7.1.1 Definition einer linearen Abbildung

Es seien V und W zwei Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ (normalerweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

► **Definition 7.1 (Lineare Abbildung)**

Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt **linear**, falls sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(L1) $F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ **(Additivität)**

(L2) $F(\alpha\, \boldsymbol{v}) = \alpha\, F(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}$ **(Homogenität)** ◄

Bemerkung

Bedingungen (L1) und (L2) heißen **Linearitätsbedingungen**. Sie besagen, dass es bei linearen Abbildungen keine Rolle spielt, ob man zuerst zwei Vektoren addiert und dann deren Summe mit F abbildet oder zuerst die Vektoren separat abbildet und dann die Summe der Resultate bildet (Abb. 7.2). Das gleiche Prinzip gilt auch bei der Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer Zahl aus $\mathbb{K}$.

Praxistipp

Die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) kann man zu einer einzigen äquivalenten kompakten Bedingung zusammenfassen:

$$\textbf{(L)} \qquad F(\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \alpha F(\boldsymbol{v}) + \beta F(\boldsymbol{w}) \tag{7.1}$$

für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. In der Praxis kann man entweder Bedingungen (L1) und (L2) oder die kompakte Bedingung (L) überprüfen.

► **Beispiel**

Man betrachte die Abbildungen $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F_1\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}, \quad F_2\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 + v_2 \\ 1 - v_2 \end{bmatrix}.$$

F_1 ist linear (vgl. Übung 7.1). F_2 ist aber **nicht** linear. Die Probleme sind die quadratischen Terme im ersten Eintrag und der konstante Term im dritten Eintrag (vgl. Übung 7.1). ◄

Praxistipp

Allgemein: Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ darf grundsätzlich nur Terme der Form $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ enthalten, aber keine quadratischen Terme oder höhere Potenzen, ebenso keine konstanten Terme und nichtlineare Terme (wie $\sin(v_1)$, $e^{v_1+v_2} \log(v_3)$, usw.).

7.1.4 Beispiele

Übung 7.1

∘ ∘ ∘ Sind die folgenden Abbildungen linear?

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}.$$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 + v_2 \\ 1 - v_2 \end{bmatrix}.$$

c) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix}.$$

d) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + 2 \\ v_1 + v_2 + 1 \\ v_1 - v_3 + 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung

a) Ja. Wir müssen einfach nachweisen, dass F die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) erfüllt. Es seien $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2]^T \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2]^T \in \mathbb{R}^2$ sowie die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt:

$$\textbf{(L1)}\ \ F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \overset{\text{Def.}}{=} F\begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ w_1 + w_2 \end{bmatrix}$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}) \ \checkmark$$

$$\textbf{(L2)}\ \ F(\alpha \boldsymbol{v}) = F\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \alpha v_1 - \alpha v_2 \\ \alpha v_1 \alpha w_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(\boldsymbol{v}) \ \checkmark$$

Da beide Bedingungen (L1) und (L2) erfüllt sind ist F linear.

b) Nein. (L2) ist nicht erfüllt. Ein Gegenbeispiel genügt: Für $\boldsymbol{v} = [1, 0]^T$ gilt

$$F(2\boldsymbol{v}) = F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2^2 - 0^2 \\ 2 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ aber } 2F(\boldsymbol{v}) = 2\begin{bmatrix} 1^2 - 0^2 \\ 1 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} ✗$$

Die gegebene Abbildung ist somit *nicht* linear. Das Problem sind die quadratischen Terme in der ersten Komponente sowie der konstante Term in der dritten Komponente.

c) Ja. Denn F erfüllt die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2). Konkret seien $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T \in \mathbb{R}^4$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$\textbf{(L1)}\ \ F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = F\begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \\ v_4 + w_4 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) + 3(v_3 + w_3) \\ (v_1 + w_1) + (v_3 + w_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - 2w_2 + 3w_3 \\ w_1 + w_3 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}) \checkmark$$

$$\textbf{(L2)}\ \ F(\alpha\boldsymbol{v}) = F\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \\ \alpha v_4 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \alpha v_1 - 2\alpha v_2 + 3\alpha v_3 \\ \alpha v_1 + \alpha v_3 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(\boldsymbol{v}) \checkmark$$

d) Nein. Denn (L1) ist nicht erfüllt:

$$F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) + 2 \\ (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + 1 \\ (v_1 + w_1) - (v_3 + w_3) + 3 \end{bmatrix}$$

aber

$$F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + 2 \\ v_1 + v_2 + 1 \\ v_1 - v_3 + 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2 \\ w_1 + w_2 + 1 \\ w_1 - w_3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 - v_2 - w_2 + 4 \\ v_1 + w_1 + v_2 + w_2 + 2 \\ v_1 + w_1 - v_3 - w_3 + 6 \end{bmatrix}$$

d. h. $F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \neq F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w})$. Das Problem sind die konstanten Terme. ∎

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem zentralen Thema der linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

LERNZIELE

Nach gewissenhaftem Bearbeiten des ► Kap. 7 sind Sie in der Lage:
- lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen und deren Eigenschaften zu verstehen und zu verifizieren,
- die wichtigsten speziellen linearen Abbildungen bzw. Morphismen zu unterscheiden,
- den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Darstellungsmatrizen zu erklären,
- Darstellungsmatrizen von linearen Abbildungen bezüglich vorgegebenen Basen zu bestimmen,
- wichtige lineare Abbildungen geometrisch interpretieren und deren Matrixdarstellungen bestimmen und anwenden zu können,
- Klassifikation von linearen Abbildungen wie Streckungen, Rotationen, Spiegelungen und Projektionen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ zu erklären und anzuwenden.

7.1 Lineare Abbildungen

7.1.1 Definition einer linearen Abbildung

Es seien V und W zwei Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ (normalerweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

► Definition 7.1 (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt **linear**, falls sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(L1) $F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ **(Additivität)**

(L2) $F(\alpha\, \boldsymbol{v}) = \alpha\, F(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}$ **(Homogenität)** ◄

Bemerkung

Bedingungen (L1) und (L2) heißen **Linearitätsbedingungen**. Sie besagen, dass es bei linearen Abbildungen keine Rolle spielt, ob man zuerst zwei Vektoren addiert und dann deren Summe mit F abbildet oder zuerst die Vektoren separat abbildet und dann die Summe der Resultate bildet (Abb. 7.2). Das gleiche Prinzip gilt auch bei der Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer Zahl aus $\mathbb{K}$.

Praxistipp

Die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) kann man zu einer einzigen äquivalenten kompakten Bedingung zusammenfassen:

$$\text{(L)} \qquad F(\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \alpha F(\boldsymbol{v}) + \beta F(\boldsymbol{w}) \tag{7.1}$$

für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. In der Praxis kann man entweder Bedingungen (L1) und (L2) oder die kompakte Bedingung (L) überprüfen.

Vektorraum Homomorphismen

Eine allgemeine lineare Abbildung $F : V \to W$ nennt man auch einen **Homomorphismus** zwischen den Vektorräumen V und W. Homomorphismen und lineare Abbildungen sind synonym.

Bemerkung

Das Wort Homomorphismus stammt aus dem Griechischen und bedeutet „homo = gleiche“ und „morphé = Form“. Ein Homomorphismus ist also eine Abbildung, welche „die Struktur unverändert lässst“. Da die lineare Algebra sich mit Vektorräumen beschäftigt, wollen wir sicherstellen, dass solche Homomorphismen die Vektorraumstruktur von V und W erhalten bzw. respektieren. Diese umfasst sowohl die **additive Struktur** $F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w})$ als auch die **skalare Multiplikationsstruktur** $F(\alpha\, \boldsymbol{v}) = \alpha\, F(\boldsymbol{v})$. Man erkennt, dass ein Homomorphismus in der linearen Algebra nichts anderes ist als ein anderer Begriff für lineare Abbildungen.

Eigenschaften von linearen Abbildungen

► Satz 7.1 (Wichtige Eigenschaften von linearen Abbildungen)

- Für jede lineare Abbildung $F : V \to W$ gilt stets $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- Lineare Abbildungen $F : V \to W$ bilden Linearkombinationen auf Linearkombinationen ab:

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i F(\boldsymbol{v_i}), \quad \boldsymbol{v_i} \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

- Die Zusammensetzung von linearen Abbildungen ist wiederum eine lineare Abbildung. Genauer: Es seien $F : V \to W$ und $G : W \to Z$ linear. Dann ist die Komposition $G \circ F : V \to Z$ linear. ◄

► Beispiel

Alle lineare Abbildungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind von der Form $F(x) = a\,x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Denn man kann leicht die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) für $F(x) = a\,x$ nachweisen:

(L1) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$F(x+y) \overset{\text{Def.}}{=} a(x+y) = a\,x + a\,y \overset{\text{Def.}}{=} F(x) + F(y)\ \checkmark$$

(L2) Es seien $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$F(\alpha\, x) \overset{\text{Def.}}{=} a(\alpha\, x) = \alpha\,(a\,x) \overset{\text{Def.}}{=} \alpha\, F(x)\ \checkmark \quad ◄$$

Bemerkung

Beachte, dass $F(x) = a\,x + b$ mit $b \neq 0$ **nicht** linear ist. Tatsächlich ist z. B. Bedingung (L1) nicht erfüllt:

$$F(x+y) \overset{\text{Def.}}{=} a(x+y) + b \ \text{ aber } \ F(x) + F(y) \overset{\text{Def.}}{=} (a\,x+b) + (a\,y+b)\ ✗$$

$F(x) = a\,x + b$ ist eine sogenannte **affine Abbildung**.

► Beispiel

Man betrachte die Abbildungen $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F_1\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}, \quad F_2\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 + v_2 \\ 1 - v_2 \end{bmatrix}.$$

F_1 ist linear (vgl. Übung 7.1). F_2 ist aber **nicht** linear. Die Probleme sind die quadratischen Terme im ersten Eintrag und der konstante Term im dritten Eintrag (vgl. Übung 7.1). ◄

Praxistipp

Allgemein: Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ darf grundsätzlich nur Terme der Form $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ enthalten, aber keine quadratischen Terme oder höhere Potenzen, ebenso keine konstanten Terme und nichtlineare Terme (wie $\sin(v_1)$, $e^{v_1+v_2}$ $\log(v_3)$, usw.).

► Beispiel

Es sei $V = P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Dann definiert die Ableitung-Abbildung $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$

$$F(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx} = p'(x)$$

eine lineare Abbildung (vgl. Übung 7.3). ◄

► Beispiel

Es sei $V = C^0([0, 1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen über $[0, 1]$. Dann ist die Abbildung $F : C^0([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx$$

linear (vgl. Übung 7.4). ◄

7.1.2 Spezielle lineare Abbildungen

Einige spezielle lineare Abbildungen bzw. Homomorphismen haben einen gesonderten Namen (Abb. 7.1):

► Definition 7.2 (Definition)

- F heißt **Endomorphismus** $\Leftrightarrow$ F ist linear und $W = V$.
- F heißt **Isomorphismus** $\Leftrightarrow$ F ist linear und bijektiv.
- F heißt **Automorphismus** (oder **Monomorphismus**) $\Leftrightarrow$ F ist linear, bijektiv und $W = V$.

◄

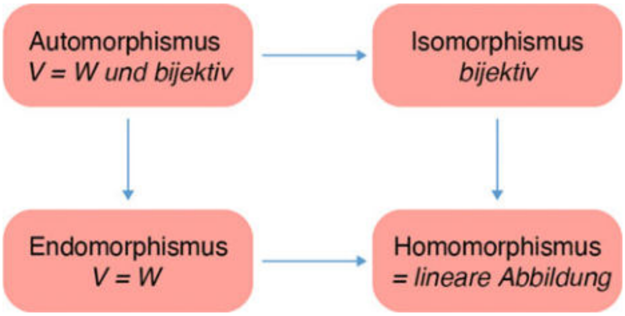

Abb. 7.1 Zusammenhang der Begriffe

7.1.3 Die Abbildungsräume Hom(*V*, *W*) und End(*V*)

▶ Definition 7.3 (Definition von Hom(*V*, *W*) und End(*V*))

- Die Menge aller linearen Abbildungen (Homomorphismen) von V nach W bezeichnet man mit:

$$\boxed{\mathrm{Hom}(V, W) := \{F : V \to W \mid F \text{ ist linear}\}} \tag{7.2}$$

- Im Falle $W = V$ bezeichnet man die Menge aller Endomorphismen (d. h. linearen Abbildungen von V auf V) mit:

$$\boxed{\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V) = \{F : V \to V \mid F \text{ ist linear}\}} \tag{7.3}$$

◀

Hom(*V*, *W*) und End(*V*) sind Vektorräume

Es seien $F, G \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann verstehen wir unter $F + G$ und $a\,F$ die Abbildungen definiert durch

$$(F + G)(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}) + G(\boldsymbol{v}), \quad (a\,F)(\boldsymbol{v}) = a\,F(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{7.4}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Abbildungen $F + G$ und $a\,F$ wieder linear sind, d. h. $F + G, a\,F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ (vgl. Übung 7.7). Die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist somit **abgeschlossen bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen**. Daraus folgt:

▶ Satz 7.2 (Hom(*V*, *W*) und End(*V*) sind Vektorräume)

$\mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mathrm{End}(V)$ versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen **sind Vektorräume** über $\mathbb{K}$. ◀

7.1.4 Beispiele

Übung 7.1

∘ ∘ ∘ Sind die folgenden Abbildungen linear?

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}.$$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 + v_2 \\ 1 - v_2 \end{bmatrix}.$$

c) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix}.$$

d) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + 2 \\ v_1 + v_2 + 1 \\ v_1 - v_3 + 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung

a) Ja. Wir müssen einfach nachweisen, dass F die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) erfüllt. Es seien $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2]^T \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2]^T \in \mathbb{R}^2$ sowie die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt:

$$\textbf{(L1)}\ \ F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \overset{\text{Def.}}{=} F\begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ w_1 + w_2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w})\ \checkmark$$

$$\textbf{(L2)}\ \ F(\alpha\boldsymbol{v}) = F\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \alpha v_1 - \alpha v_2 \\ \alpha v_1 \alpha w_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(\boldsymbol{v})\ \checkmark$$

Da beide Bedingungen (L1) und (L2) erfüllt sind ist F linear.

b) Nein. (L2) ist nicht erfüllt. Ein Gegenbeispiel genügt: Für $\boldsymbol{v} = [1, 0]^T$ gilt

$$F(2\boldsymbol{v}) = F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2^2 - 0^2 \\ 2 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{aber} \quad 2F(\boldsymbol{v}) = 2\begin{bmatrix} 1^2 - 0^2 \\ 1 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \ ✗$$

Die gegebene Abbildung ist somit *nicht* linear. Das Problem sind die quadratischen Terme in der ersten Komponente sowie der konstante Term in der dritten Komponente.

c) Ja. Denn F erfüllt die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2). Konkret seien $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T \in \mathbb{R}^4$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$\textbf{(L1)}\ \ F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = F\begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \\ v_4 + w_4 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) + 3(v_3 + w_3) \\ (v_1 + w_1) + (v_3 + w_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - 2w_2 + 3w_3 \\ w_1 + w_3 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}) \ ✓$$

$$\textbf{(L2)}\ \ F(\alpha\boldsymbol{v}) = F\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \\ \alpha v_4 \end{bmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \alpha v_1 - 2\alpha v_2 + 3\alpha v_3 \\ \alpha v_1 + \alpha v_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(\boldsymbol{v}) \ ✓$$

d) Nein. Denn (L1) ist nicht erfüllt:

$$F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) + 2 \\ (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + 1 \\ (v_1 + w_1) - (v_3 + w_3) + 3 \end{bmatrix}$$

aber

$$F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + 2 \\ v_1 + v_2 + 1 \\ v_1 - v_3 + 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2 \\ w_1 + w_2 + 1 \\ w_1 - w_3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 - v_2 - w_2 + 4 \\ v_1 + w_1 + v_2 + w_2 + 2 \\ v_1 + w_1 - v_3 - w_3 + 6 \end{bmatrix}$$

d. h. $F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \neq F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w})$. Das Problem sind die konstanten Terme. ■

Übung 7.2

∘ ∘ ∘ Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Man zeige, dass die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\boldsymbol{v} \to F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ linear ist.

Lösung

Wir weisen einfach die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) nach. Es seien $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Mit den Rechenregeln für Matrizen und Vektoren folgt dann:

(L1) $F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \overset{\text{Def.}}{=} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} \overset{\text{Def.}}{=} F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{w})$ ✓

(L2) $F(\alpha\, \boldsymbol{v}) \overset{\text{Def.}}{=} \boldsymbol{A}(\alpha\, \boldsymbol{v}) = \alpha\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(\boldsymbol{v})$ ✓

Somit ist F linear. ■

Übung 7.3

○ ○ ○ Sei $P_n(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Man zeige, dass die Ableitung $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, $F(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx} = p'(x)$ ein Homomorphismus ist. Ist F ein Endomorphismus? Ist F ein Automorphismus?

Lösung

Wir müssen nur überprüfen, dass die Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) erfüllt sind. Es seien also $p(x), q(x) \in P_n(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(L1) Weil man die Summe von Funktionen gliedweise differenzieren kann, haben wir:
$F(p(x)+q(x)) \overset{\text{Def.}}{=} (p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x) \overset{\text{Def.}}{=} F(p(x)) + F(q(x))$ ✓

(L2) Es gilt: $F(\alpha p(x)) \overset{\text{Def.}}{=} (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) \overset{\text{Def.}}{=} \alpha F(p(x))$ ✓

Somit ist F linear, also ein Homomorphismus. Weil der Ausgangs- und Zielvektorraum übereinstimmen, ist F ein Endomorphismus. Beachte, dass F nicht injektiv ist, denn

$$F(x+2) = (x+2)' = 1 = (x+1)' = F(x+1).$$

Weil F nicht injektiv ist, kann F nicht bijektiv sein, also *kein* Automorphismus. ■

Übung 7.4

○ ○ ○ Es sei $V = C^0([0,1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Man verifiziere die Linearität der Abbildung $F : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Lösung

Um eine vorgegebene Abbildung auf Linearität zu überprüfen, muss man entweder (L1) und (L2) oder die äquivalente Bedingung (L) nachweisen. Um dies nochmals deutlich zu machen, werden wir in diesem Beispiel die Bedingung (L) anwenden. Es seien $\varphi(x), \psi(x) \in C^0([0,1])$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aus den Eigenschaften des Integrals folgt:

$$F(\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)) \overset{\text{Def.}}{=} \int_0^1 (\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x))dx = \lambda\int_0^1 \varphi(x)dx + \mu\int_0^1 \psi(x)dx$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} \lambda F(\varphi(x)) + \mu F(\psi(x)) \checkmark$$

Somit ist F linear. ■

Übung 7.5

• ∘ ∘ Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}^T$

b) $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}\to\text{Spur}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^n a_{ii}$

c) $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}\to\det(\boldsymbol{A})$

d) $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{AM}$ mit $\boldsymbol{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$

Lösung

a) Ja. Es seien $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:
(L1) $F(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T=F(\boldsymbol{A})+F(\boldsymbol{B})$ ✓
(L2) $F(\alpha\boldsymbol{A})=(\alpha\boldsymbol{A})^T=\alpha\boldsymbol{A}^T=\alpha F(\boldsymbol{A})$ ✓
Weil beide Linearitätsbedingungen (L1) und (L2) erfüllt sind, ist F linear.

b) Ja. Es seien $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha\in\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\textbf{(L1)}\quad F(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\text{Spur}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^n(a_{ii}+b_{ii})$$
$$=\sum_{i=1}^n a_{ii}+\sum_{i=1}^n b_{ii}=\text{Spur}(\boldsymbol{A})+\text{Spur}(\boldsymbol{B})=F(\boldsymbol{A})+F(\boldsymbol{B})\checkmark$$
$$\textbf{(L2)}\quad F(\alpha\,\boldsymbol{A})=\text{Spur}(\alpha\,\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^n(\alpha\,a_{ii})=\alpha\sum_{i=1}^n a_{ii}=\text{Spur}(\boldsymbol{A})=\alpha F(\boldsymbol{v})\checkmark$$

c) Nein. (L1) ist nicht erfüllt. Durch ein Gegenbeispiel zeigen wir das. Für $\boldsymbol{A}=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{B}=\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ gilt $\det(\boldsymbol{A})=0$ und $\det(\boldsymbol{B})=0\Rightarrow\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{B})=0$. Andererseits ist $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\det\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]=1$. Wegen $\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{B})\neq\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ ist F *nicht* linear.

d) Ja. Wir zeigen, dass die Bedingung (L) erfüllt ist. Es seien $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Aus den Regeln der Matrixmultiplikation folgt

$$F(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})=(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{M}=\alpha\boldsymbol{AM}+\beta\boldsymbol{BM}=\alpha F(\boldsymbol{A})+\beta F(\boldsymbol{B})\checkmark$$

■

Übung 7.6

• ∘ ∘ Man zeige: Für jede lineare Abbildung $F:V\to W$ gilt $F(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.