Wert, bei einem zu groß angenommenen Widerstand sinkt dieser. Ebenfalls ist ein Zusammenhang zur Größe der Abweichung erkennbar. Die Erhöhung des mittleren stationären Wertes durch die Verringerung des Widerstandes um 30 % entspricht etwa  $\frac{3}{7}$  der Verringerung, welche durch den um 70 % erhöhten Widerstand verursacht wird. Als Näherungsregel kann pro 10 % Widerstandserhöhung eine stationäre Drehmomentabsenkung von 1 Nm angesetzt werden. Die Interpretation dieses Ergebnisses liefert die Betrachtung einer Maschine mit linearem magnetischem Kreis ohne Reluktanzmoment. Dort ist der q-Strom proportional zum Drehmoment, während wiederum der Stromfluss in-

nerhalb eines stationären Betriebspunktes ( $\frac{di_q}{dt} = 0$ ) proportional zum Widerstand ist. Diese Annahmen treffen hier nicht zu, dennoch bestätigen die Ergebnisse diesen Zusammenhang.



**Abbildung 5.25:** Vergleich der 90%-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschingers für Fehler im q-Flusskennfeld

Die Auswertung der Regelergebnisse der fehlerhaften Flusskennfelder in Abbildungen 5.25 und 5.26 ergibt Folgendes. Die 90%-Anregelzeiten zeigen eine vernachlässigbare Abhängigkeit von fehlerhaften Flusskennfeldern. Lediglich bei der höchsten untersuchten Drehzahl kommt es zu Unterschieden von maximal 150  $\mu$ s. Bei der mittleren stationären Abweichung muss zwischen d- und q-Flusskennfeld unterschieden werden. Es wird zunächst auf die Abhängigkeit von Fehlern im q-Flusskennfeld eingegangen. Hier gilt das Gleiche wie bei fehlerhaften Widerständen: Die Auswirkungen auf Sprünge zu einem hohen Drehmoment (Sprünge Nummer 1,5,6,7,11,12,13,17,18,19,23 und 24) sind wesentlich stärker. Für eine Flussverringering liegen diese unter dem Sollwert (minimal  $-8$  Nm) und für eine Flussserhöhung über dem Sollwert (maximal  $7$  Nm). Die anderen Sprünge zeigen kaum eine Reaktion auf die Veränderung des q-Flusskennfeldes. Beim fehlerhaften d-Flusskennfeld zeigt sich eine vernachlässigbare stationäre Abweichung von maximal  $1$  Nm und minimal von  $-1,6$  Nm. Es gibt zwei erkennbare Muster bei beiden Flusskennfeldern. Zum einen ist eine Verringerung der Abweichung mit steigender Drehzahl erkennbar, falls jede Sprungart für sich betrachtet wird. Zum anderen führt bis auf vier Ausnahmen beim d-Flusskennfeld ein zu hoch angenommener Fluss zu einem stationären Mittelwert, der über dem Sollwert liegt. Der umgekehrte Fall gilt ebenso: Ein zu gering angenommener Fluss führt zu einem stationären Mittelwert, der unter dem Soll-



**Abbildung 5.26:** Vergleich der 90 %-Anregelzeit, der stationären Abweichung und der Höhe des Überschingers für Fehler im d-Flusskennfeld

wert liegt. Bei Betrachtung der Überschwinghöhe ergibt sich ein indifferentes Bild, ausgenommen: die Höhe des Überschingers bei den kleinen Drehmomentsprüngen schwankt durch die fehlerhaften Flusskennfelder wesentlich stärker als bei großen. Die Veränderungen des Überschingers durch Fehler im q-Flusskennfeld sind mit maximal  $\pm 4\%$  etwas niedriger als die im d-Flusskennfeld mit maximal  $\pm 6\%$  bezogen auf die Sprunghöhe. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich Fehler im q-Flusskennfeld stärker auf die Drehmomentregelgüte, insbesondere der mittleren stationären Abweichung, auswirken, wohingegen die 90 %-Anregelzeit von Fehlern in den Flusskennfelder kaum beeinflusst wird.

Für die Parameterfehler ergibt sich folgendes Gesamtbild: die 90 %-Anregelzeit unterliegt in beiden Fehlerfällen vernachlässigbaren Schwankungen. Am kritischsten anzusehen ist die Auswirkung von Fehlern im q-Flusskennfeld auf die stationäre Abweichung, sie wirkt sich am stärksten auf das Regelergebnis aus. Eine Interpretation über beide Parameter hinweg ist bezüglich der Muster in der stationären Abweichung möglich. Diese sind im Wesentlichen deterministisch, da sie über die Ausgangsgleichung (1.7) des Maschinenmodells herleitbar sind. Die 90 %-Anregelzeiten und Überschwinger hängen von wesentlich mehr Faktoren ab. Zum einen legt die aktuelle Lage des Transformationswinkels fest wie die Lage des Sechsecks im dq-Koordinatensystem ist. Dies begrenzt die Spannung daher auf unterschiedliche Werte, da die Lage des Winkels nicht bei allen Sprüngen gleich ist. Zum anderen wird die PFGM während der

Sprünge durch die maximale Iterationszahl terminiert und liefert nur suboptimale Ergebnisse. Diese können sich positiv oder negativ auswirken, denn das Optimum der Gütefunktion des affin modellierten Maschinenmodells muss nicht dem Optimum der nichtlinearen Maschine entsprechen. Somit kann ein suboptimaler Wert der verwendeten Gütefunktion ebenso eine Verbesserung des Regelergebnisses erzielen.

## 5.8 Bewertung der Regelergebnisse bei Messfehlern

Das Ziel der Untersuchung der Reaktion des MPC auf gestörte Messsignale, ist die Analyse der Sensitivität des Reglers gegenüber Fehlern in den Messsignalen. Das stellt einen weiteren wichtigen Aspekt für die Beurteilung seiner Praxistauglichkeit dar. Es werden Simulationen bei Signalfehlern über die in Abschnitt 5.4 eingeführten Szenarien durchgeführt. Die verfälschten Signale, mit denen der Regler rechnet, sind mit einer Tilde gekennzeichnet. Zur besseren Beurteilung der Ergebnisse werden sie direkt mit denen des PIZR aus Unterabschnitt 5.1.3 verglichen sowie jeweils mit den Simulationsergebnissen mit korrektem Signalverlauf. Der Strom und der Rotorwinkel der Maschine liegen als Messgrößen vor. Die folgende Auflistung zeigt die Übersicht der durchgeführten Untersuchungen, die in den anschließenden Abschnitten zu finden sind.

- Rotorwinkel  $\gamma_{el}$   
Hier wird ein absoluter Fehler untersucht. Dies entspricht einem konstanten Fehler, der dem Messsignal aufaddiert wird.
- Strangströme  $i_U, i_V$  und  $i_W$ 
  - Verstärkungsfehler und absoluter Fehler  
Die hier untersuchte Kombination aus einem relativen und einem absoluten Fehler ergibt sich anhand des Datenblattes des beschriebenen Halbleitermoduls ([SEM07]).
  - Additives weißes gaußsches Rauschen  
Dieser Messfehler soll die Reaktion der Regler auf kleine und schnelle stochastische Signalfehler untersuchen.

### 5.8.1 Fehlerhafte Rotorwinkelmessung

Ein Fehler in der Rotorwinkelmessung hat neben Messunsicherheiten des Rotorwinkelsensors ebenso konstruktive Ursachen. Erstere können durch genaue Sensoren so klein gehalten werden, dass Messunsicherheiten für die hier betrachteten Effekte keine Auswirkung haben. Um die Kosten gering zu halten, ist es jedoch erstrebenswert Sensoren mit geringer Genauigkeit in der Anwendung einsetzen zu können. Der zweite Fehler entsteht bei der Kalibrierung der Messeinrichtung des Rotorwinkels. Sie erfolgt durch ein Identifikationsverfahren nach der

Montage der Maschine. In der Serienfertigung eingesetzte Verfahren können zu Abweichungen von bis zu  $\pm 2,5^\circ$  führen ([Ric15, S. 43]). Für viele Regelungszwecke ist das zu ungenau und wird nachträglich durch Identifikationsverfahren korrigiert. Durch diesen großen Fehler treten die Unterschiede in der Sensitivität zwischen MPC und PIZR deutlich hervor, weshalb dieser Wert hier verwendet wird. Das Simulationsmodell ist vollständig im dq-Koordinatensystem implementiert. Um die fehlerhafte Rotorwinkelmessung zu simulieren, wird daher der Stromraumzeiger vor Übergabe an den Regler um den simulierten Winkelfehler gedreht. Das gleiche Vorgehen wird auf den vom Regler berechneten Spannungsraumzeiger im dq-Koordinatensystem angewendet, diese werden ebenfalls um den simulierten Winkelfehler gedreht. Der Fehler ist absolut und wirkt sich daher unabhängig vom Betriebspunkt auf den verfälschten Wert  $\tilde{\gamma}_{el}$  aus. Weil der Rotorwinkel in elektrischen Koordinaten angegeben ist, muss zusätzlich die Polpaarzahl berücksichtigt werden:

$$\tilde{\gamma}_{el} \in \left\{ \gamma_{el} - \frac{p_{2,5}^\circ}{180^\circ} \pi \text{rad}, \gamma_{el}, \gamma_{el} + \frac{p_{2,5}^\circ}{180^\circ} \pi \text{rad} \right\}. \quad (5.8)$$

### Auswertung

An dieser Stelle erfolgt die Diskussion an exemplarischen Beispielen, die detaillierte Darstellung ist im Anhang A.7.8 zu finden. Die Schwankungsbreite im Überschwinger durch den fehlerhaften Winkel beträgt über alle Sprünge maximal 3 Nm für MPC und PIZR. Die Sensitivität des Überschingers bezüglich eines Winkelfehlers ist jedoch für den MPC als stärker einzustufen, da dieser für alle Sprünge Schwankungen zeigt, während der PIZR nur für die großen positiven Sprünge auf den Fehler reagiert. Die mittlere stationäre Abweichung verschlechtert sich durch den Rotorwinkelfehler bei Verwendung des MPC auf maximal  $+0,7/-2,5$  Nm und bei Verwendung des PIZR auf maximal  $+0,4/-3$  Nm. Auffällig ist ebenfalls, dass mit dem PIZR für kleine Sprünge bei hohem Drehmoment (Sprungnummer 5, 11, 17 und 13) die geforderten 90 % des Sollwertes nicht erreicht werden. Daher sind bei diesen Sprüngen keine 90 %-Anregelzeiten eingetragen. Die Schwankungsbreiten in den 90 %-Anregelzeiten sind im Fall des MPC nicht alle aussagekräftig, da dort vor Erreichen des stationären Werts, aber nach Erreichen von 90 % des Solldrehmoments, Einbrüche des Drehmomentverlaufs festzustellen sind. Dies geschieht ausschließlich bei positiven Drehmomentsprüngen, bei diesen Sprüngen sind die 90 %-Anregelzeiten folglich nicht repräsentativ. Am stärksten ist der Einbruch mit 17 % bei Sprungnummer 13 ausgeprägt. Dieser ist exemplarisch in Abbildung A.19 im Anhang A.7.8 dargestellt. Hingegen zeigt sich in Abbildung 5.27, dass bei  $4800 \text{ min}^{-1}$  die 90 %-Anregelzeiten des PIZR im Vergleich zum MPC wesentlich stärker vom Winkelfehler abhängen (vgl. Sprungnummer 19 in Abbildung A.16). Ein weniger stark ausgeprägter Effekt liegt für negative Drehmomentsprünge vor: Ein zu klein angenommener Rotorwinkel wirkt sich verstärkend auf die Höhe des negativen Überschingers aus, dieser beträgt für den MPC über alle Sprünge maximal 4,2 Nm und für den PIZR maximal 1,6 Nm. Eine Interpretation der Ursachen dieses Effekts ist schwer. Eine Gemeinsamkeit ist jedoch auffällig: Der Effekt ist in beiden Fällen ein

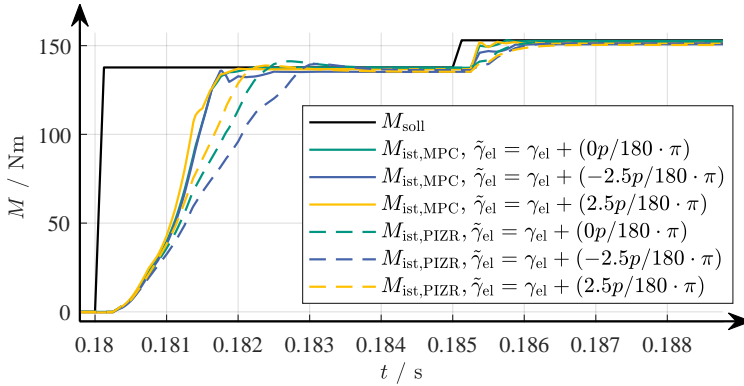


Abbildung 5.27: Zeitlicher Verlauf des Drehmoments für fehlerhafte Rotorwinkel bei  $4800 \text{ min}^{-1}$

negativer Ausschlag des Drehmoments vor Einfinden im stationären Zustand. Dies spricht dafür, dass der Linearisierungsfehler bei der Approximation der Drehmomentgleichung die Ursache sein kann.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Kennzahlen für einen absoluten Rotorwinkelfehler für den MPC einen vergleichbaren Einfluss zeigen wie für den PIZR. Bei Betrachtung der Drehmomentverläufe ergibt sich jedoch ein differenzierteres Bild. Durch Regelung mittels MPC verändern sich insbesondere für große positive Sprünge die Drehmomentverläufe in ihrem grundlegenden Verlauf und es kommt zu Einschwingvorgängen mit höherer Amplitude als im ungestörten Fall. Die Form des Verlaufs beim PIZR ist wesentlich invarianter und lediglich die Ausprägung des Verlaufs, der durch ein PT2-Glied beschrieben werden kann, verändert sich. Die Bewertung dieser Ergebnisse ergibt, dass bei dem simulierten großen Messfehler der MPC als weniger geeignet eingestuft wird als der PIZR, da dessen Reaktionen auf unterschiedliche Szenarien weniger übertragbar und somit weniger vorhersagbar ist. Hingegen kann beim PIZR der Winkelfehler für hohe Drehzahlen im Vergleich zum MPC zur Verlangsamung führen.

## 5.8.2 Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung

Da die Strommessung in den drei Phasen erfolgt, ist es notwendig die Fehler im dreiphasigen Koordinatensystem in die Simulation einzuleiten. Typischerweise werden bei einer Maschine ohne angeschlossenen Sternpunkt nur zwei Phasenströme gemessen und der dritte wird berechnet. In dieser Untersuchung wird darauf verzichtet den Messfehler nur in zwei Phasen zu addieren und diesen auf den dritten berechneten Strom fortzupflanzen. Die Abschätzung der zu erwartenden Ungenauigkeit in der Strommessung erfolgt anhand der Anwendungshinweise in [Sch17, S. 34] zu einem *SKIip* Modul. Dort ist angegeben, dass sich bei etwa  $85^\circ\text{C}$  Um-

gebungstemperatur die absolute Abweichung der Strommessung durch folgende Gleichung bestimmen lässt

$$\Delta i = 0,13\% \cdot i_{\text{nom}} + 1,5\% \cdot |i| \quad (5.9)$$

$$= 0,0013 \cdot \frac{500 \text{ A}}{i_{\text{max}}} + 0,015 \cdot |i|. \quad (5.10)$$

Der absolute Fehleranteil beträgt 0,13 % vom nominellen Strom eines Halbleiterzweiges  $i_{\text{nom}}$  und der Verstärkungsfehler ist 1,5 % des aktuell fließenden Stroms. Dieser Messfehler tritt in den Strangströmen auf, das Simulationsmodell ist jedoch vollständig im dq-Koordinatensystem implementiert. Die Ströme im dq-Koordinatensystem des Simulationsmodells werden zunächst ins dreiphasige Koordinatensystem transformiert, in dem jeder einzelnen Phase der Fehler  $\Delta i$  aufaddiert wird. Anschließend werden sie wieder zurück ins dq-Koordinatensystem transformiert. Es wird hier angenommen, dass in jeder Phase genau der gleiche Fehler auftritt. Die betrachteten Fälle sind demnach:

$$\tilde{i}_{\{U,V,W\}} \in \{i_{\{U,V,W\}} - \Delta i, i_{\{U,V,W\}}, i_{\{U,V,W\}} + \Delta i\}. \quad (5.11)$$

## Auswertung

Die Höhe des Überschwingers (detaillierte Darstellung siehe Abbildung A.21) variiert nur minimal durch diesen Fehler. Die entstehenden mittleren stationären Abweichungen (detaillierte Darstellung siehe Abbildung A.20) sind vergleichbar für beide Regler und bewegen sich im Bereich von  $\pm 4 \text{ Nm}$  um den Sollwert. Diese großen Abweichungen finden einheitlich über alle Drehzahlen hinweg bei Sprüngen hin zu einem großen Drehmoment statt. Erklärbar ist dies durch den relativen Fehleranteil, der bei hohen Strömen höher ist. Der resultierende relative Fehler im Drehmoment bleibt im Bereich von  $\frac{4 \text{ Nm}}{150 \text{ Nm}} \approx 2,6\%$ . Die 90 %-Anregelzeiten zeigen nur sehr geringe Abhängigkeit von dieser Fehlerart, dies ist der detaillierten Darstellung in Abbildung 5.28 zu entnehmen. Die Auswirkung beschränkt sich auf kleine Sprünge bei hohem Drehmoment (Sprünge Nummer 5,6,11,12,17,18,23 und 24). Der Effekt ist bei diesen Sprüngen bei Verwendung des PIZR wesentlich deutlicher und führt zu einer Schwankungsbreite von bis zu  $400 \mu\text{s}$ , während sie bei MPC deutlich seltener auftritt und nicht über  $200 \mu\text{s}$  ausfällt. Des Weiteren ist zu beachten, dass aufgrund der hohen stationären Abweichung diese Sprünge zum Teil keine 90 %-Anregelzeit in der Auswertung erhalten, da die 90 % der Sprunghöhe nicht erreicht wird.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass für einen etwa 1,5 % großen Fehler in der Strommessung jeder Phase stationäre mittlere Abweichungen im Drehmoment von etwa 2,6 % entstehen, jedoch nur im Betrieb bei hohen Strömen. Die Auswirkungen dieses Fehlers sind ansonsten als vernachlässigbar einzustufen.

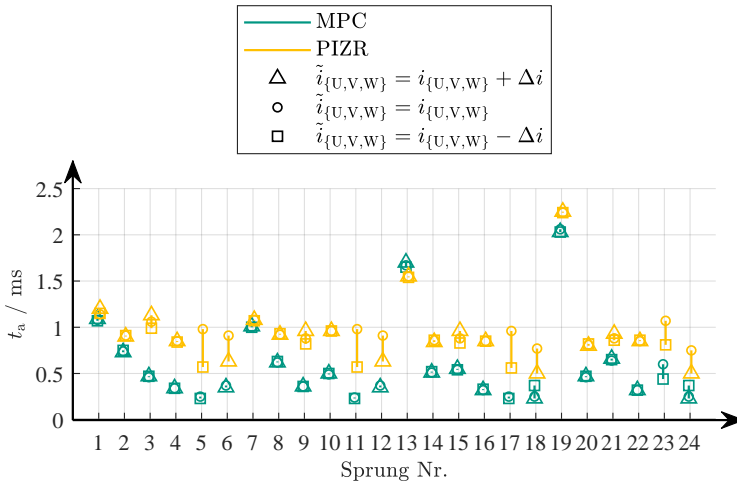


Abbildung 5.28: 90 %-Anregelzeit für Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung

### 5.8.3 Additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

In diesem Abschnitt wird den drei Strangströmen ein stochastisches Signal überlagert. Dieser Fehler kann von Umwelteinflüssen in die Signalübertragungswege einkoppeln oder im Sensor selbst entstehen, wie zum Beispiel der Quantisierungsfehler. Hierfür wird angenommen, dass etwa 50 % aller Messwerte weniger als 2 % vom Nominalwert abweichen. Diese 2 %-Grenze orientiert sich an der im vorigen Abschnitt bestimmten Kombination aus absolutem und relativem Fehler. Das fehlerbehaftete Signal wird hierfür durch die Multiplikation mit einer Zufallszahl aus der gaußschen Normalverteilung  $\mathcal{N}(1, 10^{-3})$  mit dem Mittelwert eins und der Varianz  $\sigma^2 = 0,001$  berechnet. Da der Effektivwert der Signalamplitude des Rauschens der Standardabweichung  $\sigma$  des Rauschprozesses entspricht, ergibt sich bei einer Signalamplitude von eins der Zusammenhang ([KE08]):

$$Q_{\text{SNR}} = 10 \lg \left( \frac{1}{\sigma^2} \right). \quad (5.12)$$

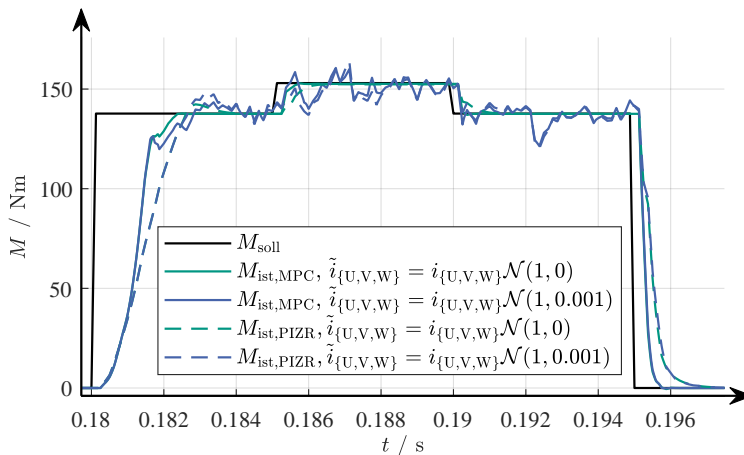
Die Varianz  $\sigma^2 = 0,001$  ist folglich gleichbedeutend mit einem Signalrauschabstand von circa  $Q_{\text{SNR}} = 27$  dB. Das entspricht bei reinem Quantisierungsrauschen einer Auflösung von circa 4,2 bit. Der Fehler wird in allen drei Strangströmen mit unabhängigen Realisierungen der verwendeten Normalverteilung eingefügt. Die Untersuchung umfasst demnach Simulationen mit unverfälschten Werten ( $\mathcal{N}(1, 0)$ ) und welche mit verrauschten Werten ( $\mathcal{N}(1, 10^{-3})$ ):

$$\tilde{i}_{\{U,V,W\}} \in \{ \mathcal{N}(1, 0) \cdot i_{\{U,V,W\}}, \mathcal{N}(1, 10^{-3}) \cdot i_{\{U,V,W\}} \}. \quad (5.13)$$



## Auswertung

In Abbildung 5.29 sind repräsentativ die Sprünge Nummer 23 und 24 dargestellt, sowie das Erreichen und Verlassen des hohen Drehmoments, was vergleichbar mit den Sprüngen Nummer 19 und 20 ist. Erkennbar ist, dass die Auswirkungen auf die Regelgüte bei beiden Reglern vergleichbar und erheblich ist. Ebenfalls ist ersichtlich, dass für die hohen Sprünge während



**Abbildung 5.29:** Drehmomentverlauf für ein additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

der Transition kaum eine Veränderung des Signalverlaufs ersichtlich ist. Dies gilt ebenso für die restlichen Sprünge, wie die Auswertung der 90 %-Anregelzeiten zeigt (detaillierte Darstellung siehe Abbildung A.22). Die einzigen deutlichen Verschiebungen der 90 %-Anregelzeiten durch das Rauschen sind in den kleinen Sprüngen bei hohem Drehmoment (Sprünge Nummer 5,6,11,12,17,18,23 und 24) zu sehen. Dort beträgt beim MPC sowie beim PIZR die Schwankungsbreite maximal  $750 \mu\text{s}$ . Die Höhe des Überschingers (detaillierte Darstellung siehe Abbildung A.24) variiert erheblich durch diesen Fehler. Wobei diese Kennzahl hier als Drehmomentwelligkeit zu interpretieren ist. Abbildung 5.29 zeigt, dass die stationären Schwankungen höher sind als der Überschinger. Die Welligkeit ist wie beim vorigen Fehler bei Sprüngen hin zu einem hohen Drehmoment am deutlichsten, mit bis zu  $17 \text{ Nm}$ . Die beiden Regler zeigen ein identisches Verhalten. Dies trifft ebenso auf die mittlere stationäre Abweichung zu (detaillierte Darstellung siehe Abbildung A.23). Deutliche Abweichungen zwischen beiden Reglern sind nur bei den Sprüngen zu hohem Drehmoment erkennbar, bleiben aber jeweils innerhalb von  $\pm 2 \text{ Nm}$ .

Als Fazit lässt sich formulieren, dass die Reaktion des MPC und des PIZR auf verrauschte Strommesssignale absolut vergleichbar sind. Zum einen stimmen die Situationen überein, in denen die Auswirkungen am größten sind, und zum anderen ist die Stärke der sich ergebenden Auswirkung vergleichbar. Bemerkenswert ist die weitestgehend unveränderte Dynamik

der Regler trotz der starken Störung. Hier kann der MPC weiterhin besonders bei kleinen Solldrehmomentsprüngen schneller 90 % des Solldrehmoments erreichen.

## 5.9 Bewertung der Regelergebnisse bei oszillierenden Sollwerten

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass mit dem MPC, insbesondere bei kleinen Drehmomentsprüngen, ein schnellerer Drehmomentanstieg erzielt werden kann als mit dem PIZR. Eine Anwendung, die besonders von diesem Potenzial profitiert, ist die Kompensation von Drehmomentschwingungen im Antriebsstrang eines PKW. Eine Ursache für Drehmomentoszillationen sind Schwingungen, die durch die Torsion der Welle aufgrund zu geringer Steifigkeit entstehen. Dieser Schwingkreis ist durch die Torsionskonstante und das Massenträgheitsmoment der rotierenden Masse charakterisiert. Dies durch Regelansätze der elektrischen Maschine zu kompensieren, ist bereits in der Literatur behandelt (siehe z. B. [ABP04, RSKL12]). Eine zweite Ursache für Drehmomentoszillationen sind die Zahneingriffe im Getriebe ([JMZ13, GOS14]). Um diese mit der elektrischen Maschine zu kompensieren, müssen dem Solldrehmoment sehr hochfrequente Schwingungen überlagert werden. Die genaue Frequenz hängt vom Übersetzungsverhältnis des Getriebes ab, das nicht zwingend ganzzahlig ist. Sie kann daher als eine nicht ganzzahlige Oberschwingung betrachtet werden. Bei der Betrachtung von mehrstufigen Getrieben, wie sie im PKW eingesetzt werden, entstehen Oberschwingungen verschiedener Ordnungen. Messungen am Rollenprüfstand können die problematischen Ordnungen aufspüren, die über die Zahnradübersetzung exakt bestimmt werden können. In [Roh] ist eine Harmonische im Bereich der Ordnung zehn als kritische Oberschwingung bewertet. Hier wird beispielhaft die ungeradzahlige Harmonische der Ordnung 10,68 betrachtet. Der Gegenstand dieser Untersuchung ist nicht ein Gesamtregelkonzept für eine solche Anwendung. Das würde zusätzlich die Erfassung der vorliegenden Schwingung in Phase und Amplitude beinhalten, dies wird hier als bekannt angenommen. Es wird gezeigt, welche zusätzlichen Potenziale der hier gezeigte MPC-Ansatz für solche Anwendungen ergeben kann.

Die Betrachtung erfolgt zur Einordnung der Ergebnisse ebenfalls für den PIZR. Beide Regler werden mit den gleichen Sollwerten eingesetzt. Es besteht die Möglichkeit für den MPC-Ansatz insbesondere für  $n_h > 1$  prädizierte Sollwerte zu verwenden. Dabei werden über die bekannte Phasenlage und Schwingungsfrequenz des Sollwertsignals die zukünftigen Stellgrößen im Prädiktionshorizont berechnet und in der Gütefunktion eingesetzt. Eine Vorhersage um einen Schritt wäre ebenso für einen Horizont der Länge eins möglich, wie er hier untersucht wird. Dies ist ebenfalls mit dem PIZR möglich und verschiebt nur beide Regelergebnisse in ihrer Phasenlage um einen Abtastschritt. Für den Vergleich der Ansätze bringt dies keinen Mehrwert, daher ist die Auswertung ohne Prädiktion durchgeführt. Bei höheren Horizonten kann der MPC einen methodisch bedingten Vorteil ausnutzen: Ein Sollwert kann über dem

Horizont für jeden einzelnen Schritt präzisiert werden. Dies ist für einen PIZR mit nur einem Sollwerte für die nächste Taktperiode nicht möglich.

### Szenarien und Vorgehen zur Bewertung des Regelergebnisses

Das erreichbare Regelergebnis wird wie bisher über einen breiten Betriebsbereich untersucht. Es werden sieben Drehzahlen in Schritten von  $600 \text{ min}^{-1}$  von  $1200$  bis  $4800 \text{ min}^{-1}$  betrachtet. Geringere Drehzahlen sind nicht von Interesse, da dort die aufzuprägende Oberschwingung nicht von hoher Frequenz ist. Die obere Drehzahl ist durch den zulässigen Betriebsbereich des MPC bestimmt (siehe Abschnitt 5.4). Dabei werden fünf verschiedene Soll Drehmomente mit einem Mittelwert von  $60 \text{ Nm}$  bis  $140 \text{ Nm}$  in Schritten von  $20 \text{ Nm}$  betrachtet. Das Soll Drehmoment berechnet sich wie folgt aus der Drehzahl  $\Omega$ , einem gegebenen Sollmittelwert  $\overline{M}_{\text{soll}}$  und einer Sollamplitude  $\widehat{M}_{\text{soll}}$ :

$$M_{\text{soll}} = \overline{M}_{\text{soll}} + \widehat{M}_{\text{soll}} \sin(\nu\Omega t) \quad (5.14)$$

mit  $\nu = 10,68$ . Die Sollamplitude  $\widehat{M}_{\text{soll}}$  wird prozentual zum Sollmittelwert definiert und in drei Schritten variiert:  $\widehat{M}_{\text{soll}} \in \{5, 10, 15\} \% \overline{M}_{\text{soll}}$ . Um die Regelergebnisse der Szenarien zu bewerten, werden Kennzahlen definiert. Die Erreichung der Amplitude  $\widehat{M}_{\text{ist},1}$  der ersten Harmonischen wird über eine FFT-Analyse berechnet. Aufgrund von Gleichung (5.14) nimmt die Änderungsrate des Sollwertsignals mit der Drehzahl zu. Daher nimmt mit der Drehzahl der Quantisierungsfehler der Abtastung des Sollwertsignals erheblich zu. Darum wird der Amplitudenfehler  $\Delta\widehat{M}$  auf die Amplitude der ersten Harmonischen des quantisierten Sollwertsignals  $\widehat{M}'_{\text{soll},1}$  bezogen:

$$\Delta\widehat{M} = \left( 1 - \frac{\widehat{M}_{\text{ist},1}}{\widehat{M}'_{\text{soll},1}} \right) 100 \% . \quad (5.15)$$

Diese Kennzahl beantwortet folglich die Frage: Um wie viel Prozent liegt der erreichte Amplitudenwert unter der Amplitude der ersten Harmonischen des Sollwertsignals? Es wird hier kein logarithmisches Dämpfungsmaß verwendet, da die Ergebnisse in der gleichen Größenordnung liegen und dies keinen Darstellungsvorteil bringt. Zur besseren Darstellung des Vergleichs mit dem Regelergebnis des PIZR wird für die Dämpfung der Amplitude die Kennzahl

$$\delta\widehat{M} = |\Delta\widehat{M}_{\text{PIZR}}| - |\Delta\widehat{M}_{\text{MPC}}| \quad (5.16)$$

eingeführt. Sie beantwortet folglich die Frage: Wie viel Prozent bezogen auf die Sollamplitude ist der Amplitudenwert mit dem MPC näher an der Sollamplitude als mit dem PIZR? Es ist zu beachten, dass hier die Differenz in der relativen Sollwerterreichung verwendet wird und nicht die Differenz in Bezug auf das Regelergebnis des PIZR/MPC. Die Analyse erfolgt nach einschwingen über sieben elektrische Perioden. So wird sichergestellt, dass die Kenn-

zahlen gemittelt die Auswirkung verschiedener Rotorwinkel und unterschiedlicher Lagen des Spannungssechsecks im dq-Koordinatensystem enthalten. Des Weiteren ergibt sich über die Polpaarzahl und die Ordnung  $\nu = 10,68$ , dass dieser Zeitraum 24,92 Perioden der aufgeprägten Soll Drehmomentschwingung enthält. Dies verfehlt den geradzahigen Wert um nur 0,32 % und nähert eine FFT-Analyse über 25 ganze Perioden des Sollwertsignals an.

## Auswertung

Bei kleinen aufgeprägten Amplituden von  $5\% \overline{M}_{\text{soll}}$  ergeben sich die in Abbildung 5.30 dargestellten Ergebnisse für den Amplitudenfehler  $\Delta \widehat{M}$  bei Verwendung des MPC. Jeder Balken

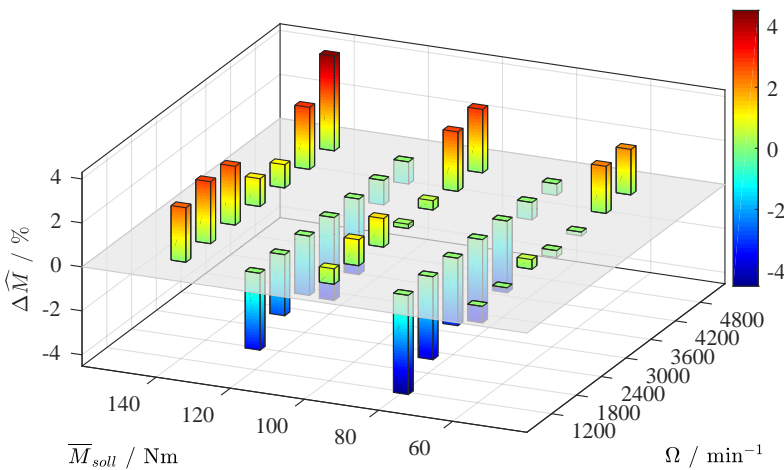


Abbildung 5.30: Auswertung für den MPC bei  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 5\% \overline{M}_{\text{soll}}$

über einem Gitterpunkt des Diagramms quantifiziert durch die Kennzahl  $\Delta \widehat{M}$  das Regelergebnis eines simulierten Szenarios. Die Darstellung basiert auf einem  $M$ - $\Omega$ -Diagramm: Die Drehzahl  $\Omega$  und der Sollmittelwert des Drehmoments  $\overline{M}_{\text{soll}}$  definieren dieses Szenario und sind auf der x- und y-Achse aufgetragen. Wie bereits erwähnt, bedeutet ein positives  $\Delta \widehat{M}$  eine verkleinerte Amplitude im Vergleich zum Sollwert. Die Null-Ebene ist als graue transparente Ebene dargestellt. Es entsteht eine maximale Abweichung von  $\pm 4,5\%$ . Auffällig ist, dass bei den Szenarien mit  $\overline{M}_{\text{soll}} \in \{80, 120\}$  Nm zu große Amplituden entstehen. Werden diese nicht betrachtet, lässt sich eine Fehlerzunahme über dem Sollmittelwert je Drehzahl feststellen. Über der Drehzahl betrachtet bildet sich kein Trend aus. Es kann festgehalten werden, dass bei den zwei höchsten Drehzahlen eine deutlichere Amplitudenverkleinerung für alle Soll Drehmomente eintritt. Für die Fälle  $\overline{M}_{\text{soll}} \in \{80, 120\}$  Nm führt die Amplitudenverkleinerung folglich zu einem geringeren absoluten Fehler.

Der zuletzt beschriebene Effekt lässt sich durch die geringere Spannung, die zum Stromaufbau verfügbar ist, erklären. Aufgrund der Drehzahl nahe der Eckfrequenz der Maschine ist ein größerer Spannungsanteil zur Kompensation der induzierten Spannung nötig und daher weniger Spannung für die Arbeitspunktverschiebung verfügbar. Dies wird am Ende dieses Unterabschnitts an einem Beispiel ausführlicher betrachtet. Das Auftreten von zu hohen Drehmomentamplituden kann nicht unmittelbar begründet werden. Der Effekt lässt keine Abhängigkeit von der Verschiebungsgeschwindigkeit des Arbeitspunktes im Zustandsraum vermuten, dies begründet sich durch das Fehlen eines drehzahlabhängigen Trends. Der Effekt hängt vom Sollmittelwert und damit von der Lage im Zustandsraum ab, somit kann die Linearisierung der Zielmenge ursächlich sein. Wieso dies während der Zunahme des Solldrehmoments im Vorzeichen wechselt, kann hier nur vermutet werden. Eine Abhängigkeit von der Lage des Optimums im Lösungsraum des MPC-Optimierungsproblems (Spannungsebene im dq-Koordinatensystem) und der Terminierung der PFGM ist eine mögliche Erklärung. Die geometrische Gestalt des Optimierungsproblems im Lösungsraum hängt von der Position des Betriebspunktes im Zustandsraum, im Eingangsraum und von der Drehzahl ab. Letzteres ist durch den Substitutionsansatz (vgl. Unterabschnitt 3.3.2) der Fall. Hinzu kommt, dass es sich um dynamisch veränderliche Vorgänge handelt, die nicht in einen stationären konstanten Punkt übergehen. Dies erschwert eine Ergründung dieses Effektes, der durch eine phänomenologische Betrachtungsweise nicht erfasst werden kann.

Bei größeren Amplituden von 10 und 15 %  $\overline{M}_{\text{soll}}$  ergeben sich die in Abbildungen 5.31 und 5.32 dargestellten Ergebnisse. Die Amplitudenfehler in den Szenarien mit einer Drehzahl von unter  $4200 \text{ min}^{-1}$  bleiben weitestgehend unverändert. Selbst die zu hohen Amplituden in den Szenarien mit  $\overline{M}_{\text{soll}} \in \{80, 120\} \text{ Nm}$  bleiben erhalten. Bei der größten Amplitude von 15 %  $\overline{M}_{\text{soll}}$  und der zweitgrößten Drehzahl  $4200 \text{ min}^{-1}$  erscheint beim höchsten Sollmittelwert  $\overline{M}_{\text{soll}} = 140 \text{ Nm}$  ein erhöhter Fehler von etwa  $\Delta \widehat{M} = 10 \%$  im Vergleich zu  $\Delta \widehat{M} = 2 \%$  bei  $\widehat{M}_{\text{soll}} = \{5, 10\} \% \overline{M}_{\text{soll}}$ . Erheblich steigt der Fehler bei der höchsten Drehzahl von  $4800 \text{ min}^{-1}$  an. Er zeigt in beiden Fällen ( $\widehat{M}_{\text{soll}} = \{15, 10\} \% \overline{M}_{\text{soll}}$ ) eine starke Zunahme mit dem Sollmittelwert  $\overline{M}_{\text{soll}}$ . Für  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 15 \% \overline{M}_{\text{soll}}$  steigt er auf maximal 48 %. Die größte negative Abweichung liegt bei  $-2 \%$ . Im Fall von  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10 \% \overline{M}_{\text{soll}}$  wird die Amplitude maximal um 30 % gedämpft und um 3 % verstärkt.

Dieses Verhalten wird im Zeitbereich sowie im Eingangs- und Zustandsraum näher betrachtet und die Regelergebnisse des MPC und des PIZR verglichen. Abbildung 5.33 zeigt Drehmomentverläufe für die Szenarien bei  $\Omega = 4800 \text{ min}^{-1}$ ,  $\overline{M}_{\text{soll}} \in \{100 \text{ Nm}, 120 \text{ Nm}, 140 \text{ Nm}\}$  und  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10 \% \overline{M}_{\text{soll}}$ . Es ist zu sehen, dass die durch den PIZR erreichte Amplitude zwar weitestgehend unabhängig vom Sollmittelwert  $\overline{M}_{\text{soll}}$  ist, für niedrigere Sollmittelwerte aber deutlich geringer ausfällt als beim MPC. Auffällig ist der entstehende Mittelwertfehler beim MPC für  $\overline{M}_{\text{soll}} = 140 \text{ Nm}$ . Die genaue Betrachtung zeigt, dass dieser Effekt mit  $\overline{M}_{\text{soll}}$  zunimmt und beim PIZR nicht vorhanden ist. Die Phasenverschiebung zum Sollwertsignal ist mit dem MPC nur marginal geringer als beim PIZR, weshalb dieser hier nicht umfänglich ausgewertet wird. Er ist für hohe Drehzahlen in Abbildung 5.33 ohnehin so groß, dass er für die Anwen-

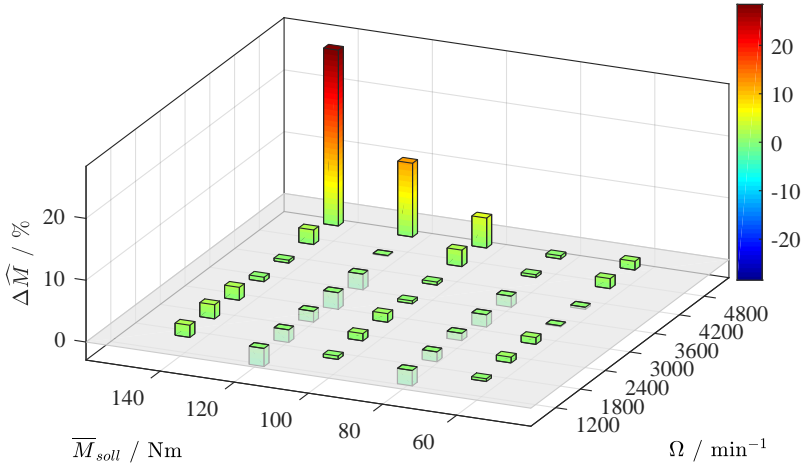


Abbildung 5.31: Auswertung für den MPC bei  $\widehat{M}_{soll} = 10\% \overline{M}_{soll}$

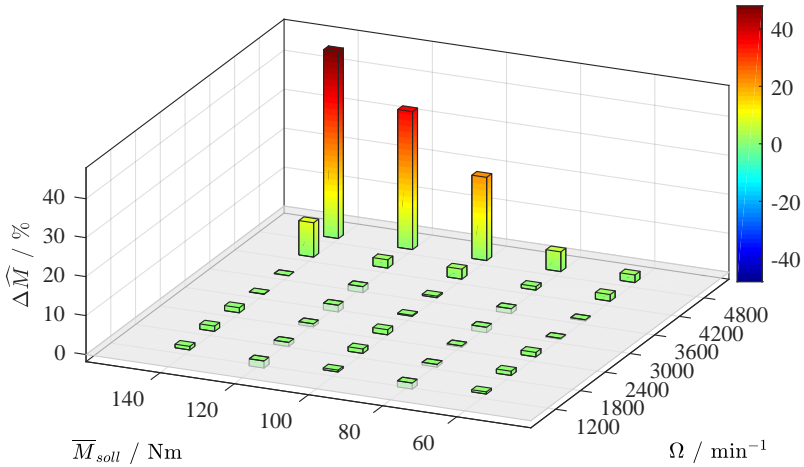
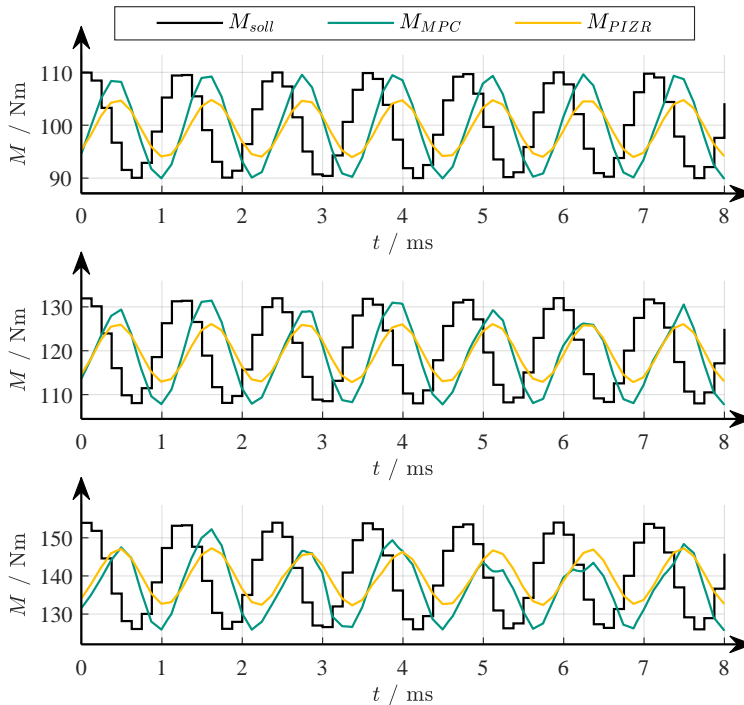


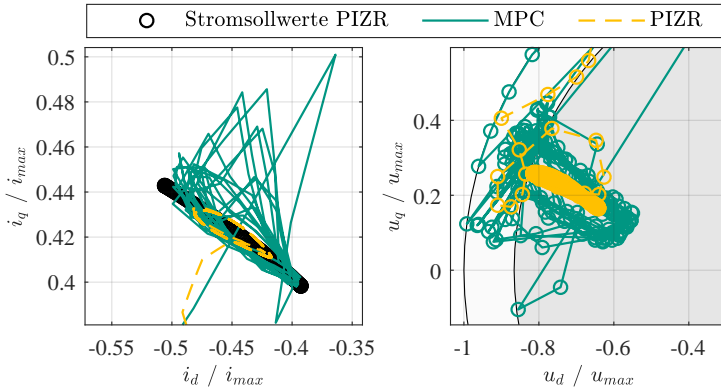
Abbildung 5.32: Auswertung für den MPC bei  $\widehat{M}_{soll} = 15\% \overline{M}_{soll}$



**Abbildung 5.33:** Drehmomentverläufe für die Szenarien bei  $\Omega = 4800 \text{ min}^{-1}$ ,  $\overline{M}_{\text{soll}} \in \{100 \text{ Nm}, 120 \text{ Nm}, 140 \text{ Nm}\}$  und  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \overline{M}_{\text{soll}}$

dung zur Schwingungskompensation für beide Ansätze durch geeignete Zusatzmaßnahmen korrigiert werden muss.

Der Grund, weshalb die Amplituden beim MPC bei der höchsten Drehzahl mit der Zunahme des Sollmittelwertes des Drehmoments stark einbricht, wird am Fall  $\overline{M}_{\text{soll}} = 120 \text{ Nm}$  und  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \overline{M}_{\text{soll}}$  aus Abbildung 5.33 betrachtet. Abbildung 5.34 zeigt die Zyklen, die im Zustands- und Eingangsraum auftreten. Im Zustandsraum sind neben den Trajektorien für die Regelung mit PIZR und mit MPC die Sollströme des PIZR eingezeichnet. Diese werden zwar für den MPC nicht verwendet, zeigen aber für konstante Sollwerte die stationär verlustoptimalen Punkte. Durch den PIZR entsteht eine zyklische Zustandstrajektorie, welche symmetrisch zur Sollwerttrajektorie liegt und eine schmalere und kürzere Laufbahn hat, als die durch den MPC entstandene. Die Zustandstrajektorie des MPC ist für die maximale negative Auslenkung des Drehmoments (rechts unten im Zustandsraum) wesentlich näher am Sollwert des PIZR. Bei Regelung durch den MPC verbreitert sich die Trajektorie deutlich und zeigt eine größere Streuung bei der Wiederholungsgenauigkeit für die Zustände bei maximaler positiver Auslenkung des Drehmoments. Die Gründe hierfür sind im Eingangsraum im rechten Teil der



**Abbildung 5.34:** Trajektorien im Zustands- und Eingangsraum bei Regelung mit MPC und PIZR für  $\Omega = 4800 \text{ min}^{-1}$ ,  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 120 \text{ Nm}$  und  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \widehat{M}_{\text{soll}}$

Abbildung zu erkennen. Der dunkelgraue Kreis beschreibt den Inkreis und der hellgraue Kreis den Umkreis des rotierenden Sechsecks, das die Spannung im dq-Koordinatensystem begrenzt. Aufgrund der höheren Amplitudendämpfung des PIZR liegt die durchlaufene Trajektorie des PIZR im Eingangsraum innerhalb des Inkreises. Somit sind keine Effekte einer Spannungsbegrenzung zu sehen. Aufgrund der besseren Spannungsausnutzung beim MPC verlässt die Spannungstrajektorie im Eingangsraum den Inkreis. Die Verbreiterung der Trajektorie im Zustandsraum wird durch das Aufweiten des Zyklus der Spannungstrajektorie ausgelöst. Der Grund für das Aufweiten liegt in der affinen Approximation der Soll Drehmomente im Zusammenspiel mit der Spannungsbegrenzung. Umso größer der Winkel zwischen der begrenzenden Seite des Spannungssechsecks und der linearen Näherung des Solldrehmoments wird umso stärker wird in der Spannungsebene die gewählte Spannung vom Regelziel abgelenkt. Ist der Winkel hingegen null, kommt es zu keiner ungünstigen Ablenkung aufgrund der linearen Näherung des Solldrehmoments. Da sich dieser Winkel mit der Drehgeschwindigkeit der Maschine ändert, erklärt sich die große Streuung bei der Wiederholungsgenauigkeit der zyklischen Trajektorie. Diese Ablenkungen sorgen für das unsymmetrische Einbrechen der Amplitude in Abbildung 5.33. Die oberen Halbwellen des Drehmoments werden nicht voll ausgefahren aufgrund der Spannungsbegrenzung, während die unteren Halbwellen davon unbeeinträchtigt bleiben.

Die Auswertung der Untersuchung der Amplitudendämpfung für den PIZR ist in den Abbildungen A.25 bis A.27 im Anhang A.7.9 zu finden. Die Untersuchung des PIZR dient der Einordnung der Ergebnisse des MPC, daher wird hier kurz darauf eingegangen, bevor der Vergleich mit dem MPC erfolgt.  $\Delta \widehat{M}$  ist stets positiv, demnach ist die entstehende Amplitude generell kleiner als gefordert. Die Amplitudenfehler des PIZR weisen keine Abhängigkeit vom Sollmittelwert auf und wachsen sehr stark und in guter Näherung linear mit der Drehzahl an. Bei Amplituden von 15 und 10%  $\widehat{M}_{\text{soll}}$  ergeben sich fast identische Fehler, diese steigen von etwa



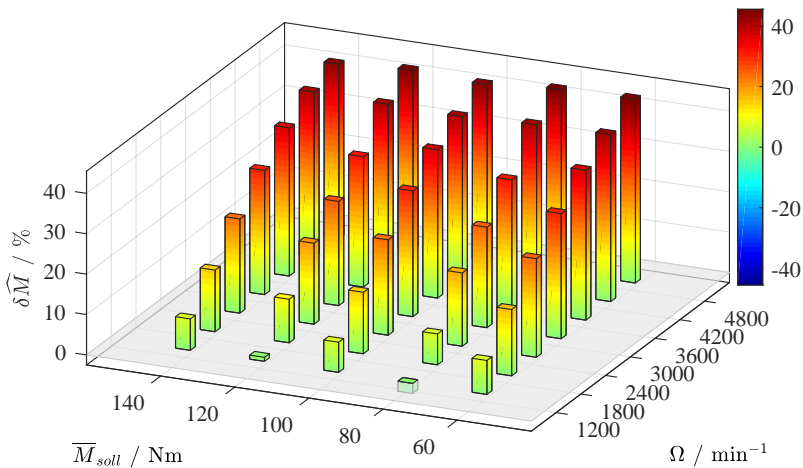


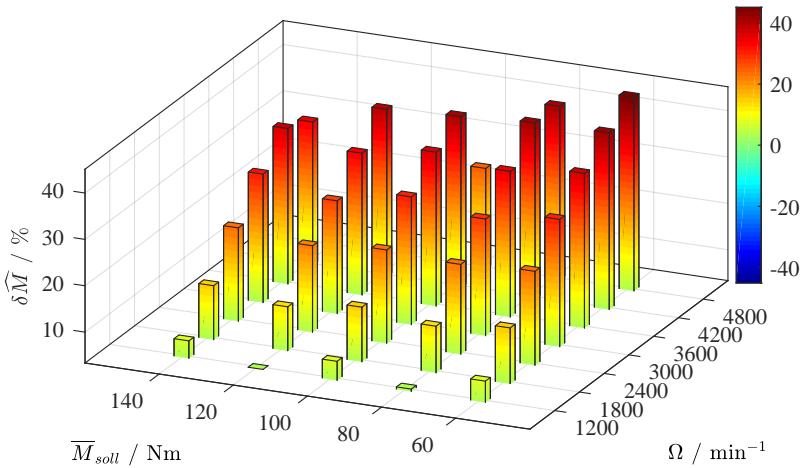
Abbildung 5.35: Vergleich des MPC und des PIZR bei  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 5\% \overline{M}_{\text{soll}}$

5 bis 45 % mit der Drehzahl an. Bei  $15\% \overline{M}_{\text{soll}}$  ist hingegen ein deutlicher Anstieg des Fehlers beim höchsten Sollmittelwert von  $\overline{M}_{\text{soll}} = 140 \text{ Nm}$  auf fast 60 % zu sehen.

Der Vergleich der beiden Regelansätze für  $\widehat{M}_{\text{soll}} \in \{5\%, 15\%\} \overline{M}_{\text{soll}}$  mit der Kenngröße  $\delta \widehat{M}$  ist in den Abbildungen 5.35 und 5.36 gezeigt. Abbildung A.28 für  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \overline{M}_{\text{soll}}$  ist im Anhang A.7.9 dargestellt. Lediglich in einem Szenario schneidet der MPC schlechter ab. Bei einer Amplitude von  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 5\% \overline{M}_{\text{soll}}$  (Abbildung 5.35) und einen Sollmittelwert von  $\overline{M}_{\text{soll}} = 80 \text{ Nm}$  ist bei der kleinsten Drehzahl  $\Omega = 1200 \text{ min}^{-1}$  der Amplitudenfehler bei einer Regelung durch den MPC um 2,5 % höher als bei der Regelung durch den PIZR. Die Kenngröße  $\delta \widehat{M}$  vergleicht die Beträge der Fehler. Daher wird darauf hingewiesen, dass bei diesen Szenarien durch den MPC negative Amplitudenfehler entstehen, dementsprechend ist die Amplitude zu groß. In allen anderen Szenarien ist der Amplitudenfehler  $\delta \widehat{M}$  durch Regelung mittels MPC geringer. Aufgrund der Drehzahlabhängigkeit des Regelergebnisses des PIZR, die durch den MPC nicht entsteht, steigt das Verbesserungspotential durch den MPC linear mit der Drehzahl bis auf maximal 45 %. Diese Regelmäßigkeit wird nur in den Szenarien ab  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 10\% \overline{M}_{\text{soll}}$  und der höchsten Drehzahl unterbrochen, zu sehen in Abbildung 5.36. Das sind die bereits beschriebenen Szenarien (vgl. Abbildung 5.33), in denen der MPC an die Spannungsbegrenzung stößt.

### Zusammenfassung und Bewertung der Regelergebnisse bei oszillierenden Sollwerten

Für den gesamten untersuchten Bereich ( $\Omega \in [1200, 4800] \text{ min}^{-1}$ ,  $\overline{M}_{\text{soll}} \in [60, 140] \text{ Nm}$ ) ergeben sich für die aufgeprägten Schwingungen im Solldrehmoment für die Amplituden



**Abbildung 5.36:** Vergleich des MPC und des PIZR bei  $\widehat{M}_{\text{soll}} = 15\% \overline{M}_{\text{soll}}$

von  $\widehat{M}_{\text{soll}} \in \{5, 10, 15\} \% \overline{M}_{\text{soll}}$  in dieser Reihenfolge die maximalen Fehler von  $\pm 4,5\%$ ,  $-3/+30\%$  und  $-2/+48\%$ . Wird die höchste Drehzahl nicht betrachtet, bleibt der Fehler stets unter  $10\%$ . Beim Vergleich zum PIZR ergeben sich erhebliche Verbesserungen. Bei Verwendung des PIZR ist eine starke Drehzahlabhängigkeit zu erkennen, daher wächst die Verbesserung durch Verwendung des MPC im Amplitudenfehler mit Ausnahme weniger Szenarien linear mit der Drehzahl von etwa 5 auf  $30\%$  an. In Bezug auf das vorgestellte Anwendungsszenario ist daher im untersuchten Betriebsbereich mit deutlichen Vorteilen bei der Schwingungskompensationen im Antriebsstrang zu rechnen.

## 5.10 Zusammenfassung

Am Anfang dieses Kapitels ist der betrachtete Antrieb vorgestellt. Es handelt sich um eine PSM mit vergrabenen Magneten und  $90\text{ kW}$  Nennleistung betrieben an einem Wechselrichter in Sechspuls-Brückenschaltung. Diese Konfiguration ist typisch für die Verwendung als Traktionsantrieb in der Elektromobilität. Ebenso ist ein PIZR aus dem Stand der Wissenschaft vorgestellt, der zur Einordnung der Regelergebnisse des MPC dient. Die Validierung des Prädiktionsmodells verdeutlicht, dass die Eulerapproximation zur Diskretisierung für hohe Drehzahlen unbrauchbar ist. Für den vollen Drehzahlbereich des Antriebs kann die Diskretisierungsordnung  $n_d = 2$  verwendet werden. Damit sind für Horizontlängen von vier Schritten in allen Betriebsbereichen Drehmomentprädiktionen mit ausreichender Genauigkeit möglich. Zur Erfassung und zum Vergleich der Regelergebnisse des MPC und des PIZR sind zunächst

angepasste Bewertungskriterien und ein Untersuchungsszenario über dem gesamten Grunddrehzahlbereich definiert.

Die Abbruchkriterien der PFGM durch eine minimale Schrittweite im Lösungsraum und im Zielraum sind physikalisch motiviert gewählt und durch Simulation als plausibel bewertet. Die maximale Iterationszahl der PFGM wirkt sich linear auf die maximale Berechnungszeit der Optimierung aus. Werte unter dem gewählten Wert von  $n_{\max i} = 20$  sind bei alleiniger Betrachtung des Drehmomentverlaufes möglich, erzielen aber inakzeptable Stromverläufe. Ebenso ist die Betrachtung der Stromverläufe bei der Wahl des Gewichtungsfaktors sinnvoll, dies führt zur Wahl  $k_v = 0,05$ . Die Verwendung der Gütefunktion ohne Gewichtungsfaktoren führt in Vorgängen mit aktiver Spannungsbegrenzung aufgrund der Abweichung zwischen dem Optimum der Gütefunktion und der Lösung des lexikographischen MOP zu inakzeptablem dynamischem Verhalten. Dies kann vermieden werden durch die Kombination aus einem arbeitspunktabhängigen Verlustgewichtungsfaktor  $k_{vk}$  zur numerischen Konditionierung und einem Verlustgewichtungsfaktor  $k_v$  zur Anpassung des dynamischen Verhaltens. Die vorgestellte Vorgehensweise zur Parametrierung berücksichtigt die besonderen Zusammenhänge, die durch die Kombination aus der PFGM, der *unvollständigen Optimierung* und der neu vorgestellten Methode entstehen. Der Parametrierungsaufwand bei echtzeitfähigen MPC-Ansätzen konzentriert sich auf den Optimierungsalgorithmus, der aber unabhängig von der konkreten Maschine ist. Für den Prädiktionshorizont von  $n_h = 1$  sind Berechnungszeiten im Bereich von 1 ms ermittelt. Sie erreichen auf dem Simulationsrechner noch nicht die Taktzeiten, die für einen simulierten Betrieb mit 8 kHz Taktung des Wechselrichters notwendig sind. Im Vergleich zur sequentiellen Lösung des LOPs durch einen *Interior Point* Algorithmus kann die vorgestellte Methode die mittlere Berechnungszeit um den Faktor 250 verringern, bei gleichzeitiger Verbesserung des Regelergebnisses. Dies ist als wichtiger Schritt in Richtung der praktischen Umsetzung von lexikographischen MPC für Systeme mit Zeitkonstanten unter 1 ms zu werten.

Im Anschluss erfolgt die Untersuchung des erzielbaren Regelergebnisses durch den MPC beginnend mit dem ungestörten Fall im Vergleich zum PIZR. Die Berechnung der stationären Sollströme für den PIZR sowie die Gütefunktionserstellung nach dem lexikographischen Schema führen zu vergleichbaren stationären Abweichungen. Die Auswertung der 90 %-Anregelzeit ergibt für große positive Sprünge vergleichbare Ergebnisse. Bei den kleinen Sprüngen ist die 90 %-Anregelzeit des MPC im Schnitt nur halb so groß wie bei den großen. Das Verhalten des Antriebs mit dem MPC ist nicht durch die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie mit dem PIZR bestimmt. So führen negative Sprünge bei Verwendung des MPC zu höheren Überschwingern als bei Verwendung des PIZR, bei positiven Sprüngen ist es umgekehrt. Über alle Sprünge betrachtet, ist die maximale Höhe des Überschwingens durch den MPC um 50 % geringer. Das Verhalten des mit dem MPC geregelten Antriebs beim Betrieb an der Stromgrenze ist gesondert betrachtet. Die Untersuchung ergab, dass für konstante Solldrehmomente eine schnelle Variation der Stromgrenze möglich ist. Bei gleichzeitiger Variation des Solldrehmoments ist es

erforderlich dieses auf erreichbare Werte unter der aktuellen Strombegrenzung zu beschränken.

Die Untersuchung zum Verhalten des mit dem MPC geregelten Antriebs bei typischen Parameterfehlern in Statorwiderstand und den Flusskennfeldern brachte folgende Erkenntnisse. Die 90 %-Anregelzeit unterliegt für beide Fälle nur unwesentlichen Schwankungen. Bei fehlerhaften Widerstandswerten gilt dies ebenso für Schwankungen in der Höhe des Überschwingers. Für das stationäre Verhalten ergibt sich pro 10 % Widerstandserhöhung eine stationäre Drehmomentabsenkung von etwa 1 Nm. Die stationäre Abweichung durch Fehler im d-Flusskennfeld ist vernachlässigbar und für das q-Flusskennfeld beträgt die Abweichung maximal 8 Nm, was insgesamt als kritischste Auswirkung anzusehen ist. Die Überschwinger schwanken um maximal  $\pm 6\%$ . Es zeigt sich, dass die stationäre Abweichung im Drehmoment vorhersagbaren Veränderungen unterliegt, die über die Ausgangsgleichung mit den Parameterfehlern in Zusammenhang gebracht werden können. Die Kenngrößen 90 %-Anregelzeit und Höhe des Überschwingers lassen keine Muster erkennen, da diese während des dynamischen Vorgangs deutlich komplexeren Abhängigkeiten unterliegen. Dies kann als großer Unterschied zu PI-Ansätzen bewertet werden, bei denen für alle drei Kenngrößen klare Zusammenhänge existieren.

Dieser Zusammenhang lässt sich auf die Ergebnisse bei Messfehlern im Rotorwinkel übertragen. Durch Regelung mittels MPC verändern sich die Drehmomentverläufe in ihrem grundlegenden Verlauf und es kommt zu Bewegungen entgegen dem Sprungziel. Die Sensitivität gegenüber einer fehlerhaften Rotorwinkelmessung ist damit wesentlich größer als beim PIZR. Für Fehler in der Strommessung jeder Phase entsteht höchstens eine stationäre mittlere Abweichung im Drehmoment von etwa 1,5 %, jedoch nur im Betrieb bei hohen Strömen. Ansonsten sind die Auswirkungen dieses Fehlers als vernachlässigbar einzustufen. Bei den 90 %-Anregelzeiten und dem Überschwingungsverhalten treten keine wesentlichen Auswirkungen auf. Wird dem Strommesssignal ein Rauschen überlagert, ergeben sich für PIZR und MPC vergleichbare Ergebnisse. Beide Regelkreise behalten ihre grundlegende Dynamik bei und somit bleibt der mittels MPC geregelte Antrieb insbesondere für kleine Sprünge wesentlich schneller.

Die Untersuchung bei oszillierenden Sollwerten für das Drehmoment in Abschnitt 5.9 zeigt im untersuchten Betriebsbereich deutliche Vorteile bei der Schwingungskompensation im Antriebsstrang bei Verwendung des MPC im Vergleich zum PIZR. Im Gegensatz zum PIZR wächst die Dämpfung der erreichbaren Amplitude nicht linear mit der Drehzahl an. Daher wächst das Verbesserungspotential in der Amplitudenerreichung mit Ausnahme weniger Szenarien bei Steigerung der Drehzahl von etwa 5 auf 30 % an.

## 6 Resümee

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, eine Methode zu entwerfen, welche die Regelziele Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung in einem MPC für eine PSM simultan optimiert. Dies ist in der Praxis von Antriebssystemen relevant, wenn sie in Anwendungen mit dem Ziel der Drehmomenterzeugung eingesetzt werden. Sollwerte für das Drehmoment werden konventionell durch verschiedene verlustminimierende Betriebsstrategien und Kennfelder in elektrische Sollgrößen überführt. Dieses interdependente und maschinenabhängige Vorgehen vernachlässigt im Betrieb dynamisches Optimierungspotential hinsichtlich des mechanischen Ziels und kann vollständig entfallen, wenn der MPC den elektrischen Betriebspunkt bestimmt. Die Analyse des Stands der Wissenschaft zeigt, dass hierfür bisher keine Ansätze für MPC mit Modulator existieren. Die vorhandenen Ansätze lassen sich in zwei Ebenen einordnen: Ansätze der unteren Ebene, die das Regelziel durch Sollströme beziehungsweise -flüsse in der Gütefunktion beschreiben und Ansätze einer höheren Ebene, die einen Sollwert für die Drehzahl verwenden. Ansätze zur direkten Berechnung der Stellgrößen ausschließlich mit einem Soll-drehmoment fehlen jedoch. Ansätze der höheren Ebene haben zum Nachteil, dass zur Erreichung der Echtzeitfähigkeit die Modellierung des Antriebs so stark vereinfacht werden muss, dass die Potentiale der Methode nicht ausgeschöpft werden können. Daraus ergeben sich zwei zentrale Fragestellungen. Zum einen, wie kann ein Sollwert für das Drehmoment in der Gütefunktion in einem MPC methodisch integriert werden und zum anderen, wie gut kann diese Methode an die Anforderungen im Antriebsstrang angepasst werden? Diese beiden Aspekte sind im Folgenden aufgegriffen.

- Der zentrale Ansatz zur direkten Drehmomentvorgabe in der Gütefunktion ist eine lexikographische Optimierung, dabei findet eine strenge Priorisierung der Regelziele statt. Dies ermöglicht eine widerspruchsfreie Beschreibung der beiden gegensätzlichen Regelziele in der Gütefunktion. Um diesen Ansatz für echtzeitfähige Systeme tauglich zu machen ist ein Verfahren aufgezeigt, welches den üblichen und sehr rechenzeitintensiven Lösungsansatz für lexikographische MOP durch kaskadiertes Lösen von zwei Optimierungsproblemen umgeht. Das Verfahren ist auf eine beliebige Anzahl an Gütefunktionen verallgemeinert. Jedoch müssen diese bestimmten Strukturanforderungen genügen damit das Minimum dieser Gütefunktion der Lösung des lexikographischen MOP entspricht.

Die Beschreibung des Regelziels im MPC durch ein lexikographisches MOP ist eine neue Herangehensweise in der Drehmomentregelung von Antrieben und ermöglicht deren Lösung frei von Kompromissen. Es werden nur Freiheitsgrade zur Verlustminimierung

genutzt, welche nicht die Drehmomenterreicherung verschlechtern. Der vorgestellte Ansatz führt für inaktive Beschränkungen zu keiner Verschiebung des Optimums der Gütefunktion durch Variation der Gewichtungsfaktoren in der Gütefunktion. Dieser Freiheitsgrad wird genutzt, um eine Vorkonditionierung vorzunehmen, welche die Eignung der Gütefunktion für die Optimierung mittels gradientenbasierter Verfahren verbessert. Die Gütefunktionserstellung nach dem lexikographischen Schema führt zu den gleichen stationären Zuständen wie die Zuordnungstabellen von Strömen zu Drehmomenten nach herkömmlichen Verfahren. Dies zeigt die Funktionalität der lexikographischen Transformation für diese Anwendung. Obwohl die Transformation nur für aktive Begrenzungen das lexikographische Optimum exakt erreicht, ist ein dynamischer Betrieb mit aktiven Begrenzungen möglich. Um das Verhalten in diesem Fall zu verbessern, ist ein zusätzlicher Gewichtungsfaktor eingesetzt, der den stationären Zustand nicht beeinflusst. Des Weiteren wird die Zuordnung von Soll Drehmomenten zu Sollströmen inhärent durch den MPC übernommen und somit entfällt die Notwendigkeit für eine Zuordnungstabelle für diese Werte vollständig. Daher ist der MPC in der Lage unmittelbar Aktualisierungen von Parametern des Antriebs einzubinden, falls diese durch Identifikation vorliegen.

Der vorgeschlagene Regler ist als MPC mit Modulator und primaler gradientenbasierter Optimierung nach der *Projected Fast Gradient Method* zu klassifizieren. In der Klassifizierung anhand des Regelziels eröffnet er in der Klasse von MPC Verfahren zur optimalen Spannungsberechnung eine neue Unterklasse mit den Regelzielen Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung. Im Gegensatz zu Verfahren im Stand der Wissenschaft werden keine Sollwerte für die Ströme in der Gütefunktion benötigt.

- Der zweite Aspekt ist die Anpassung an die gesteigerten Anforderungen an eine Antriebsregelung in der Elektromobilität. Die Analyse in Abschnitt 1.4 *Stand der Wissenschaft* führt folgende Aspekte der Modellierungsgenauigkeit ein, welche der Ausschöpfung der Potential von MPC-Ansätzen im Wege stehen: Vernachlässigung von Sättigung und Kreuzverkopplung sowie Approximation der Spannungs- und Strombegrenzung. Der vorgestellte MPC bietet die Möglichkeit der exakten Spannungsbegrenzung durch die Verwendung der *Projected Fast Gradient Method* zur Optimierung der Stellgrößen. Keine der bekannten Veröffentlichungen aus Abschnitt 1.4 *Stand der Wissenschaft* ist bisher auf die Implementierung von zeitvarianten Strombegrenzungen eingegangen. Die Methode der vorliegenden Arbeit kann zusätzlich eine Zustandsbegrenzung berücksichtigen, welche die Einhaltung der Betriebsgrenzen sicherstellt. Dieser Beitrag ist von allgemeinem Charakter. Er kann unter der Voraussetzung von einfachen Projektionsoperatoren in die Zustands- und Eingangsbeschränkung sowie in den Schnitt ihrer Hüllkurven in anderen Anwendungen eingesetzt werden.

Das nichtlineare Verhalten der Maschinen wird durch eine Linearisierung im aktuellen Arbeitspunkt des Antriebs erfasst. Dies hat zwei Vorteile: Die Gütefunktionen sind nachweislich konvex und weisen die notwendige Struktur für die lexikographische Optimierung nach der vorgeschlagenen Methode auf. Andererseits bringt diese affine Mo-

dellierung für die Ausgangsgleichung Nachteile mit sich, weshalb eine Methode zur Konvexifizierung von Gütefunktionen mit hyperbolischer Zielzustandsmenge für gradientenbasierte Optimierungsverfahren dargelegt ist. Durch die Linearisierung basiert die Erstellung des Prädiktionsmodells für den MPC direkt auf den Flusskennfeldern der Maschinen, die den Stand der Wissenschaft für deren Modellierung darstellen. Der Regler berücksichtigt somit inhärent Effekte wie Sättigung, Reluktanz und Kreuzverkopplung oder allgemeiner formuliert, alle Effekte, die sich durch zweidimensionale Flusskennfelder abbilden lassen. Durch die Analyse des Prädiktionsmodells in kritischen Szenarien über vier Horizontschritte ist die Tauglichkeit des vorgestellten Modellierungsansatzes verdeutlicht.

Somit konnte die im Stand der Wissenschaft identifizierte Lücke in dieser Arbeit methodisch und in der Perspektive auch praktisch geschlossen werden. Die Untersuchung des vorgeschlagenen Ansatzes auf seine Tauglichkeit in der Praxis ist durch die Anwendung auf einen Traktionsantrieb der Elektromobilität untersucht. Dazu erfolgt die Betrachtung einer PSM mit vergrabenen Magneten und 90 kW Nennleistung in Verbindung mit einem Wechselrichter in Sechspuls-Brückenschaltung.

Die vorgestellte Parametrierung der Optimierungsmethode ist aufgrund der physikalischen Motivation und der detaillierten Beschreibung des Vorgehens eine Neuerung. Sie berücksichtigt die Zusammenhänge bei der Kombination von *Projected Fast Gradient Method*, *unvollständiger Optimierung* und lexikographischer Optimierung durch Transformation. Der Parametrierungsaufwand verschiebt sich im Vergleich zu PI-Ansätzen vom Regler auf den Optimierungsalgorithmus, dieser ist unabhängiger von der konkreten Maschinenparametrierung. Mit dem eingestellten Prädiktionshorizont von eins werden Berechnungszeiten im Bereich von 1 ms erzielt. Somit kann die mittlere Berechnungszeit im Vergleich zur konventionellen, sequentiellen Lösung des lexikographischen Optimierungsproblems um den Faktor 250 verringert und gleichzeitig das Reglerergebnis verbessert werden.

Insbesondere für kleine Sprünge kann der MPC den Drehmomentanstieg des Antriebs beschleunigen. Bei den kleineren Sprüngen ist die 90 %-Anregelzeit durch Regelung mit dem MPC im Schnitt nur halb so groß wie bei Verwendung des PIZR.

Das Reglerergebnis des Antriebs ist durch den Einsatz des MPC im Vergleich zum PIZR weniger durch kontinuierliche Gesetzmäßigkeiten bestimmt. Insbesondere ist hier die Reaktion auf Fehler im Rotorwinkel zu nennen, was bei Nutzung des MPC zu negativen Auswirkungen führt, die kritischer einzustufen sind als bei Nutzung des PIZR. Im Gegensatz dazu steht das Ergebnis der Untersuchung der Sensitivität auf Messfehler. Sie zeigt, dass die Auswirkungen von Rauschen im Strommesssignal nicht stärker sind als bei Nutzung des PIZR. Dadurch wird widerlegt, dass der Ansatz aufgrund hoher Spannungsausnutzung und Dynamik im Vergleich zu klassischen Ansätzen stärker auf Rauschen in den Messsignalen reagiert.

Die abschließende Untersuchung betrachtet die Kompensation von Drehmomentschwingungen im Getriebe mithilfe der Traktionsmaschine. In diesem Anwendungsfall kommen die Vorteile des MPC durch dessen maximale Stellgrößenausnutzung voll zum Tragen. Im Gegensatz zu einem klassischen Regler wird Drehmomentdynamik nicht vom aktuellen Arbeitspunkt

beeinflusst und somit stehen deutlich höhere Amplituden zur Schwingungskompensation zur Verfügung.

Insgesamt wird festgestellt, dass die vorgeschlagene Methode mit der lexikographischen Optimierung eine überlegene Beschreibung der Regelziele für die Drehmomentregelung der PSM bei gleichzeitiger Verlustberücksichtigung ist. Die große Rechenzeiteinsparung durch die vorgestellte Lösung des lexikographischen Optimierungsproblems mittels Transformation und projizierendem Gradientenverfahren um den Faktor 250, verschiebt die Grenze deutlich in die Größenordnung einer echtzeitfähigen Implementierung für die Elektromobilität. Das Verhalten des Verfahrens hinsichtlich Mess- und Parameterfehlern ist unkritisch und vergleichbar mit konventionellen Ansätzen. Die Untersuchung zur Schwingungskompensation belegt, dass das Verfahren aufgrund der maximalen Ausnutzung bei gleichzeitiger Sicherstellung der Einhaltung der physikalischen Begrenzungen zusätzliche Potentiale für Anwendungen mit schnellen dynamischen Vorgängen im Grenzbereich entfalten kann.



# A Anhang

## A.1 Ergänzende Erläuterungen zu den Optimierungsverfahren im Stand der Wissenschaft

Die folgenden Absätze enthalten eine detaillierte Beschreibung der Optimierungsverfahren, welche in den Veröffentlichungen in der tabellarischen Übersicht Tabelle 1.1 aufgelistet sind.

Die Berechnung des EMPC basiert in allen Ansätzen auf der *Multi-Parametric Toolbox* (MPT) für *MATLAB* ([KGBM04]), meist in Verbindung mit der Erweiterung *YALMIP* ([Lof04]). In einem vorbereitenden Schritt wird für einen Startzustand des Systems das MPC-Optimierungsproblem gelöst. Das Systemmodell und die Gütefunktion werden so gewählt, dass die optimale Stellgröße durch eine Zustandsrückführung ausgedrückt werden kann. Es wird nicht wie bei MPC üblich nur die Stellgröße des nächsten Taktschritts berechnet, sondern eine affine Zustandsrückführung. Der Vorteil dabei ist, dass diese affine Zustandsrückführung nicht nur genau für diesen Startzustand das MPC-Problem löst, sondern für eine Untermenge des Zustandsraums. Diese Untermenge ist ebenfalls durch affine Ungleichungen beschrieben. In diesem ersten Schritt werden alle Untermengen bestimmt, sodass diese den Zustandsraum abdecken. Das Ergebnis dieses vorbereitenden Schrittes ist demnach eine Unterteilung des Zustandsraums in Untermengen und je eine zugeordnete affine Zustandsrückführung. Zur Laufzeit des MPC Reglers besteht der Berechnungsaufwand in der Identifikation der Untermenge, in welcher sich der Startzustand befindet. Dann wird die zugehörige affine Zustandsrückführung so lange als Regelgesetz verwendet, wie sich der Zustand in diesem Unterraum bewegt. Limitierender Faktor im Bezug auf die Berechnungszeit für den MPC ist daher die Anzahl der Bereiche, in die der Zustandsraum eingeteilt wird.

In [CWR13a] wird ein Optimierungsalgorithmus aus [Wan09] verwendet. Dies ist ein *Primal-Dual*-Verfahren (PD) namens *Hildreths Quadratic Programming Procedure* ([Lue69]). Berechnet ein Algorithmus die Lösung durch die Betrachtung einer Kombination aus dem dualen Optimierungsproblem mit der Lagrange-Funktion und dem primalen Optimierungsproblem mit der ursprünglichen Gütefunktion, wird dieser als *Primal-Dual* bezeichnet. Als duale Optimierungsvariable werden die Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet, die mit der Lagrange-Funktion eingeführt werden, um die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems direkt in die zu optimierende Funktion zu integrieren. *Hildreths Quadratic Programming Procedure* löst das duale Problem iterativ für jedes Element der dualen Variable unabhängig und wiederholt dies für alle Elemente mehrfach ([Lue69]). Daher stellt das Verfahren eine *Grid Search* im dualen

Lösungsraum dar. In [CWR13a] werden die drehzahlabhängigen Terme des Maschinenmodells als Störung betrachtet.

In [EGG17] und [EG18b] verwendet Englert die Optimierung der *Augmented Lagrangian* (AL) nach [BT89]. Optimierungsalgorithmen basierend auf der AL sind ebenfalls unter dem Namen *Method of Multipliers* bekannt ([NW06, S. 498]) und zählen zu den *Primal-Dual*-Verfahren. In der früheren Veröffentlichung [EGG17] wird die *Augmented Lagrangian* (AL) zur Spannungsbegrenzung genutzt und mit einer weichen Zustandsbegrenzung in der Gütefunktion kombiniert. Die Lösung des dualen Problems erfolgt gradientenbasiert. In einer späteren Veröffentlichung [EG18b] integriert Englert die Spannungsbegrenzung auf den Inkreis in die Lösung des dualen Problems durch *Fixed-Point-Iteration* (FPI). Das erlaubt die Integration der Zustandsbegrenzung als harte Nebenbedingung über die AL.

Der MPC in [PBD13] verwendet für die Optimierung ein projizierendes Gradientenabstiegsverfahren nach Nesterov ([Nes83]) für das primale Optimierungsproblem. Der Gradient wird in jeder Iteration des Verfahrens in einem speziellen Punkt ausgewertet, sodass das Verfahren schneller konvergiert als ein konventioneller Gradientenabstieg (detaillierte Darstellung in Abschnitt 4.1). Aufgrund dieser Tatsache wird das Verfahren in anderer Literatur als *Projected Fast Gradient Method* (PFGM) oder *Accelerated Gradient Method* bezeichnet. Innerhalb der PFGM verwendet Preindl zur Berücksichtigung der Spannungsbegrenzung eine Projektion in den Inkreis des rotierenden Sechsecks.

In [TCFB19] ist es gelungen mit einer unter der GNU-Lizenz veröffentlichten Implementierung eines *Active Set* Optimierungsalgorithmus (*qpOASES*, [KBF<sup>+</sup>15, FKP<sup>+</sup>14]) eine exakte Spannungsbegrenzung mit einem rotierenden Sechseck zu implementieren. Dort werden die drehzahlabhängigen Terme ebenfalls als Störung betrachtet und von einem Beobachter geschätzt.

[CL13] verwendet die *Double Description Method* ([MRTT53]) in der Implementierung aus [FP95], die ein Teil der MPT3 Toolbox ([HKJM13a]) für *MATLAB* ist. Die *Double Description Method* (DDM) ist ein Algorithmus zur Berechnung aller Ecken eines  $n$ -Polytops und kann daher keiner der typischen Klassen von Optimierungsverfahren zugeordnet werden. Da die Lösung eines *Linearen Programms* immer mindestens in einer Ecke des begrenzenden Polytops liegt, kann DDM ebenfalls für die Lösung linearer Optimierungsprobleme eingesetzt werden. Um diesen Algorithmus einsetzen zu können, muss die Gütefunktion in eine lineare Funktion transformiert und die Beschränkung durch zeitinvariante Polytope approximiert werden. Damit dies möglich ist, geht der Ansatz nicht wie üblich von einer quadratischen Bestrafung der Abweichung vom Regelziel aus, sondern wendet die Supremumsnorm auf die Abweichung an.

## A.2 Verwendete Definitionen

### A.2.1 Definition des mehrdimensionalen Taylorpolynoms

**Definition A.1 (Mehrdimensionales Taylorpolynom  $\mathcal{T}$  der Ordnung  $\nu$ )**

Nach einer Verallgemeinerung des in [AHK<sup>+</sup>08, S.798] angegebenen Satzes lautet das mehrdimensionale Taylorpolynom für eine Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{T}(f, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \nu) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \langle (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \nabla \rangle^i f \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} + R. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  der Entwicklungspunkt,  $\nu \in \mathbb{N}$  die Ordnung und  $R$  das Restglied.

### A.2.2 Definition einer konvexen Funktion

**Definition A.2 (Konvexe Funktion (vgl. [BV04, S. 67]))**

Eine Funktion  $J : \mathbb{R}^{n_L} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex, falls ihre Definitionsmenge eine konvexe Menge ist und wenn für alle  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  im Definitionsbereich und  $\lambda$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$  gilt

$$J(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda J(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) J(\mathbf{x}_2).$$

### A.2.3 Definition einer streng konvexen Funktion

**Definition A.3 (Streng Konvexe Funktion (vgl. [BV04, S. 67]))**

Eine Funktion  $J : \mathbb{R}^{n_L} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng konvex, falls in Definition A.2 strenge Ungleichheit für alle  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$  im Definitionsbereich und  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  gilt:

$$J(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) < \lambda J(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) J(\mathbf{x}_2).$$

### A.2.4 Definition der Komplement-Menge

**Definition A.4 (Komplementmenge  $\mathcal{A}^c$  einer Menge  $\mathcal{A}$ )**

$$\mathcal{A}^c := \{x \mid x \notin \mathcal{A}\}$$

### A.2.5 Definition des Inneren einer Menge

**Definition A.5 (Innere  $\text{int}(\mathcal{A})$  einer Menge  $\mathcal{A}$  ([Roc70, S. 44]))**

$$\text{int}(\mathcal{A}) := \{x \mid \exists \epsilon > 0, x + \epsilon \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  die euklidische Einheitskugel ist:  $\mathcal{B} := \{x \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ .

### A.2.6 Definition der konvexen Hülle einer Menge

**Definition A.6 (Konvexe Hülle  $\text{conv}(\mathcal{A})$  einer Menge  $\mathcal{A}$  ([BV04, S. 24]))**

Die konvexe Hülle  $\text{conv}(\mathcal{A})$  der Menge  $\mathcal{A}$  besteht aus der Vereinigung aller konvexen Kombinationen der Punkte in  $\mathcal{A}$ :

$$\text{conv}(\mathcal{A}) := \{\kappa_1 x_1 + \dots + \kappa_k x_k \mid x_i \in \mathcal{A}, \kappa_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \kappa_1 + \dots + \kappa_k = 1\}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  die euklidische Einheitskugel ist:  $\mathcal{B} := \{x \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ .

### A.2.7 Definition des Randes einer Menge

**Definition A.7 (Rand  $\partial(\mathcal{A})$  einer Menge  $\mathcal{A}$  (vgl. [BV04, S. 638]))**

$$\partial(\mathcal{A}) := \text{cl}(\mathcal{A}) \setminus \text{int}(\mathcal{A})$$

### A.2.8 Definition der abgeschlossenen Hülle einer Menge

**Definition A.8 (Abgeschlossene Hülle  $\text{cl}(\mathcal{A})$  einer Menge  $\mathcal{A}$  ([BV04, S. 638]))**

Die abgeschlossene Hülle  $\text{cl}(\mathcal{A})$  der Menge  $\mathcal{A}$  im  $\mathbb{R}^n$  ist das Komplement des Inneren des Komplements der Menge  $\mathcal{A}$ :

$$\text{cl}(\mathcal{A}) := \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}).$$

## A.3 Kleinste konvexe Erweiterung einer konvexen Funktion

In [DI92] ist eine explizite Gleichung vorgestellt, um die kleinste mögliche konvexe Erweiterung einer Funktion zu bestimmen. Ausgangspunkt ist eine konvexe Funktion, deren Definitionsmenge  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist. Ziel ist eine Erweiterung für diese Funktion außerhalb von  $\mathcal{A}$  zu finden. Eine Erweiterung von einer Funktion  $f$  nimmt innerhalb von  $\mathcal{A}$  exakt die gleichen Werte an wie  $f$  und hat einen größeren Definitionsbereich als  $\mathcal{A}$ , auf dem sie ebenfalls konvex ist. Sie besitzt die kleinsten möglichen Funktionswerte, sodass diese Forderungen erfüllt sind. Der Hauptsatz in [DI92] bezieht sich auf nicht differenzierbare Funktionen in nicht topologischen Räumen. Der folgende Satz ist daher nicht direkt aus [DI92] übernommen, sondern für den hier vorliegenden Fall von stetig differenzierbaren Funktionen in einem euklidischen Vektorraum angepasst.

**Satz A.1 (Kleinste konvexe Erweiterung KKE (vgl. [DI92, Theorem 1 und 2]))**

Gegeben ist eine stetig differenzierbare konvexe Funktion  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer nichtleeren konvexen Definitionsmenge  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Die kleinste konvexe Erweiterung (KKE) von  $f$  ist die stetige Funktion  $E(f) f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  gegeben durch

$$E(f)(\mathbf{x}) := \sup \left\{ f(\mathbf{y}) + \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \Big| \mathbf{y} \in \text{int}(\mathcal{A}) \right\}, \quad (\text{A.2})$$

wobei mit  $\text{int}(\mathcal{A})$  das Innere der Menge  $\mathcal{A}$  nach Definition A.5 im Anhang A.2.5 bezeichnet ist.

Der allgemeine Fall ist in [DI92] bewiesen, weshalb hier nur auf die Abänderungen eingegangen wird. Dort ist eine unterhalbstetige konvexe Funktion  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer nichtleeren konvexen Definitionsmenge  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  vorausgesetzt. Die Funktion  $f$  ist hier als differenzierbar angenommen, daraus folgt ihre Stetigkeit, die ihre Unterhalbstetigkeit impliziert. In [DI92]

wird anstelle der Richtungsableitung der Subgradient verwendet. Ist die Funktion  $f$  differenzierbar, ist diese Verallgemeinerung nicht notwendig. Dann entspricht der Subgradient der Richtungsableitung. Somit ist gezeigt, dass die aufgeführten Annahmen unmittelbar die Voraussetzung in [DI92] erfüllen und der dortige Beweis hier ebenfalls gültig ist.

Anschaulich interpretiert bedeutet Satz A.1, dass in einem gegebenen Punkt  $\boldsymbol{x}$  alle Stützebenen der gegebenen Funktion  $f(\boldsymbol{y})$  verglichen werden. Diejenige mit dem höchsten Wert in  $\boldsymbol{x}$  bestimmt den Funktionswert von  $E(f)$  in diesem Punkt. Dieser Wert ist gleichzeitig der niedrigste, der für die KKE erlaubt ist. Jeder Punkt, der tiefer liegt, führt nicht zu einer konvexen Funktion  $E(f)$ . Ein Punkt unterhalb der höchsten Stützebene würde die Definition der Konvexität (vgl. Definition A.2 im Anhang A.2.2) verletzen.

Des Weiteren folgt laut Theorem 2 in [DI92] aus der Stetigkeit von  $f$  die Stetigkeit deren KKE  $E(f)$ . Ziel ist eine für die Optimierung mit Gradientenabstiegsverfahren nutzbare Funktion zu erhalten. Darum ist es ebenfalls notwendig, dass die KKE stetig differenzierbar ist und endliche Funktionswerte annimmt. Dies ist in [DI92] nicht sichergestellt, da dort Erweiterungen entstehen können, welche innerhalb der Definitionsmenge  $\mathbb{R}^n$  einen unendlichen Funktionswert annehmen können, weshalb in Satz A.1 die Zielmenge mit  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  angegeben ist. Eine wichtige Erkenntnis für diese Voraussetzung liefert der folgenden Satz aus [Yan14].

**Satz A.2 (Endliche konvexe Erweiterung ([Yan14, Theorem 4.1]))**

*Eine konvexe Funktion auf einem beschränkten konvexen Unterraum kann zu einer endlichen konvexen Funktion  $E(f) f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  über dem gesamten Raum erweitert werden genau dann, wenn sie Lipschitz-stetig ist.*

## A.4 Transformation auf Hyperbelnormalform

Die in Unterabschnitt 3.4.3 verwendete Transformation auf Hyperbelnormalform gliedert sich in zwei Schritte:

1. Rotation um den Winkel  $\gamma$  durch die Drehmatrix

$$\boldsymbol{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \text{ mit } \gamma = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{c_{q1,2}}{c_{q1,1} - c_{q2,2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

ergibt:

$$\Gamma_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \xrightarrow{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}_\gamma \bar{\boldsymbol{u}}} \Gamma_{\bar{\boldsymbol{u}}}(\bar{\boldsymbol{u}}) =: \bar{\boldsymbol{u}}^\top \bar{\boldsymbol{C}}_q \bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{c}}_1^\top \bar{\boldsymbol{u}} + \bar{c}_k. \quad (\text{A.4})$$

2. Translation um den Vektor  $\mathbf{t}_{\text{Tr}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ 2\tilde{c}_{q1,1} \\ \tilde{c}_1 \\ 2\tilde{c}_{q2,2} \end{bmatrix}$  ergibt:

$$\Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{t}_{\text{Tr}}} \Gamma_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}) =: \tilde{\mathbf{u}}^\top \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{c}}_1^\top \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{c}_k, \quad (\text{A.5})$$

wobei sich aufgrund der Normalform die Elemente  $\tilde{\mathbf{C}}_q$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_1$  und  $\tilde{c}_k$  vereinfachen zu:

$$\tilde{\mathbf{C}}_q = \mathbf{R}_\gamma^\top \mathbf{C}_q \mathbf{R}_\gamma \text{ mit } \tilde{\mathbf{C}}_q = \tilde{\mathbf{C}}_q^\top, \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_1 = \mathbf{0}, \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{c}_k = \mathbf{t}_{\text{Tr}}^\top \tilde{\mathbf{C}}_q \mathbf{t}_{\text{Tr}} - \mathbf{c}_1^\top \mathbf{R}_\gamma^\top \mathbf{t}_{\text{Tr}} + c_k - \mathbf{y}_{\text{soll}}(k). \quad (\text{A.8})$$

Falls das Ergebnis der obigen Schritte nicht eine Hyperbel mit den Scheitelpunkten auf der  $\tilde{u}_1$ -Achse ergibt, muss diese noch um  $90^\circ$  gedreht werden, damit die in Unterabschnitt 3.4.3 vorausgesetzte Ausrichtung erreicht wird.

## A.5 Voraussetzung für die stabile Einregelung von Arbeitspunkten bei PSM

Zur Untersuchung eines nichtlinearen beschränkten MPC auf Stabilität existiert eine Vielzahl von Methoden. Dabei gibt es im Wesentlichen zwei Strömungen: Die Wahl der Gütefunktion als Lyapunov-Funktion oder durch Garantie einer monotonen Abnahme der Gütefunktion über der Zeit ([MRRS00]). Sobald das MPC-Optimierungsproblem Beschränkungen unterliegt, ist die Verwendung von Lyapunov-Funktionen in der Gütefunktion nicht ausreichend und der Endzustand des Prädiktionshorizonts muss zusätzlich beschränkt werden ([RM09, Kap. 2.4.3]). Hierfür ist der Begriff der invarianten Mengen zentral. Für geregelte Systeme wird das *Control Invariant Set* betrachtet, das wie folgt definiert ist.

### Definition A.9 (Control Invariant Set $\mathcal{P}$ ([RM09, Definition 2.10]))

Eine Menge  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  ist ein Control Invariant Set für das System  $\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}$ , wenn für alle  $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{P}$  eine  $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}$  existiert, sodass  $\mathbf{f}_x(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \in \mathcal{P}$ .

Die Menge  $\mathcal{P}$  beantwortet die Frage ([BBM17, S. 192]): Für welche initialen Zustände existiert ein Regler, sodass die Systembegrenzungen niemals verletzt werden? Diese Aussage bezieht sich auf einen Regler unter der Stellgrößenbegrenzung  $\mathcal{U}$  aber ohne Zustandsbegrenzung  $\mathcal{X}$ . Soll diese zusätzlich berücksichtigt werden, muss zusätzlich  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$  gelten. Das *Control Invariant Set* liefert hier eine wichtige Erkenntnis beim Vergleich mit der Theorie zur Stabilität von

PSM. Für PSM stellt der Betrieb bei hohen Drehzahlen an der Spannungsgrenze die Stabilitätsgrenze dar. Dies ist in der klassischen Antriebsregelung bekannt und wird durch verschiedene Zusatzmaßnahmen behandelt (z. B. [Sch09, Kap. 16.7.6], [Gem15, Kap. 5.2]). Ab der Eckdrehzahl ist die in der Maschine entstehende rotatorisch induzierte Spannung so groß, dass die volle Spannung des Stellglieds für die Erhaltung des Betriebspunktes benötigt wird. Im Zustandsraum verringert sich der stabile Betriebsbereich. Dieser ist äquivalent zum *Control Invariant Set*  $\mathcal{P}$ : Wird dieser Bereich verlassen, existiert keine Spannung in  $\mathcal{U}(\gamma_{el})$ , um zum vorigen Betriebspunkt zurückzukehren. Die Stabilität von MPC-Ansätzen ist daher für den gesamten Betriebsbereich nicht ohne Zusatzmaßnahmen gegeben. Diese zusätzlichen Beschränkungen sind in [Pre16a] für PSM untersucht und ermöglichen den Betrieb im Feldschwächbereich.

## A.6 Ergänzende Informationen zur Simulationsumgebung

### A.6.1 Flusskennfelder der simulierten PSM

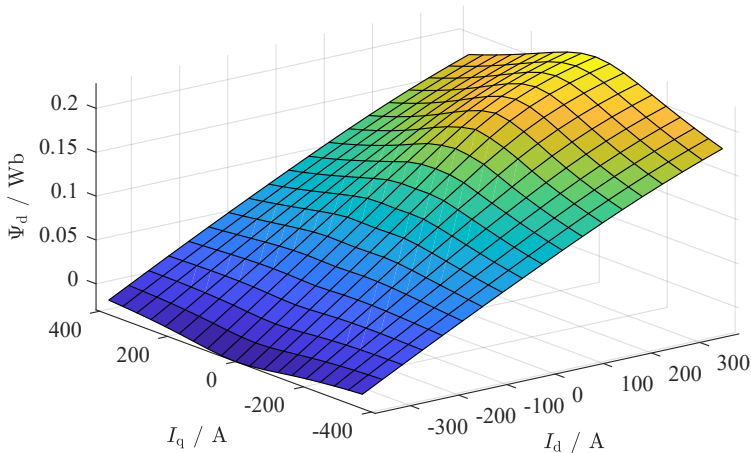
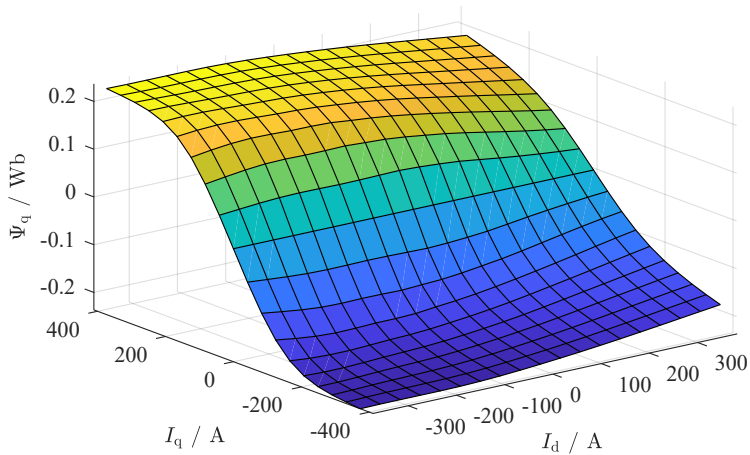


Abbildung A.1: Flusskennfeld für  $\Psi_d$



Abbildung A.2: Flusskennfeld für  $\Psi_q$ 

### A.6.2 Leistungsmerkmale des Simulationsrechners

Intel i7-8550U Prozessor	1,80 GHz
16 GB Arbeitsspeicher	2400 MHz

Tabelle A.1: Leistungsmerkmale des Simulationsrechners

### A.6.3 Bezugswerte für die Normierung des Systems

Aufgrund der Daten in den Tabellen 5.1 und 5.2 ergeben sich für den Antrieb die primären Bezugswerte in Tabelle A.2. Aus den primären Bezugswerten lassen sich die restlichen Bezugswerte in Tabelle A.3 ableiten.

Spannung	$U_{\max} = \frac{2}{3}U_{ZW}$	266,7 V
Strom	$I_{\max}$	373,3 A
Fluss	$\Psi_{\max}$	0,2366 Wb

Tabelle A.2: Primäre Bezugswerte

Winkelgeschwindigkeit	$\omega_{\max} = \frac{U_{\max}}{\Psi_{\max}}$	1127 rad s <sup>-1</sup>
Drehmoment	$M_{\max} = \frac{3}{2} p I_{\max} \Psi_{\max}$	265,0 Nm
Induktivität	$L_{\max} = \frac{\Psi_{\max}}{I_{\max}}$	633,8 mH
Widerstand	$R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$	714,3 mΩ

Tabelle A.3: Abgeleitete Bezugswerte

## A.7 Ergänzende Simulationsergebnisse

### A.7.1 Regularität der Dynamikmatrix des zeitdiskreten Maschinenmodells

Die Regularität der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  wird numerisch durch die Konditionszahl der Matrix geprüft. Es wird die Konditionszahl basierend auf der 2-Norm verwendet ([NW06, S. 601 f.]):

$$\kappa(\mathbf{A}_d) := \|\mathbf{A}_d\|_2 \|\mathbf{A}_d^{-1}\|_2. \quad (\text{A.9})$$

Große Konditionszahlen zeigen eine schlechte Konditionierung der Matrixinvertierung an, dies liegt insbesondere für Matrizen vor, die durch kleine Störungen singular werden können. Vereinfacht formuliert, führt ein Fehler in der Matrix  $\mathbf{A}_d$  eines linearen Gleichungssystems  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{v}_2$  zu einem um den Faktor  $\kappa(\mathbf{A}_d)$  größeren Fehler in der Lösung der Gleichung nach  $\mathbf{v}_2$  (siehe [NW06, S. 616]). In Abbildung A.3 ist  $\kappa(\mathbf{A}_d)$  für die hier verwendete PSM (Ma-

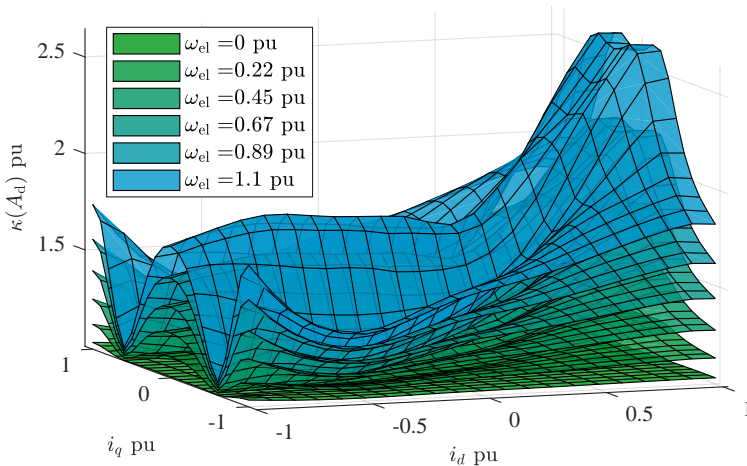


Abbildung A.3: Kondition der Dynamikmatrix  $\kappa(\mathbf{A}_d)$  über dem normierten Zustandsraum für verschiedene Drehzahlen

schinendaten siehe Unterabschnitt 5.1.1) über dem normierten Zustandsraum dargestellt. Da die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  von der Drehzahl abhängt, ist  $\kappa(\mathbf{A}_d)$  für verschiedene Drehzahlen aufgetragen. Es sind fünf Drehzahlen äquidistant über dem Drehzahlbereich von Null bis zur Maximaldrehzahl der PSM dargestellt. Es ist eine Verschlechterung der Kondition durch die Zunahme der Drehzahl zu erkennen, insgesamt sind die Werte jedoch als unkritisch einzustufen. Ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix  $\mathbf{A}_d$  ist gut konditioniert, da der Fehler beim Lösen des Gleichungssystems maximal um den Faktor 2,7 zunimmt. Damit ist gezeigt, dass die Matrix  $\mathbf{A}_d$  nicht durch kleine Störungen singular wird.

### A.7.2 Bestimmung der Diskretisierungsordnung

Die Abbildungen 5.4 und 5.5 in Abschnitt 5.2 zeigen Drehmomentprädiktionen von einem Prädiktionsmodell mit einer Diskretisierungsordnung von  $n_d = 2$ . Die folgende Anhang A.7.2 zeigt Drehmomentprädiktionen mit Modellen der Diskretisierungsordnung  $n_d = 3$ . Im Stillstand sowie bei der maximalen Drehzahl zeigt sich im Vergleich zu den Abbildungen 5.4 und 5.5 keine merkliche Verbesserung der Drehmomentprädiktion.

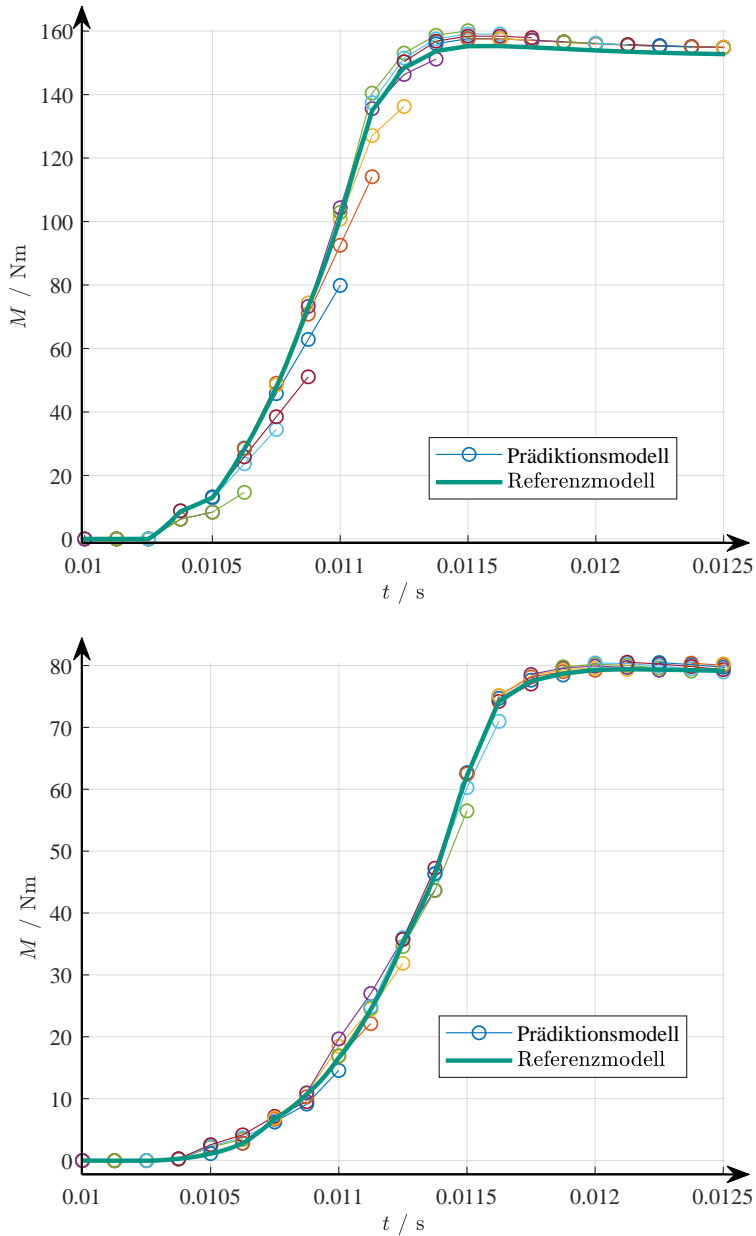


Abbildung A.4: Validierung des Maschinenmodells mit  $n_d = 3$  im Stillstand (oben) und bei  $12\,000\text{ min}^{-1}$  (unten)

### A.7.3 Detaillierte Auflistung der Sollströme des Prüfzenarios

Die untersuchten Szenarien sind detailliert in der Tabelle A.4 aufgeführt. Dabei steht  $M_b$  für das Solldrehmoment vor dem Sprung und  $M_e$  für den Endwert. Ebenfalls sind die zugehörigen Sollströme für das entsprechende Solldrehmoment  $M_e$  angegeben, die nach dem Verfahren aus [Gem15, Kap. 5.1] bestimmt sind.

Sprung Nummer	Drehzahl $\Omega / \text{min}^{-1}$	Solldrehmoment		Sollstrom	
		$M_b / \text{Nm}$	$M_e / \text{Nm}$	$I_d / \text{A}$	$I_q / \text{A}$
1	0	0	136	-203	170
2	0	136	0	0	0
3	0	0	13,6	-13	32
4	0	13,6	0	0	0
5	0	122,4	136	-203	170
6	0	136	122,4	-178	162
7	120	0	136	-203	170
8	120	136	0	0	0
9	120	0	13,6	-13	32
10	120	13,6	0	0	0
11	120	122,4	136	-203	170
12	120	136	122,4	-178	162
13	2400	0	136	-204	170
14	2400	136	0	0	0
15	2400	0	13,6	-13	32
16	2400	13,6	0	0	0
17	2400	122,4	136	-204	170
18	2400	136	122,4	-179	161
19	4800	0	136	-204	170
20	4800	136	0	0	0
21	4800	0	13,6	-13	32
22	4800	13,6	0	0	0
23	4800	122,4	136	-204	170
24	4800	136	122,4	-179	161

**Tabelle A.4:** Detaillierte Auflistung der Zustände des Prüfzenarios

### A.7.4 Regelergebnis bei der Variation des Gewichtungsfaktors der Verluste in der Gütefunktion

Die Auswertung der 90 %-Anregelzeit und des Überschingers in Abbildungen A.5 und A.6 bestätigen ebenfalls den geringen Einfluss des Gewichtungsfaktors  $k_v$  auf das Regelergebnis.

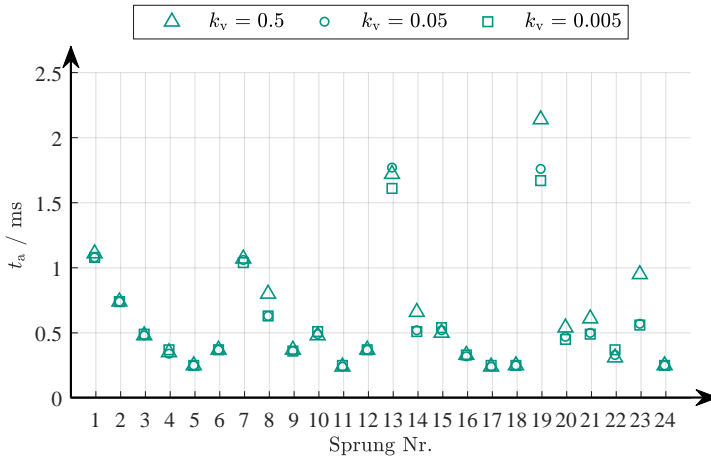


Abbildung A.5: 90 %-Anregelzeit für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren

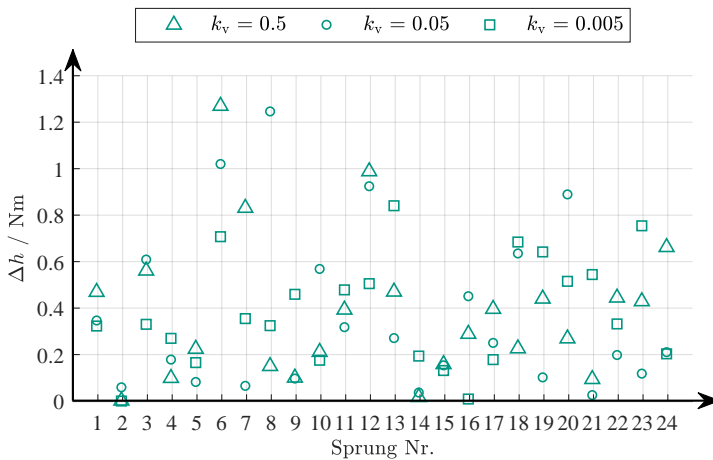


Abbildung A.6: Überschinger für verschiedene Verlustgewichtungsfaktoren

### A.7.5 Regelergebnis bei der Variation des Prädiktionshorizonts und der maximalen Iterationszahl

In diesem Abschnitt sind die detaillierten Regelergebnisse bei der Variation des Prädiktionshorizonts  $n_h$  in den Abbildungen A.7 bis A.9 zu sehen. Es handelt sich dabei um die drei Kennzahlen 90%-Anregelzeit  $t_a$ , die mittlere stationäre Abweichung  $\Delta\bar{M}$  in Nm und der Überschwinger  $\Delta h$  in %, wie sie in Abschnitt 5.4 definiert sind.

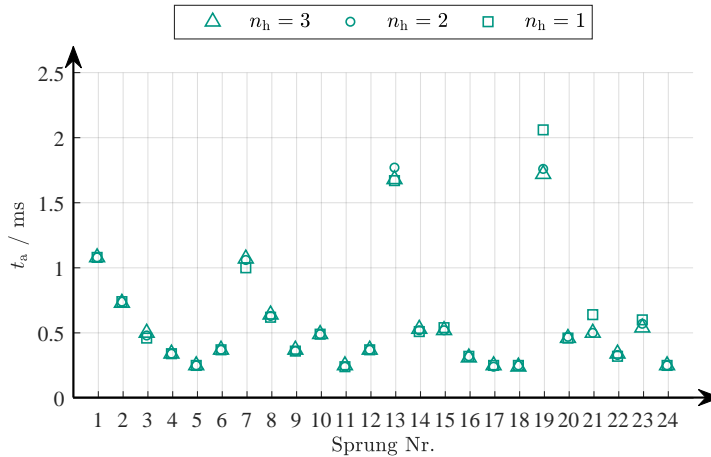


Abbildung A.7: 90 %-Anregelzeit für verschiedene Prädiktionshorizonte

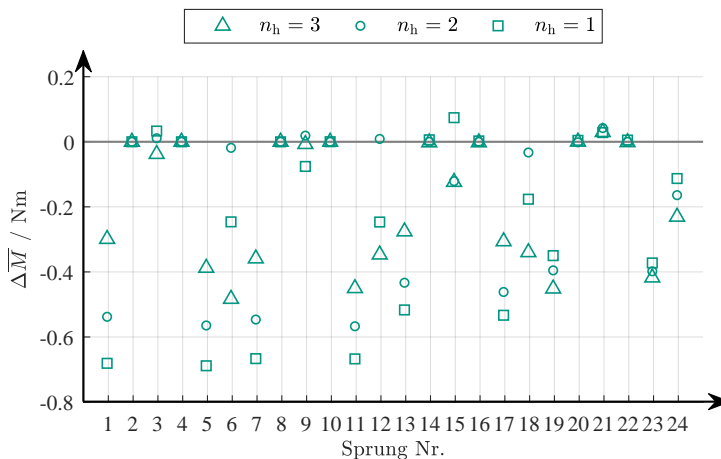


Abbildung A.8: Stationäre Abweichung für verschiedene Prädiktionshorizonte

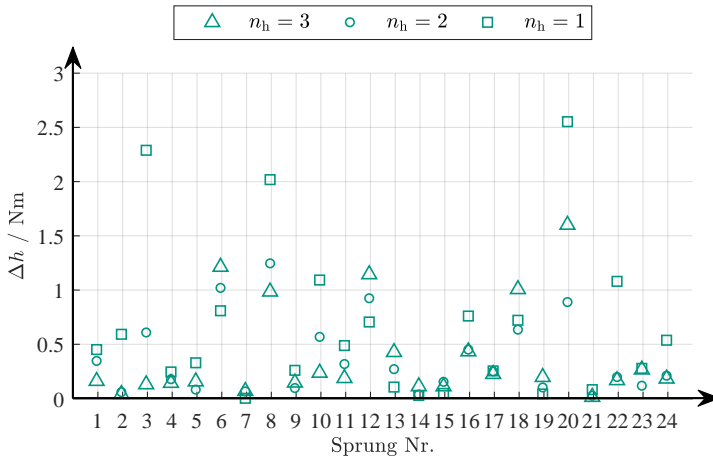


Abbildung A.9: Überschinger für verschiedene Prädiktionshorizonte

Des Weiteren folgt ergänzend die vollständige Auswertung der definierten Kennzahlen zur Wahl der maximalen Iterationszahl der PFGM  $n_{\text{maxi}}$ .

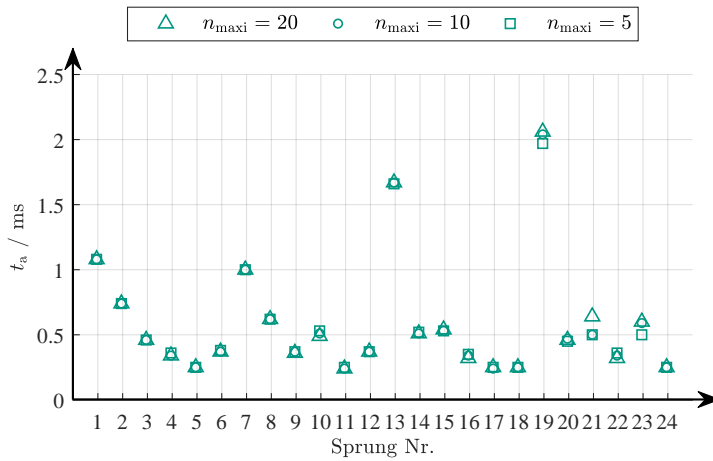


Abbildung A.10: 90 %-Anregelzeit für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl



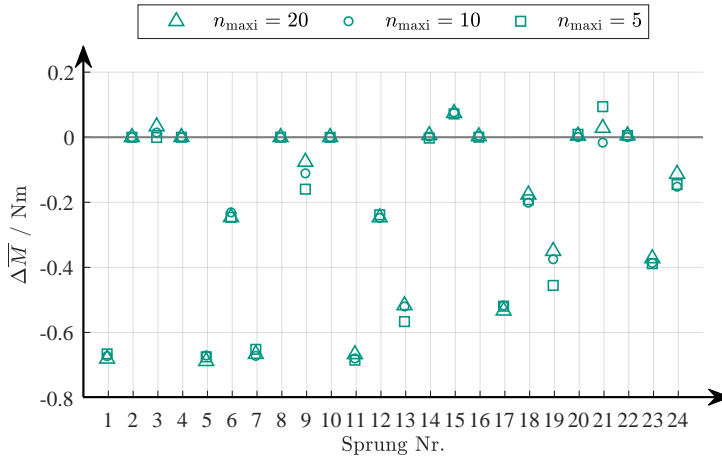


Abbildung A.11: Stationäre Abweichung für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl

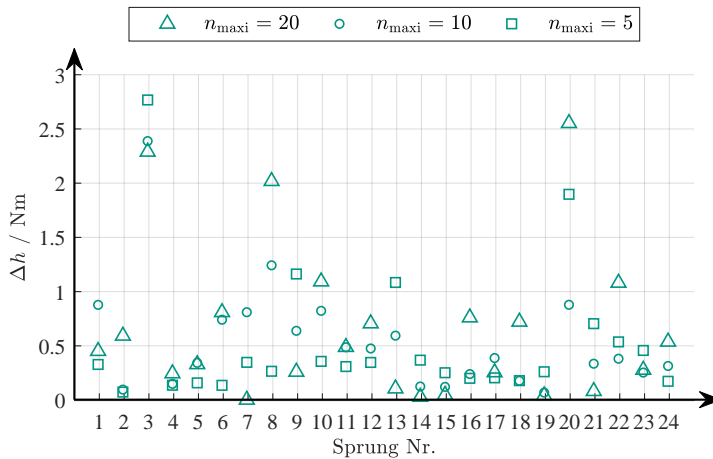


Abbildung A.12: Überschinger für verschiedene Werte der maximalen Iterationszahl

## A.7.6 Analyse der Abbruchkriterien der PFGM

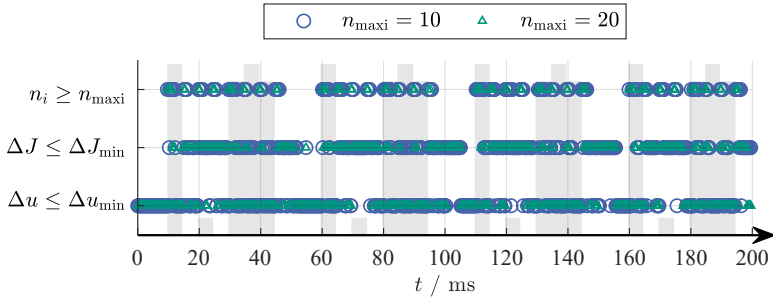


Abbildung A.13: Erreichtes Abbruchkriterium der PFGM während des in Abschnitt 5.4 vorgestellten Szenarios

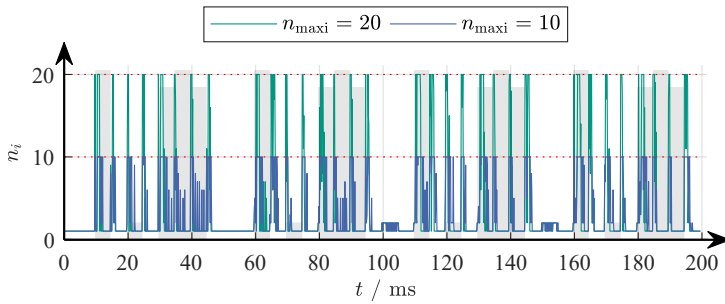
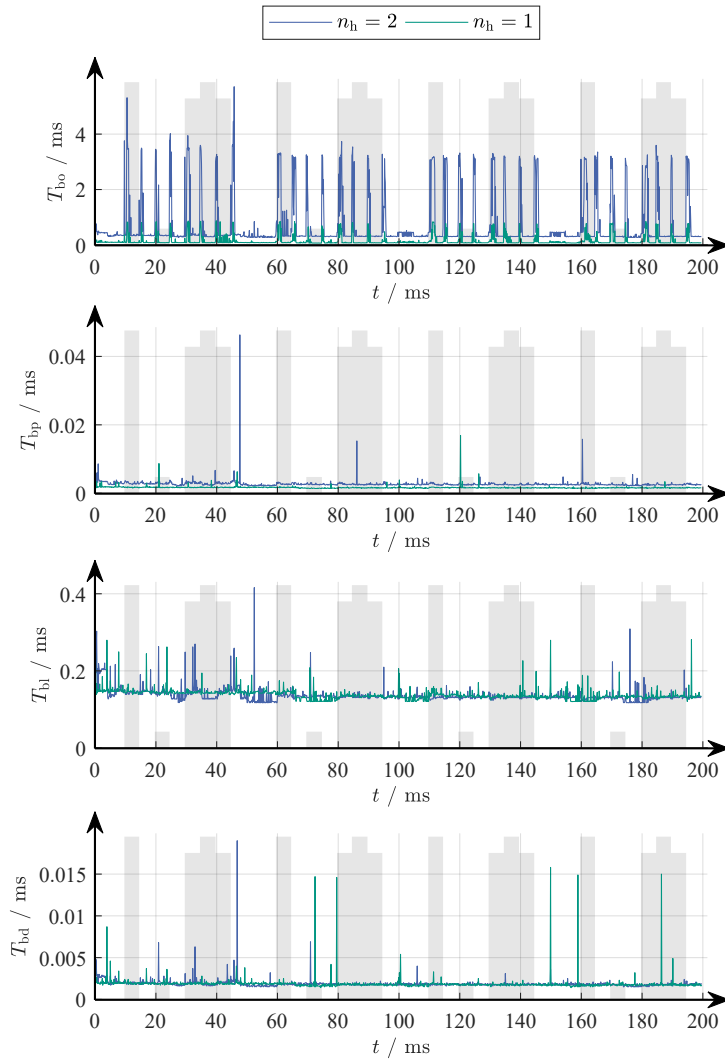


Abbildung A.14: Anzahl an Iterationen in der PFGM bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums

### A.7.7 Analyse der Berechnungszeiten der Parametrierung



**Abbildung A.15:** Berechnungszeit der Optimierung  $T_{bo}$ , des Prädiktionsmodells  $T_{bp}$ , der Linearisierung  $T_{bl}$  und der Diskretisierung  $T_{bd}$

### A.7.8 Regelergebnisse bei Messfehlern

#### Fehlerhafte Rotorwinkelmessung

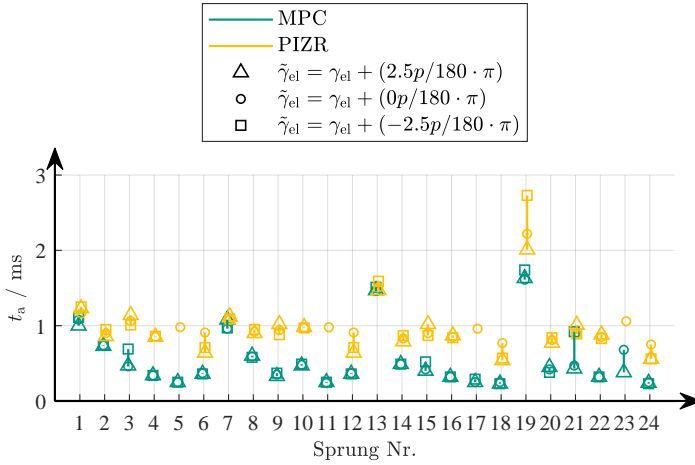


Abbildung A.16: 90%-Anregelzeit für fehlerhafte Rotorwinkel

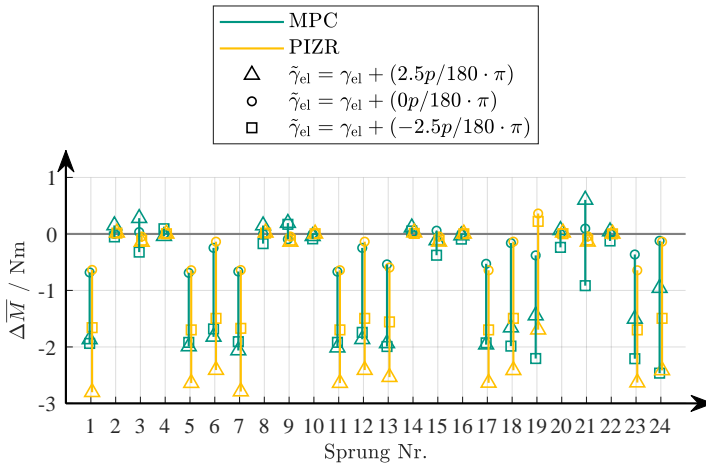


Abbildung A.17: Stationäre Abweichung für fehlerhafte Rotorwinkel

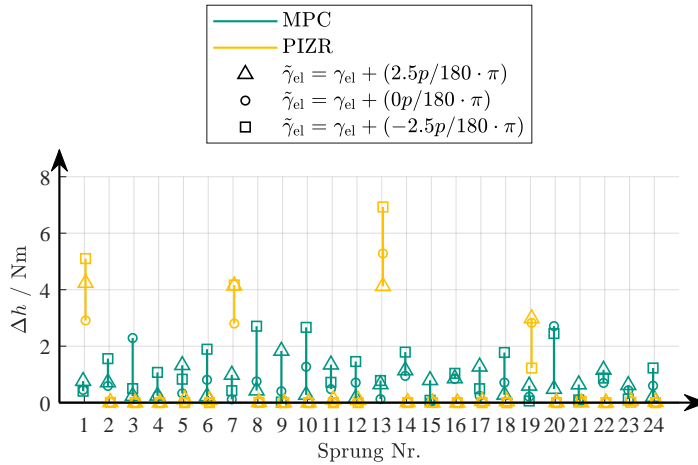


Abbildung A.18: Überschwinger für fehlerhafte Rotorwinkel

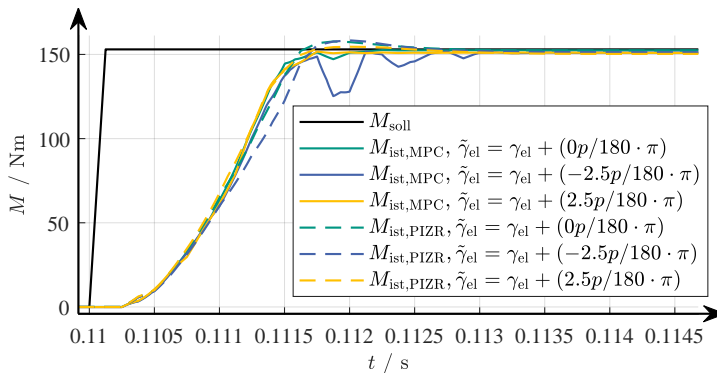


Abbildung A.19: Zeitlicher Verlauf des Drehmoments für fehlerhafte Rotorwinkel bei  $2400 \text{ min}^{-1}$

### Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung

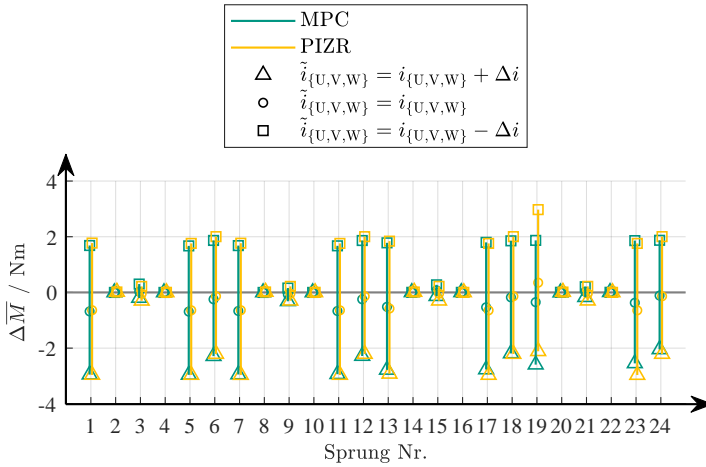


Abbildung A.20: Stationäre Abweichung für Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung

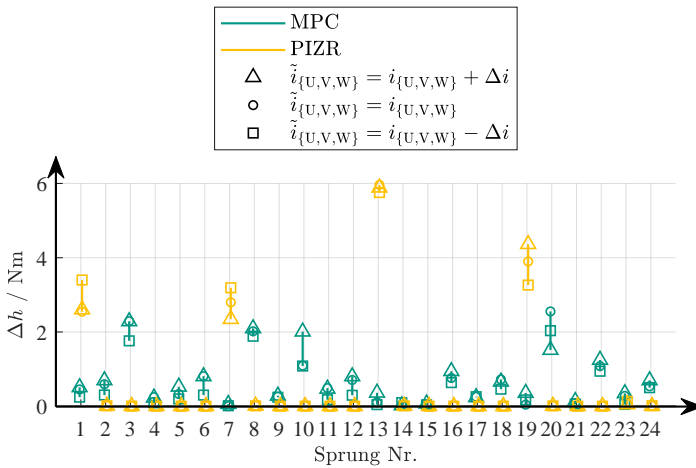


Abbildung A.21: Überschinger für Verstärkungsfehler und absolute Fehler in der Strangstrommessung

### Additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

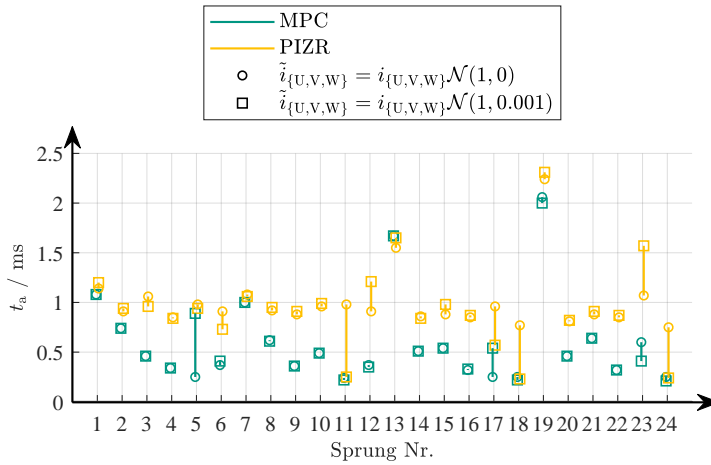


Abbildung A.22: 90 %-Anregelzeit für ein additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

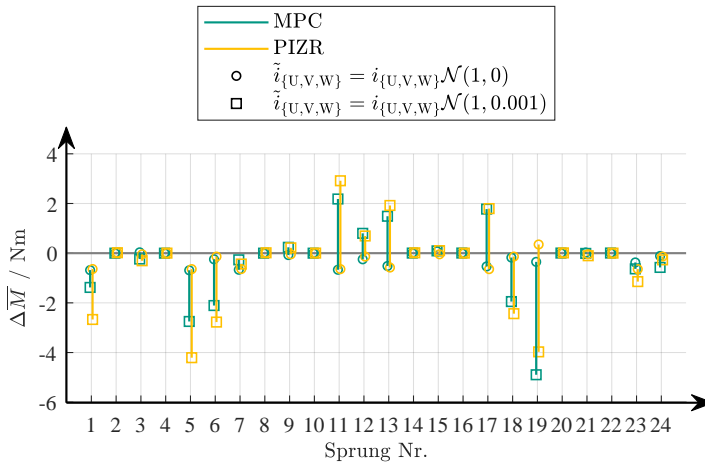


Abbildung A.23: Stationäre Abweichung für ein additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

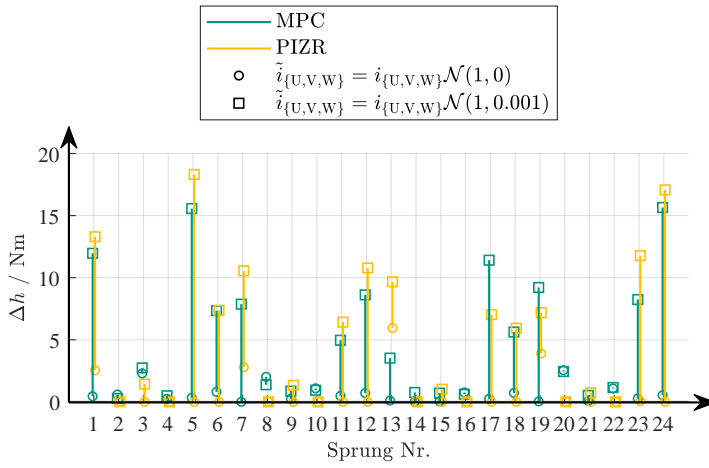


Abbildung A.24: Überschwinger für ein additives weißes gaußsches Rauschen in der Strangstrommessung

### A.7.9 Regelergebnisse bei oszillierenden Sollwerten

#### Auswertung des Amplitudenfehlers für den PIZR

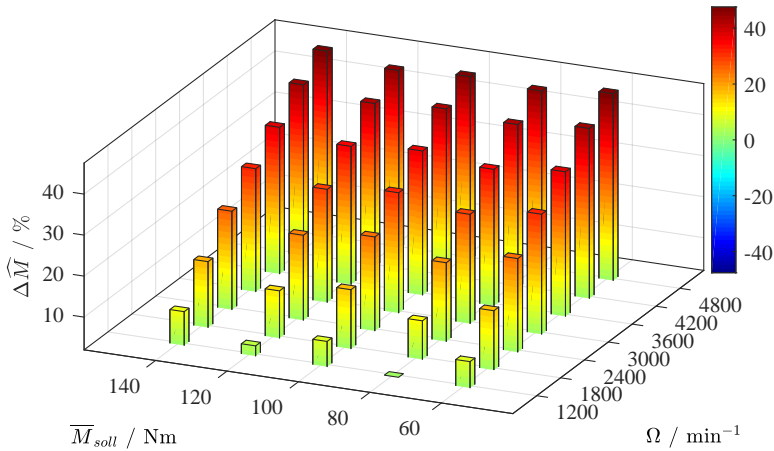
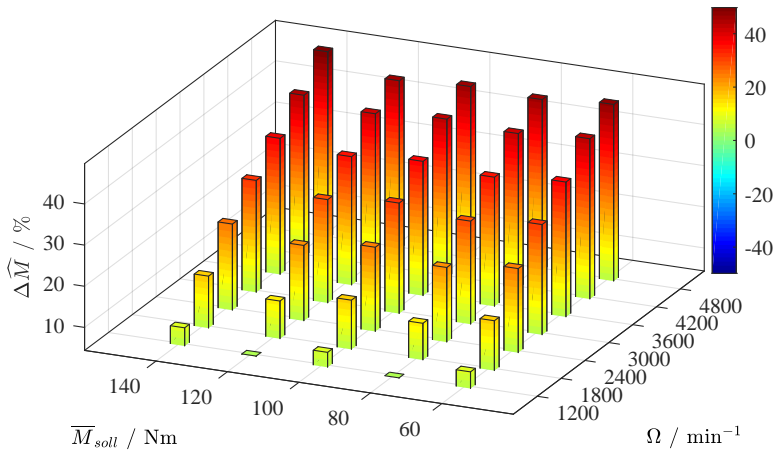
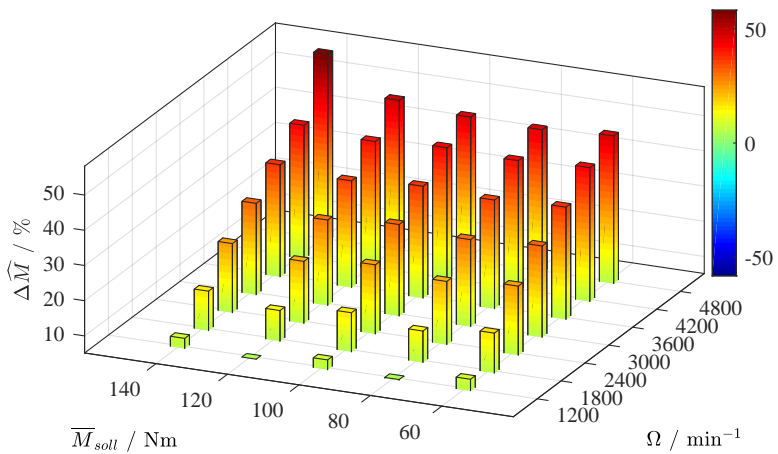


Abbildung A.25: Auswertung für den PIZR bei  $\widehat{M}_{soll} = 5\% \overline{M}_{soll}$



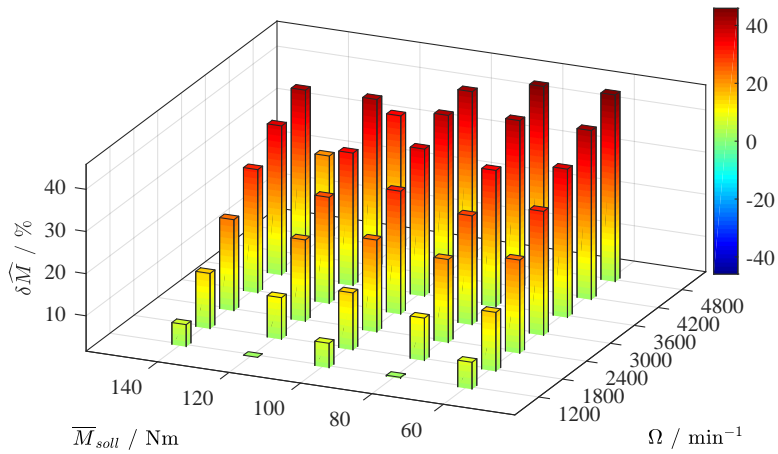


**Abbildung A.26:** Auswertung für den PIZR bei  $\widehat{M}_{soll} = 10\% \overline{M}_{soll}$



**Abbildung A.27:** Auswertung für den PIZR bei  $\widehat{M}_{soll} = 15\% \overline{M}_{soll}$

## Vergleich des Amplitudenfehlers des MPC und des PIZR



**Abbildung A.28:** Vergleich des MPC und des PIZR bei  $\widehat{M}_{soll} = 10\% \overline{M}_{soll}$

# Literaturverzeichnis

## Öffentlich zugängliche Quellen

- [ABP04] AMANN, N. ; BOCKER, J. ; PRENNER, F.: Active damping of drive train oscillations for an electrically driven vehicle. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 9 (2004), Dec, Nr. 4, S. 697–700
- [ÅH95] ÅSTRÖM, Karl J. ; HÄGGLUND, Tore: *PID controllers: Theory, Design and Tuning*. 2. Aufl. Research Triangle Park, NC, USA : Instrument Society of America, 1995
- [AHK<sup>+</sup>08] ARENS, Tilo ; HETTLICH, Frank ; KARPFFINGER, Christian ; KOCKELKORN, Ulrich ; LICHTENEGGER, Klaus ; STACHEL, Hellmuth: *Mathematik*. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2008
- [AOH17] ALLI-OKE, Razak O. ; HEATH, William P.: A secant-based Nesterov method for convex functions. In: *Optimization Letters* 11 (2017), Jan, Nr. 1, S. 81–105
- [APM16] ANILKUMAR, Markana ; PADHIYAR, Nitin ; MOUDGALYA, Kannan: Lexicographic optimization based MPC: Simulation and experimental study. In: *Computers & Chemical Engineering* 88 (2016), S. 135–144
- [BBM17] BORRELLI, F. ; BEMPORAD, A. ; MORARI, M.: *Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*. Cambridge University Press, 2017
- [BBPZ08] BOLOGNANI, S. ; BOLOGNANI, S. ; PERETTI, L. ; ZIGLIOTTO, M.: Combined speed and current Model Predictive Control with inherent field-weakening features for PMSM Drives. In: *MELECON 2008 - The 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*, 2008, S. 472–478
- [BBPZ09] BOLOGNANI, S.a ; BOLOGANI, S.b ; PERETTI, L.a ; ZIGLIOTTO, M.a: Design and implementation of model predictive control for electrical motor drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 56 (2009), Nr. 6, S. 1925–1936
- [BKKP11] BOLOGNANI, S. ; KENNEL, R. ; KUEHL, S. ; PACCAGNELLA, G.: Speed and current Model Predictive Control of an IPM synchronous motor drive. In: *IEEE International Electric Machines Drives Conference (IEMDC)*, 2011, S. 1597–1602

- [Bor14] BORCHARDT, Norman: *Modellierung, elektromechanische Auslegung und Validierung eines Radnabenmotors mit nutenloser Luftspaltwicklung und hoher gravimetrischer Leistungsdichte*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 2014
- [BSMM05] BRONSTEIN, Ilja N. ; SEMENDJAJEW, Konstantin A. ; MUSIOL, Gerhard ; MÜHLIG, Heiner: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Auflage. Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch GmbH, 2005
- [BT89] BERTSEKAS, Dimitri P. ; TSITSIKLIS, John N.: *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. USA : Prentice-Hall, Inc., 1989
- [BV04] BOYD, Stephen P. ; VANDENBERGHE, Lieven: *Convex optimization*. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo, Delhi : Cambridge University Press, 2004
- [CB99] CAMACHO, Eduardo F. ; BORDONS, Carlos: *Model predictive control*. London : Springer, 1999 (Advanced textbooks in control and signal processing)
- [CBBL15] CIMINI, G. ; BERNARDINI, D. ; BEMPORAD, A. ; LEVIJOKI, S.: Online model predictive torque control for Permanent Magnet Synchronous Motors. In: *IEEE Int. Conf. on Industrial Technology (ICIT)*. Seville, Spain, March 2015, S. 2308–2313
- [CFI<sup>+</sup>13] CIMINI, Gionata ; FOSSI, Valentino ; IPPOLITI, Gianluca ; MENCARELLI, Stefano ; ORLANDO, Giuseppe ; PIRRO, Matteo: Model predictive control solution for Permanent Magnet Synchronous Motors. In: *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society* (2013), S. 5824–5829
- [CKK<sup>+</sup>08] CORTÉS, P.a ; KAZMIERKOWSKI, M.P.b ; KENNEL, R.M.c ; QUEVEDO, D.E.d ; RODRIGUEZ, J.a: Predictive control in power electronics and drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55 (2008), Nr. 12, S. 4312–4324
- [CKL<sup>+</sup>09] CORTES, P. ; KOURO, S. ; LA ROCCA, B. ; VARGAS, R. ; RODRIGUEZ, J. ; LEON, J. I. ; VAZQUEZ, S. ; FRANQUELO, L. G.: Guidelines for weighting factors design in Model Predictive Control of power converters and drives. In: *2009 IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2009
- [CL13] CARPIUC, S. ; LAZAR, C.: Low-Complexity Model Predictive Control of a Permanent Magnet Synchronous Machine System. In: *2013 19th International Conference on Control Systems and Computer Science*, 2013
- [CL14] CARPIUC, S.C. ; LAZAR, C.: Energy-Efficient Model Predictive Speed Control of Permanent Magnet Synchronous Machine Based Automotive Traction Drives. In: *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*. Coimbra, Portugal, Oct 2014

- [CMT87] CLARKE, D.W. ; MOHTADI, C. ; TUFFS, P.S.: Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm. In: *Automatica* 23 (1987), Nr. 2, S. 137–148
- [Com11] COMANESCU, M.: Influence of the discretization method on the integration accuracy of observers with continuous feedback. In: *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2011, S. 625–630
- [CR80] CUTLER, C R. ; RAMAKER, B L.: Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: *Proc. Joint Automatic Control Conference* (1980)
- [CW13] CHERNOV, N. ; WIJEWICKREMA, S.: Algorithms for projecting points onto conics. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 251 (2013), S. 8–21
- [CWR13a] CHAI, S.a ; WANG, L.a ; ROGERS, E.b: A cascade MPC control structure for a PMSM with speed ripple minimization. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 60 (2013), Nr. 8, S. 2978–2987
- [DB94] DUMUR, D. ; BOUCHER, P.: New Predictive Solutions to Very High Speed Machining. In: *CIRP Annals* 43 (1994), Nr. 1, S. 363–366
- [DBE96] DUMUR, D. ; BOUCHER, P. ; EHRLINGER, A.U.: Constrained Predictive Control for Motor Drives. In: *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 45 (1996), Nr. 1, S. 355–358
- [DFH09] *Kapitel Efficient Numerical Methods for Nonlinear MPC and Moving Horizon Estimation.* In: DIEHL, Moritz ; FERREAU, Hans J. ; HAVERBEKE, Niels: *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Bd. 384. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, S. 391–417
- [DI92] DRAGOMIRESCU, F. ; IVAN, C.: The smallest convex extensions of a convex function. In: *Optimization* 24 (1992), Nr. 3-4, S. 193–206
- [DJ19] DOMAHIDI, Alexander ; JEREZ, Juan: *FORCES Professional.* Embotech AG, <https://embotech.com/FORCES-Pro>, 2014–2019
- [DP04] DITTMAR, Rainer ; PFEIFFER, Bernd-Markus: *Modellbasierte prädiktive Regelung: Eine Einführung für Ingenieure.* München : Oldenbourg, 2004
- [DP06] DITTMAR, Rainer ; PFEIFFER, Bernd-Markus: Modellbasierte prädiktive Regelung in der industriellen Praxis (Industrial Application of Model Predictive Control). In: *at Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 12, S. 590–601
- [DRB16] DECKER, S. ; RICHTER, J. ; BRAUN, M.: Predictive current control and online parameter identification of interior permanent magnet synchronous machines. In: *18th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'16 ECCE Europe)*, 2016, S. 1–10

- [DS04] DELALEAU, E. ; STANKOVIC, A. M.: Flatness-based hierarchical control of the PM synchronous motor. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference, 2004*, S. 65–70
- [EADML17] ERROUSSI, Rachid ; AL-DURRA, Ahmed ; MUYEEN, SM. ; LENG, Siyu: Continuous-time model predictive control of a permanent magnet synchronous motor drive with disturbance decoupling. In: *IET Electric Power Applications* 11(5) (2017), S. 697–706
- [EG18a] ENGLERT, T. ; GRAICHEN, K.: Optimal Setpoint Computation for Constrained Torque Control of PMSMs. In: *2018 European Control Conference (ECC)*, 2018, S. 2671–2677
- [EG18b] ENGLERT, Tobias ; GRAICHEN, Knut: A Fixed-Point Iteration Scheme for Model Predictive Torque Control of PMSMs. In: *IFAC-PapersOnLine* 51 (2018), Nr. 20, S. 568–573
- [EGG17] ENGLERT, Tobias ; GRÜNER, Stefan ; GRAICHEN, Knut: Model Predictive Torque Control of Permanent Magnet Synchronous Machines. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), Nr. 1, S. 758–763
- [Ehr05] EHRGOTT, Matthias: *Multicriteria Optimization*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2005
- [Els19] ELSEVIER B.V. (HRSG.): *Suchanfrage auf www.scopus.com mit dem Suchterm: TITLE(('Model predictive control' OR mpc) AND (psm OR pmsm OR 'magnet synchronous machine'))*. abgerufen am 21.11.2019
- [EO10] ERROUSSI, Rachid ; OUHROUCHE, Mohand: Nonlinear predictive controller for a permanent magnet synchronous motor drive. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 81 (2010), Nr. 2, S. 394–406
- [EOCT12a] ERROUSSI, R.a ; OUHROUCHE, M.a ; CHEN, W.-H.b ; TRZYNADLOWSKI, A.M.c: Robust cascaded nonlinear predictive control of a permanent magnet synchronous motor with antiwindup compensator. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (2012), Nr. 8, S. 3078–3088
- [EOCT12b] ERROUSSI, R.a ; OUHROUCHE, M.a ; CHEN, W.-H.b ; TRZYNADLOWSKI, A.M.c: Robust nonlinear predictive controller for permanent-magnet synchronous motors with an optimized cost function. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (2012), Nr. 7, S. 2849–2858
- [ESP13] EBERSBERGER, S. ; SEILMEIER, M. ; PIEPENBREIER, B.: Flatness based sensorless control of PMSM using test current signal injection and compensation

- for differential cross-coupling inductances at standstill and low speed range. In: *2013 IEEE International Symposium on Sensorless Control for Electrical Drives and Predictive Control of Electrical Drives and Power Electronics (SLED/PRECEDE)*, 2013
- [EYCAD16] ERROUSSI, Rachid ; YANG, Jun ; CHEN, Wen-Hua ; AL-DURRA, Ahmed: Robust nonlinear generalised predictive control for a class of uncertain nonlinear systems via an integral sliding mode approach. In: *International Journal of Control* 89 (2016), Nr. 8, S. 1698–1710
- [Far08] *Kapitel Polynomials*. In: FAROUKI, Rida T.: *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008
- [FKK16] FAUSTNER, D. ; KEMMETMÜLLER, W. ; KUGI, A.: Flatness-Based Torque Control of Saturated Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Machines. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24 (2016), July, Nr. 4, S. 1201–1213
- [FKP<sup>+</sup>14] FERREAU, Hans J. ; KIRCHES, Christian ; POTSCSKA, Andreas ; BOCK, Hans G. ; DIEHL, Moritz: qpOASES: a parametric active-set algorithm for quadratic programming. In: *Mathematical Programming Computation* 6 (2014), Nr. 4, S. 327–363
- [FLMR92] FLIESS, M. ; LÉVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: On Differentially Flat Nonlinear Systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 25 (1992), Nr. 13, S. 159–163
- [FLMR99] FLIESS, M. ; LEVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 5, S. 922–937
- [FMR<sup>+</sup>20] FERNÁNDEZ, D. ; MARTINEZ, M. ; REIGOSA, D. ; GUERRERO, J. M. ; ALVAREZ, C. M. S. ; BRIZ, F.: Permanent Magnets Aging in Variable Flux Permanent Magnet Synchronous Machines. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 56 (2020), Nr. 3, S. 2462–2471
- [FP95] FUKUDA, Komei ; PRODON, Alain: Double Description Method Revisited. In: *Combinatorics and Computer Science*, 1995, S. 91–111
- [FZW<sup>+</sup>10] FAN, JinXin ; ZHANG, ChengNing ; WANG, Zhifu ; TARIQ, A.R. ; NINO, C.E. ; STRANGAS, E. G.: Design and thermal analysis of traction motor for electric vehicle based on driving duty cycle. In: *Digests of the 2010 14th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, 2010

- [GBP13] GRAF, Miroslav ; BUCHTA, Ludek ; POHL, Lukas: Nonlinear predictive controller design of PMSM with field weakening performance. In: *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (2013)*, S. 3001–3005
- [GEK10] GRAICHEN, Knut ; EGRETZBERGER, Markus ; KUGI, Andreas: Ein suboptimaler Ansatz zur schnellen modellprädiktiven Regelung nichtlinearer Systeme. In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 8, S. 447–457
- [Gem15] GEMASSMER, Tobias: *Effiziente und dynamische Drehmomenteinprägung in hoch ausgenutzten Synchronmaschinen mit eingebetteten Magneten*. Karlsruhe, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Dissertation, 2015
- [Gey11] GEYER, T.: A comparison of control and modulation schemes for medium-voltage drives: Emerging predictive control concepts versus PWM-based schemes. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 47 (2011), Nr. 3, S. 1380–1389
- [Gey16] GEYER, Tobias (Hrsg.): *Model predictive control of high power converters and industrial drives*. 1. Aufl. Chichester, West Sussex, UK : John Wiley & Sons, Inc, 2016
- [GOB15] GRAF, Miroslav ; OTAVA, Lukas ; BUCHTA, Ludek: Simple Linearization Approach for MPC Design for Small PMSM with Field Weakening Performance. In: *Conf. on Programmable Devices and Embedded Systems (PDES)* Bd. 13. Cracow, Poland, 2015, S. 159–164
- [GOPK12] GEYER, T. ; OIKONOMOU, N. ; PAPAFOITOU, G. ; KIEFERNDORF, F.D.: Model Predictive Pulse Pattern Control. In: *Industry Applications, IEEE Transactions on* 48 (2012), March, Nr. 2, S. 663–676
- [GOS14] GWINNER, Philipp ; OTTO, Michael ; STAHL, Karsten: Lightweight Torque-Vectoring Transmission for the Electric Vehicle VISIO.M. In: *Conference on Future Automotive Technology (CoFAT)*, 2014
- [GP17] GRÜNE, Lars ; PANNEK, Jürgen: *Nonlinear Model Predictive Control*. 2. Aufl. London, UK : Springer, 2017
- [Gra70] GRAHAM, Jameson: *Ordered linear spaces*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1970 (Lecture Notes in Mathematics)
- [HHL02] HYUNBAE, Kim ; HARTWIG, J. ; LORENZ, R. D.: Using on-line parameter estimation to improve efficiency of IPM machine drives. In: *33rd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, 2002*, S. 815–820



- [HJ94] HORN, Roger A. ; JOHNSON, Charles R.: *Matrix Analysis*. New York : Cambridge University Press, 1994
- [HKJM13a] HERCEG, M. ; KVASNICA, M. ; JONES, C.N. ; MORARI, M.: Multi-Parametric Toolbox 3.0. In: *Proc. of the European Control Conference*. Zürich, Switzerland, July 2013, S. 502–510
- [HM98] HUZMEZAN, M. ; MACIEJOWSKI, J.: Reconfiguration and scheduling in flight using quasi-LPV high-fidelity models and MBPC control. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, 1998, S. 3649–3653
- [Hof11] HOFMANN, P.: *Hybridfahrzeuge: Ein alternatives Antriebskonzept für die Zukunft*. Wien : Springer, 2011
- [HP10] HENRIKSEN, L. C. ; POULSEN, N. K.: An online re-linearization scheme suited for Model Predictive and Linear Quadratic Control. In: *IMM-Technical Report-2010-13 Rev. 2 der Technical University of Denmark, DTU* (2010)
- [HWP19] HANKE, S. ; WALLSCHEID, O. ; BÖCKER, J.: Continuous-Control-Set Model Predictive Control with Integrated Modulator in Permanent Magnet Synchronous Motor Applications. In: *2019 IEEE International Electric Machines Drives Conference (IEMDC)*, 2019, S. 2210–2216
- [HWS15] HE, Defeng ; WANG, Lei ; SUN, Jing: On stability of multiobjective NMPC with objective prioritization. In: *Automatica* 57 (2015), Nr. 0, S. 189–198
- [JMZ13] JOLIVET, S. ; MANSORI, S. Mezghaniand M. ; ZAHOUANI, H.: Gear noise behavior induced by their topological quality. In: *Surface Topography: Metrology and Properties* 2 (2013)
- [JSHR06] JEONG, Yu-Seok ; SUL, Seung-Ki ; HITI, S. ; RAHMAN, K.M.: Online Minimum-Copper-Loss Control of an Interior Permanent-Magnet Synchronous Machine for Automotive Applications. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 42 (2006), Sept, Nr. 5, S. 1222–1229
- [KBF<sup>+</sup>15] KUFOALOR, D. K. M. ; BINDER, B. J. T. ; FERREAU, H. J. ; IMSLAND, L. ; JOHANSEN, T. A. ; DIEHL, M.: Automatic deployment of industrial embedded model predictive control using qpOASES. In: *2015 European Control Conference (ECC)*, 2015, S. 2601–2608
- [KE08] KIENCK, Uwe ; EGER, Ralf: *Messtechnik*. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008
- [KGBM04] KVASNICA, Michal ; GRIEDER, Pascal ; BAOTIĆ, Mato ; MORARI, Manfred: Multi-Parametric Toolbox (MPT). In: ALUR, Rajeev (Hrsg.) ; PAPPAS, George J. (Hrsg.): *Hybrid Systems: Computation and Control*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2004, S. 448–462

- [KHL14] KRAL, C. ; HAUMER, A. ; LEE, S. B.: A Practical Thermal Model for the Estimation of Permanent Magnet and Stator Winding Temperatures. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 29 (2014), Jan, Nr. 1, S. 455–464
- [KKZ<sup>+</sup>19] KOIWA, K. ; KURIBAYASHI, T. ; ZANMA, T. ; LIU, K. ; WAKAIKI, M.: Optimal current control for PMSM considering inverter output voltage limit: model predictive control and pulse-width modulation. In: *IET Electric Power Applications* 13 (2019), Nr. 12, S. 2044–2051
- [KL00] KENNEL, R. ; LINDER, A.: Predictive control of inverter supplied electrical drives. In: *2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference*, 2000, S. 761–766
- [KLL01] KENNEL, R. ; LINDER, A. ; LINKE, M.: Generalized predictive control (GPC)-ready for use in drive applications? In: *2001 IEEE 32nd Annual Power Electronics Specialists Conference*, 2001, S. 1839–1844
- [KM02] KERRIGAN, E. C. ; MACIEJOWSKI, J. M.: Designing model predictive controllers with prioritised constraints and objectives. In: *IEEE International Symp. on Comput. Aided Control Syst. Design*, 2002, S. 33–38
- [LFG<sup>+</sup>18] LIU, K. ; FENG, J. ; GUO, S. ; XIAO, L. ; ZHU, Z.: Identification of Flux Linkage Map of Permanent Magnet Synchronous Machines Under Uncertain Circuit Resistance and Inverter Nonlinearity. In: *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 14 (2018), Nr. 2, S. 556–568
- [LH16] L. HORLBECK, C.M. H.: Analytical solution for the MTPV hyperbola including the stator resistance. In: *2016 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. Taipei, Taiwan, 2016
- [LH17] LEE, K. ; HA, J.: Dynamic decoupling control method for PMSM drive with cross-coupling inductances. In: *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2017, S. 563–569
- [LK05a] LINDER, A. ; KENNEL, R.: Direct model predictive control - A new direct predictive control strategy for electrical drives. In: *European Conference on Power Electronics and Applications*. Dresden, Germany, September 2005
- [LKKS10] LINDER, A. ; KANCHAN, R. ; KENNEL, R. ; STOLZE, P.: *Model-based predictive control of electric drives*. Göttingen : Cuvillier Verlag, 2010
- [Lof04] LOFBERG, J.: YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004, S. 284–289
- [Lue69] LUENBERGER, D.G.: *Optimization by Vector Space Methods*. New York, NY : John Wiley & Sons, 1969

- [MA04] MARLER, R.T. ; ARORA, J.S.: Survey of multi-objective optimization methods for engineering. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26 (2004), Apr, Nr. 6, S. 369–395
- [MAT17] MATLAB: 9.3.0.713579 (R2017b). Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2017
- [MDM09] MARIETHOZ, S. ; DOMAHIDI, A. ; MORARI, M.: Sensorless explicit model predictive control of permanent magnet synchronous motors. In: *2009 IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, 2009, S. 1250–1257
- [MDM12] MARIETHOZ, S. ; DOMAHIDI, A. ; MORARI, M.: High-bandwidth explicit model predictive control of electrical drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 48 (2012), Nr. 6, S. 1980–1992
- [Mey10] MEYER, Michael: *Wirkungsgradoptimierte Regelung hoch ausgenutzter Permanentmagnet-Synchronmaschinen im Antriebsstrang von Automobilen*, Universität Paderborn, Dissertation, 2010
- [MGB10] MIKSCH, T. ; GAMBIER, A. ; BADREDDIN, E.: Fault-tolerant control of a reverse osmosis plant based on MPC with lexicographic multiobjective optimization. In: *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, 2010, S. 1045–1050
- [MLSR<sup>+</sup>09] MOREL, F.a ; LIN-SHI, X.b ; RÉTIF, J.-M.b ; ALLARD, B.b ; BUTTAY, C.b: A comparative study of predictive current control schemes for a permanent-magnet synchronous machine drive. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 56 (2009), Nr. 7, S. 2715–2728
- [MN09] MÄKELÄ, M. M. ; NIKULIN, Y.: On Cone Characterizations of Strong and Lexicographic Optimality in Convex Multiobjective Optimization. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 143 (2009), May, Nr. 3, S. 519
- [MRRS00] MAYNE, D.Q.a c. ; RAWLINGS, J.B.b ; RAO, C.V.b d e. ; SCOKAERT, P.O.M.f: Constrained model predictive control: Stability and optimality. In: *Automatica* 36 (2000), Nr. 6, S. 789–814
- [MRTT53] MOTZKIN, T.S. ; RAIFFA, H. ; THOMPSON, G.L. ; THRALL, R.M. ; KUHN, H.W. (Hrsg.) ; TUCKER, A.W. (Hrsg.): *The doubledescription method*. In: *Contributions to the Theory of Games*. Princeton University Press, 1953 (Annals of Mathematics Studies Bd. 2)
- [MSK13] MA, Zhixun ; SAEIDI, Saeid ; KENNEL, Ralph: Continuous set nonlinear model predictive control for PMSM drives. In: *2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, 2013, S. 1–10

- [MSK14] MA, Z. ; SAEIDI, S. ; KENNEL, R.: FPGA Implementation of Model Predictive Control With Constant Switching Frequency for PMSM Drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 10 (2014), Nov, Nr. 4, S. 2055–2063
- [MVV16] MYNAR, Z. ; VESELY, L. ; VACLAVEK, P.: PMSM Model Predictive Control With Field-Weakening Implementation. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63 (2016), Aug, Nr. 8, S. 5156–5166
- [Nes83] NESTEROV, Y.: A method for solving a convex programming problem with convergence rate  $1/k^2$ . In: *Soviet Math. Dokl.* vol. 27 (1983), S. 372–376
- [Nes08] NESTEROV, Y.: How to advance in structural convex optimization. In: *OPTIMA, MPS Newsletter* Bd. 78 (2008), November
- [Nes18] NESTEROV, Y.: *Springer Optimization and Its Applications*. Bd. 137: *Lectures on Convex Optimization*. 2. Cham, Schweiz : Springer International Publishing, 2018
- [Nuß10] NUSS, Uwe: *Hochdynamische Regelung elektrischer Antriebe*. Berlin : VDE-Verlag, 2010
- [NW06] NOCEDAL, Jorge ; WRIGHT, Stephen: *Numerical optimization*. 2. Aufl. New York, NY : Springer Science and Business Media, 2006 (Series in Operations Research and Financial Engineering)
- [OCK<sup>+</sup>15] O'DWYER, E. ; CYCHOWSKI, M. ; KOURAMAS, K. ; DE TOMMASI, L. ; LIGHTBODY, G.: Scalable, reconfigurable Model Predictive Control for building heating systems. In: *2015 European Control Conference (ECC)*, 2015, S. 2248–2253
- [OKBR14] ORLOWSKA-KOWALSKA, T. ; BLAABJERG, F. ; RODRÍGUEZ, J.: *Advanced and Intelligent Control in Power Electronics and Drives*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer, 2014
- [PB09] PADHIYAR, Nitin ; BHARTIYA, Sharad: Profile control in distributed parameter systems using lexicographic optimization based MPC. In: *Journal of Process Control* 19 (2009), Nr. 1, S. 100–109
- [PB13b] PREINDL, M. ; BOLOGNANI, S.: Comparison of direct and PWM model predictive control for power electronic and drive systems. In: *2013 Twenty-Eighth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2013, S. 2526–2533
- [PB15] PREINDL, M. ; BOLOGNANI, S.: Optimal State Reference Computation With Constrained MTPA Criterion for PM Motor Drives. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 30 (2015), Aug, Nr. 8, S. 4524–4535

- [PBD13] PREINDL, Matthias ; BOLOGNANI, Silverio ; DANIELSON, Claus: Model Predictive Torque Control with PWM using fast gradient method. In: *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*. Long Beach, USA, March 2013, S. 2590–2597
- [PDA16] PAPAFOOTIΟΥ, G. A. ; DEMETRIADES, G. D. ; AGELIDIS, V. G.: Technology Readiness Assessment of Model Predictive Control in Medium- and High-Voltage Power Electronics. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63 (2016), Sep., Nr. 9, S. 5807–5815
- [PHL16] PUC CETTI, L. ; HORLBECK, L. ; LIENKAMP, M.: Analysis of the difference between neglected and considered stator resistance in permanent magnet synchronous motors. In: *2016 IEEE 2nd Annual Southern Power Electronics Conference (SPEC)*, 2016
- [Pre13] PREINDL, Matthias: *Novel Model Predictive Control of a PM Synchronous Motor Drive*, University of Padua, Dissertation, 2013
- [Pre16a] PREINDL, Matthias: Robust Control Invariant Sets and Lyapunov-Based MPC for IPM Synchronous Motor Drives. In: *IEEE Trans. Ind. Electron.* 63 (2016), S. 3925–3933
- [RBGD15] RICHTER, J. ; BAUERLE, P. ; GEMASSMER, T. ; DOPPELBAUER, M.: Transient trajectory control of permanent magnet synchronous machines with nonlinear magnetics. In: *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2015, S. 2345–2351
- [RGD14] RICHTER, J. ; GEMASSMER, T. ; DOPPELBAUER, M.: Predictive current control of saturated cross-coupled permanent magnet synchronous machines. In: *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion*. Ischia, Italy, June 2014, S. 830–835
- [RH11] ROTHE, R. ; HAMEYER, K.: Life expectancy calculation for electric vehicle traction motors regarding dynamic temperature and driving cycles. In: *2011 IEEE International Electric Machines Drives Conference (IEMDC)*, 2011, S. 1306–1309
- [Ric12] RICHTER, Stefan: *Computational Complexity Certification of Gradient Methods for Real-Time Model Predictive Control*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH), Dissertation, 2012
- [Ric15] RICHTER, Jan: *Modellbildung, Parameteridentifikation und Regelung hoch ausgenutzter Synchronmaschinen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Dissertation, 2015

- [RJM09] RICHTER, S. ; JONES, C. N. ; MORARI, M.: Real-time input-constrained MPC using fast gradient methods. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 28th Chinese Control Conference*, 2009, S. 7387–7393
- [RKE<sup>+</sup>13b] RODRIGUEZ, J. ; KAZMIERKOWSKI, M.P. ; ESPINOZA, J.R. ; ZANCHETTA, P. ; ABURUB, H. ; YOUNG, H.A. ; ROJAS, C.A.: State of the art of finite control set model predictive control in power electronics. In: *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 9 (2013), Nr. 2, S. 1003–1016
- [RM09] RAWLINGS, J. B. ; MAYNE, D. Q.: *Model predictive control: Theory and design*. Madison, Wisconsin, USA : Nob Hill Publishing, 2009
- [RMM10] RICHTER, S. ; MARIÉTHOZ, S. ; MORARI, M.: High-speed online MPC based on a fast gradient method applied to power converter control. In: *American Control Conference*. Baltimore, MD, USA, June 2010, S. 4737–4743
- [RMPG07] RODRÍGUEZ-MILLÁN, J. ; PATETE, A. ; GONZÁLEZ, C.: Picard discretization of nonlinear systems: Symbolic or numeric implementation? In: *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)* (2007), S. 121–129
- [Roc70] ROCKAFELLAR, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey, USA : Princeton University Press, 1970
- [Roh] ROHNEN, Armin: *Frequenzanalyse: Praktischer Leitfaden zur Anwendung der Frequenzanalyse*. – [www.schwingungsanalyse.com/Schwingungsanalyse/Frequenzanalyse\\_files/13\\_ordnungsanalyse.pdf](http://www.schwingungsanalyse.com/Schwingungsanalyse/Frequenzanalyse_files/13_ordnungsanalyse.pdf), abgerufen am 25.10.2019, 2013
- [RRTP78] RICHALET, J. ; RAULT, A. ; TESTUD, J. L. ; PAPON, J.: Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. In: *Automatica* 14 (1978), S. 413–428
- [RS12] RAHIDEH, A. ; SHAHEED, M.H.: Constrained output feedback model predictive control for nonlinear systems. In: *Control Engineering Practice* 20 (2012), Nr. 4, S. 431–443
- [RSKL12] ROSENBERGER, Martin ; SCHINDELE, Freder ; KOCH, Tilo ; LIENKAMP, Markus: Analyse und aktive Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen bei Elektrofahrzeugen während der ABS-Regelung. In: *8. Tag des Fahrwerks*. Aachen, 2012
- [RT10] ROS, J. ; TSAI, W. K.: A Lexicographic Optimization Framework to the Flow Control Problem. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 56 (2010), June, Nr. 6, S. 2875–2886

- [RTL96] RENTMEESTERS, M. J. ; TSAI, W. K. ; LIN, Kwei-Jay: A theory of lexicographic multi-criteria optimization. In: *Proceedings of ICECCS '96: 2nd IEEE International Conference on Engineering of Complex Computer Systems (held jointly with 6th CSESAS and 4th IEEE RTAW)*, 1996, S. 76–79
- [RWD13] RICHTER, Jan ; WINZER, Patrick ; DOPPELBAUER, Martin: Einsatz virtueller Prototypen bei der akausalen Modellierung und Simulation von permanent-erregten Synchronmaschinen. In: *Internationaler ETG Kongress*. Berlin, 2013
- [Sch09] SCHRÖDER, Dierk: *Elektrische Antriebe: Regelung von Antriebssystemen*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009
- [Sch13] SCHRÖDER, Dierk: *Elektrische Antriebe: Grundlagen*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013
- [Sch17] SCHILLER, Anastasia ; SEMIKRON INTERNATIONAL GMBH (Hrsg.): *Technical Explanation SKiiP 3 V3*. Rev04. Nürnberg: SEMIKRON INTERNATIONAL GmbH, August 2017
- [SDJK11] STUMPER, J. ; DOTLINGER, A. ; JUNG, J. ; KENNEL, R.: Predictive control of a permanent magnet synchronous machine based on real-time dynamic optimization. In: *European Conference on Power Electronics and Applications*. Birmingham, UK, 2011
- [SEM07] SEMIKRON INTERNATIONAL GMBH (Hrsg.): *SKiiP 513GD122-3DUL, 6-pack-integrated intelligent Power System*. 16-07-2007 HER. Nuremberg: SEMIKRON INTERNATIONAL GmbH, Juli 2007
- [SGM13] SCOLTOCK, J.a ; GEYER, T.b ; MADAWALA, U.K.a: A comparison of model predictive control schemes for MV induction motor drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 9 (2013), Nr. 2, S. 909–919
- [SK12] SAEIDI, S. ; KENNEL, R.: A novel algorithm for model predictive control of AC electric drives. In: *2012 2nd International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2012
- [SNT85] SAWARAGI, Yoshikazu ; NAKAYAMA, Hirotaka ; TANINO, Tetsuzo: *Theory of multiobjective optimization*. Orlando, USA : Acad. Press, 1985 (Mathematics in science and engineering)
- [SSB19] SHEN, C. ; SHI, Y. ; BUCKHAM, B.: Path-Following Control of an AUV: A Multiobjective Model Predictive Control Approach. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 27 (2019), May, Nr. 3, S. 1334–1342

- [SSD<sup>+</sup>03] STUMBERGER, B. ; STUMBERGER, G. ; DOLINAR, D. ; HAMLER, A. ; TRLEP, M.: Evaluation of saturation and cross-magnetization effects in interior permanent-magnet synchronous motor. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 39 (2003), Sep., Nr. 5, S. 1264–1271
- [Sta88] STADLER, Wolfram: *Fundamentals of Multicriteria Optimization in Engineering and in the Science*. Ney York, NY : Springer Science and Business, 1988
- [TCFB19] TOSO, F. ; CARLET, P. G. ; FAVATO, A. ; BOLOGNANI, S.: On-line Continuous Control Set MPC for PMSM drives current loops at high sampling rate using qpOASES. In: *2019 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2019, S. 6615–6620
- [Thü06] THÜMMEL, Michael: *Modellbasierte Regelung mit nichtlinearen inversen Systemen und Beobachtern von Robotern mit elastischen Gelenken*. München, Technische Universität München, Dissertation, 2006
- [VB13] VACLAVEK, P. ; BLAHA, P.: PMSM model discretization for Model Predictive Control algorithms. In: *System Integration (SII), 2013 IEEE/SICE International Symposium on*, 2013, S. 13–18
- [Vin03] VINBERG, Ernest B.: *A course in algebra*. Providence, RI : American Mathematical Society, 2003 (Graduate studies in mathematics)
- [VRR<sup>+</sup>17] VAZQUEZ, S. ; RODRIGUEZ, J. ; RIVERA, M. ; FRANQUELO, L. G. ; NORAMBUENA, M.: Model Predictive Control for Power Converters and Drives: Advances and Trends. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 64 (2017), Feb, Nr. 2, S. 935–947
- [Wan09] WANG, Liuping: *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. London : Springer-Verlag, 2009 (Advances in Industrial Control)
- [WBL13] WALLSCHEID, Oliver ; BÖCKER, Prof J. ; LEISTUNGSELEKTRONIK, Fachgebiet: Wirkungsgradoptimale Arbeitspunktsteuerung für einen permanenterregten Synchronmotor mit vergrabenen Magneten unter Berücksichtigung von Temperatureinflüssen Efficiency-Optimal Operation Point Control for an Interior Permanent Magnet Synchronous Motor C. In: *Internationaler ETG-Kongress*. Berlin : VDE Verlag GMBH, November 2013
- [WR15] WINZER, Patrick ; RICHTER, Jan: *ETI Model Library: Schaeffler PSM Data Sets Overview*. Internes Datenblatt, Elektrotechnisches Institut (ETI) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT). 2015
- [Yan14] YAN, Min: Extension of Convex Function. In: *Journal of Convex Analysis* 21(4) (2014), S. 965–987



- [YPK14] YILDIRIM, M. ; POLAT, M. ; KÜRÜM, H.: A survey on comparison of electric motor types and drives used for electric vehicles. In: *2014 16th International Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition*, 2014, S. 218–223
- [YWX<sup>+</sup>16] YAN, Y. ; WANG, S. ; XIA, C. ; WANG, H. ; SHI, T.: Hybrid Control Set-Model Predictive Control for Field-Oriented Control of VSI-PMSM. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 31 (2016), Dec, Nr. 4, S. 1622–1633
- [YXY<sup>+</sup>17] YUNTAO, S. ; XIANG, X. ; YUAN, Z. ; HENGJIE, Z. ; DEHUI, S.: Design of explicit model predictive control for PMSM drive systems. In: *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, 2017, S. 7389–7395
- [ZDJM17] ZANELLI, A. ; DOMAHIDI, A. ; JEREZ, J. ; MORARI, M.: FORCES NLP: an efficient implementation of interior-point methods for multistage nonlinear nonconvex programs. In: *International Journal of Control* (2017), S. 1–17
- [ZF92] ZURMÜHL, Rudolf ; FALK, Sigurd: *Matrizen und ihre Anwendungen*. Bd. 1: Grundlagen. 6., vollst. neubearb. Aufl. Berlin : Springer, 1992
- [ZK11] ZAREPISHEH, M. ; KHORRAM, E.: On the transformation of lexicographic nonlinear multiobjective programs to single objective programs. In: *Mathematical Methods of Operations Research* 74 (2011), Oct, Nr. 2, S. 217–231
- [ZM95] ZHENG, A. ; MORARI, M.: Stability of model predictive control with mixed constraints. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (1995), Oct, Nr. 10, S. 1818–1823
- [ZXLM17] ZOU, J. ; XU, W. ; LIU, Y. ; MU, C.: Multistep model predictive control for permanent magnet synchronous machine. In: *2017 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2017, S. 525–531

## Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

- [KSP<sup>+</sup>16] KREBS, Stefan ; SCHNURR, Christoph ; PFEIFER, Martin ; WEIGOLD, Jörg ; HOHMANN, Sören: Reduced-order hybrid interval observer for verified state estimation of an induction machine. In: *Control Engineering Practice* 57 (2016), S. 157–168
- [KSP<sup>+</sup>17] KREBS, Stefan ; SCHNURR, Christoph ; PFEIFER, Martin ; HOHMANN, Sören ; WEIGOLD, Jörg ; DAIMLER AG (INHABER) ; KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (INHABER): *Verfahren zur Zustandsschätzung einer Asynchronmaschine*. DE102015014755A1, 18.05.2017

- [SHK18a] SCHNURR, Christoph ; HOHMANN, Sören ; KOLB, Johannes: Non-linear MPC for winding loss optimised torque control of anisotropic PMSM. Poster Presentation at the 9th International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD). (2018), 17.–19. April
- [SHK18b] SCHNURR, Christoph ; HOHMANN, Sören ; KOLB, Johannes: Novel Lexicographic MPC for Loss Optimized Torque Control of Nonlinear PMSM. In: *IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)* Copenhagen, Denmark, 2018, S. 690–697
- [SHK19] SCHNURR, Christoph ; HOHMANN, Sören ; KOLB, Johannes: Non-linear MPC for winding loss optimised torque control of anisotropic PMSM. In: *The Journal of Engineering* 17 (2019), S. 4252–4256

## Betreute studentische Arbeiten

- [Dud16] DUDEN, Marco: *Auswahl und Vergleich von Optimierungsalgorithmen für die Modellbasierte Prädiktive Regelung eines elektrischen Antriebs*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016
- [Kru17] KRUG, Christian: *Entwurf eines stationär genauen modellprädiktiven Reglers für elektrische Antriebe*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2017
- [Li17] LI, Yischang: *Parametrierung eines Onlineoptimierers für die Modellprädiktive Regelung von elektrischen Antrieben*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2017
- [Li18] LI, Jiasheng: *Integration of State Constraints into Model Predictive Control of Permanent Magnet Synchronous Motors*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2018
- [Mül18] MÜLLER, Patrick-Leon: *Modellprädiktive Regelung für elektrische Antriebe zur Verlusteinsparung durch Variation der Zwischenkreisspannung*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2018
- [Neu16] NEUMAIER, Dominik R.: *Regelung eines elektrischen Antriebs mittels Explicit Model Predictive Control*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016

- 
- [Par17] PAROTH, Steffen: *Entwicklung von verlustoptimalen Drehmomentreglern für Synchronmaschinen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2017
- [Ste17] STEINHAUSER, Christian: *Entwicklung von Methoden zur Bestimmung wirkungsgradoptimaler stationärer Zustände von E-Maschinen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2017



- Band 01** Diehm, Gunter  
Identifikation des menschlichen Bewegungsverhaltens  
auf der Basis von Primitiven.  
ISBN 978-3-7315-0608-9
- Band 02** Flad, Michael  
Kooperative Regelungskonzepte auf Basis der Spieltheorie  
und deren Anwendung auf Fahrerassistenzsysteme.  
ISBN 978-3-7315-0610-2
- Band 03** Eckert, Marius  
Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme  
und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle.  
ISBN 978-3-7315-0690-4
- Band 04** Krebs, Stefan  
Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme  
und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine.  
ISBN 978-3-7315-0857-1
- Band 05** Kaspar, Stephan  
Fahrodynamikuntersuchungen eines Elektrofahrzeugs  
mit Einzelrad-Hinterradantrieb.  
ISBN 978-3-7315-0916-5
- Band 06** Sauter, Patrick S.  
Modellierung und zentrale prädiktive Regelung  
von multimodalen Energieverteilnetzen.  
ISBN 978-3-7315-0963-9
- Band 07** Kupper, Martin  
Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und  
ihre Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme.  
ISBN 978-3-7315-0971-4
- Band 08** Merkert, Lennart  
Optimal Scheduling of Combined Heat and Power Generation  
Considering Heating Grid Dynamics.  
ISBN 978-3-7315-1056-7

- Band 09** Ludwig, Julian  
**Automatisierte kooperative Transition einer Regelungsaufgabe zwischen Mensch und Maschine am Beispiel des hochautomatisierten Fahrens.**  
ISBN 978-3-7315-1069-7
- Band 10** Inga Charaja, Juan Jairo  
**Inverse Dynamic Game Methods for Identification of Cooperative System Behavior.**  
ISBN 978-3-7315-1080-2
- Band 11** Schnurr, Christoph Xaver  
**Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven Regelung mit der Anwendung auf eine permanenterregte Synchronmaschine.**  
ISBN 978-3-7315-1095-6



Bei der konventionellen Drehmomentregelung von permanentmagneterregten Synchronmaschinen (PSM) werden Soll Drehmomente unter der Berücksichtigung von Leistungsverlusten durch statische Kennfelder in Sollströme überführt. Dieses Vorgehen ist dynamisch suboptimal, interdependent und stark maschinenabhängig. Diese Arbeit widmet sich der Frage: Wie kann ein Model Predictive Controller (MPC) entworfen werden, durch welchen die Ziele Drehmomenterreicherung und Verlustminimierung simultan optimiert werden, und wie können die gesteigerten Anforderungen in der Elektromobilität durch diesen Ansatz erfüllt werden?

Hierfür wird die Beschreibung des Regelziels im MPC als multikriterielles lexikographisches Optimierungsproblem (LOP) formuliert, was einer strengen Priorisierung der beiden Regelziele entspricht. Um diesen Ansatz für echtzeitfähige Systeme tauglich zu machen, wird für die Integration des LOP in den MPC eine neue Methode vorgeschlagen, die beide Regelziele in eine Gütefunktion transformiert. Die Anforderungen der Elektromobilität werden im MPC durch die Berücksichtigung der Nichtlinearität des magnetischen Kreises – insbesondere Sättigung, Reluktanz und Kreuzverkopplung – sowie exakter Spannungs- und Strombegrenzung berücksichtigt.

Durch die neue zugeschnittene Methode wird die mittlere Berechnungszeit des LOP deutlich verringert und gleichzeitig das Regelergebnis verbessert. Die Analyse der Potentiale dieses Ansatzes erfolgt im Vergleich mit einem PI-Zustandsregler durch die Untersuchung der jeweils erzielbaren Regelergebnisse in anwendungsnahen Szenarien. Bei der Anwendung der Regler auf die Kompensation von Getriebschwingungen im Antriebsstrang eines Elektrofahrzeugs zeigt das vorgeschlagene Verfahren zusätzliche Potentiale für schnelle dynamische Vorgänge an den Betriebsgrenzen.