PÄDAGOGISCHE
HOCHSCHULE
ZÜRICH

«Das hab ich mir so ausgetüftelt» – Herausfordernde Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht der Primarstufe

Eine Aufgabenkultur, die den Kompetenzaufbau unterstützt –
was bedeutet das für die Begabungs- und Begabtenförderung?

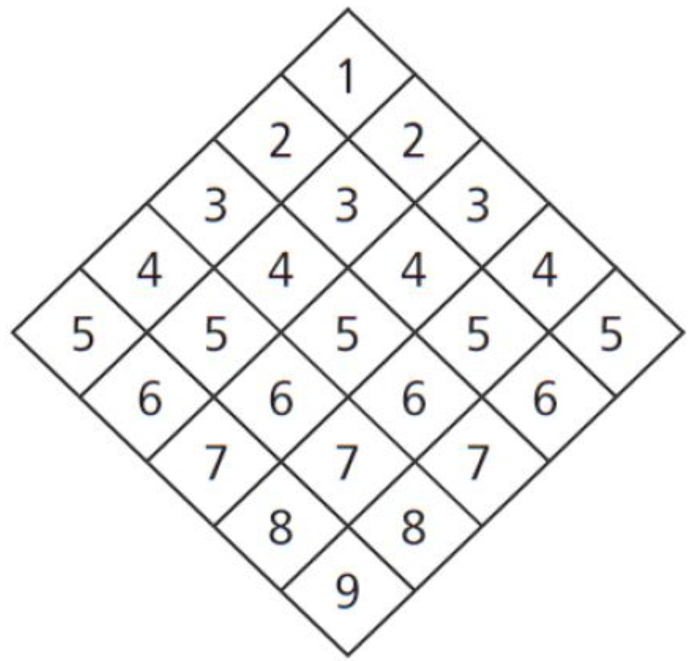
Margret Schmassmann_Barbara Höhtker

Überblick

- Einstimmung
- einige Anmerkungen zu Beginn
- Dossier: Aufgaben variieren
- Fazit: Flexible Differenzierung

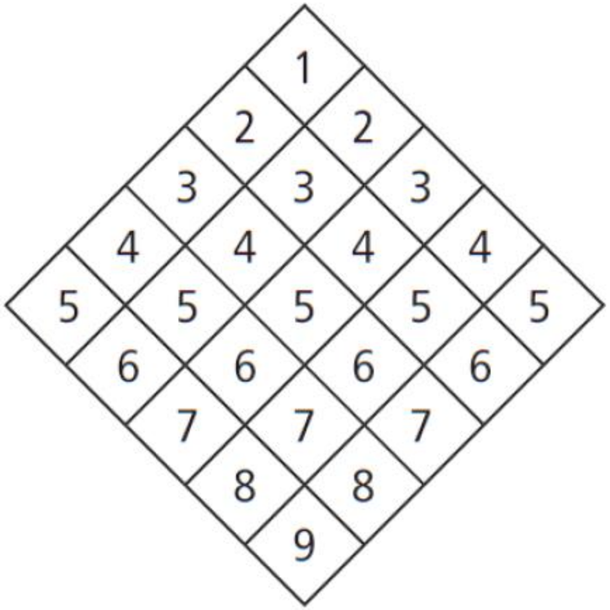
Einstimmung

Berechnen Sie die Summe aller Zahlen des Zahlenfeldes.
Finden Sie verschiedene Wege.
Tauschen Sie sich mit Ihrem Nachbarn/Ihrer Nachbarin aus.



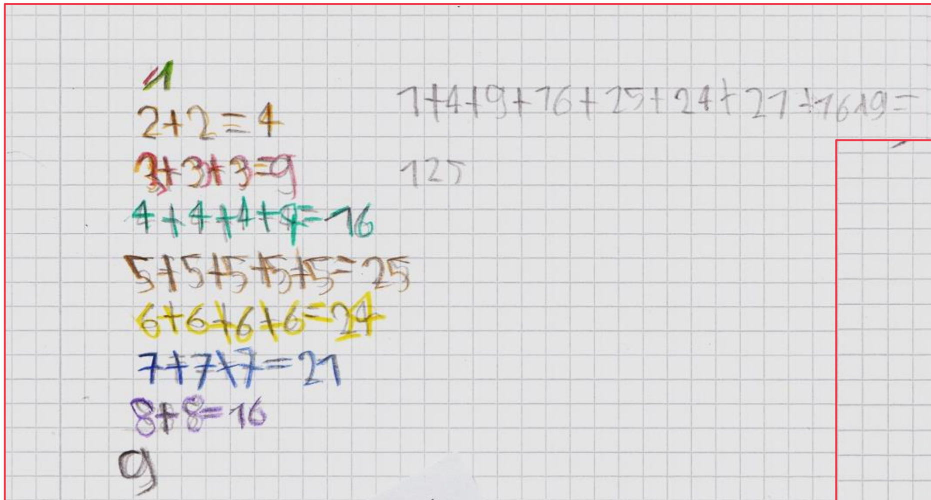
Zahlenfelder: geschicktes Bestimmen der Summen

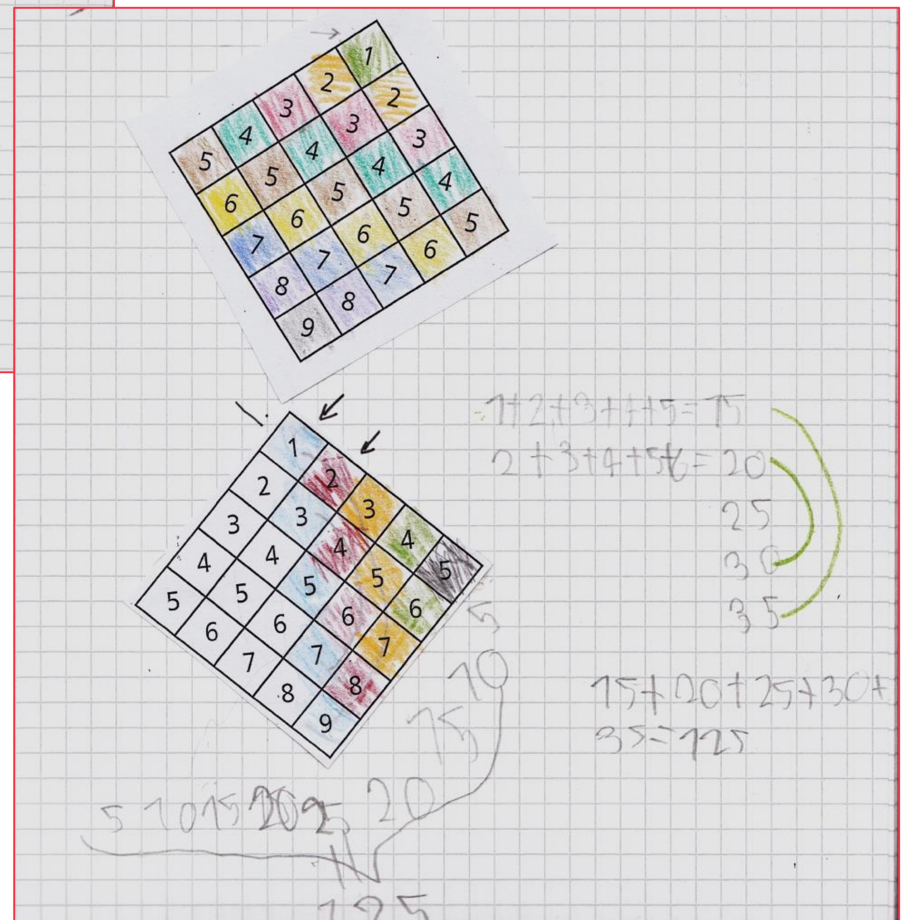
Wie haben Sie es gemacht?



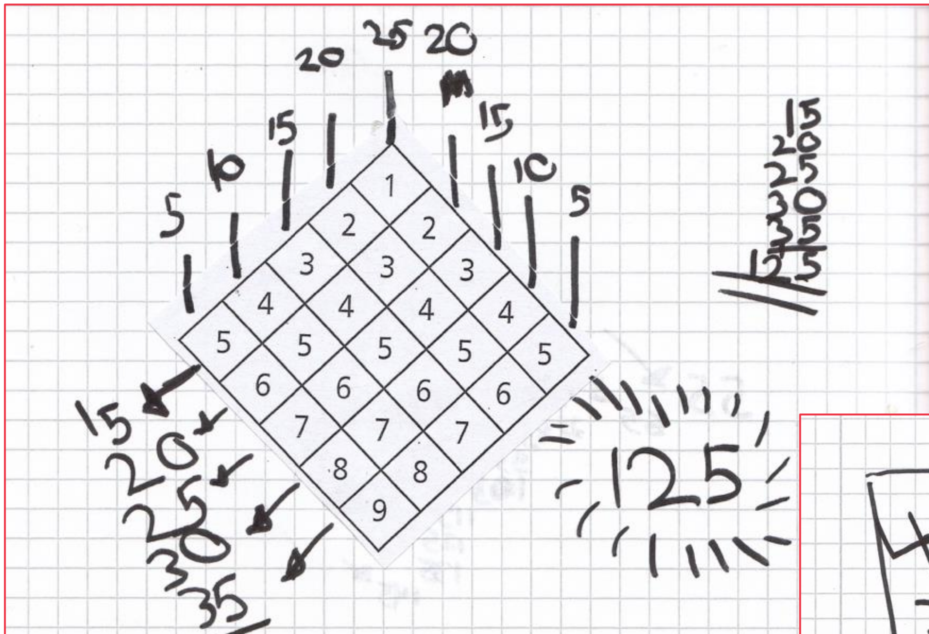
Welche mathematischen Fähigkeiten, welches Wissen und Können, welche Vorgehensweisen haben Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben genutzt?

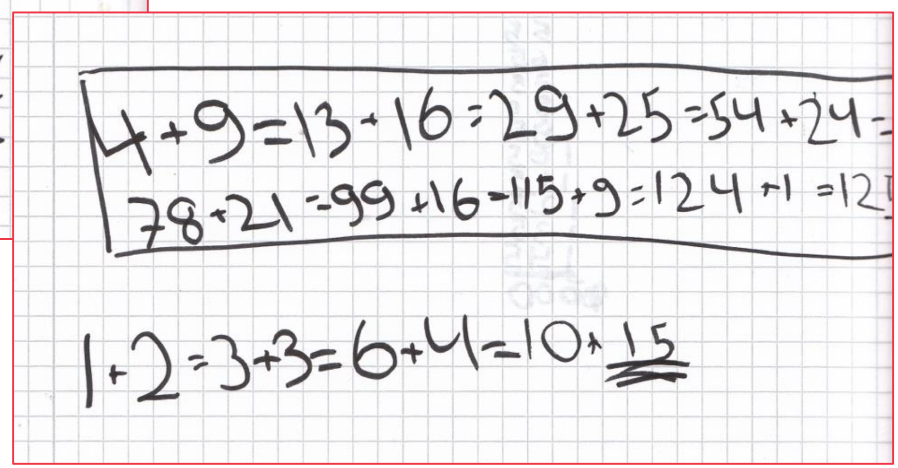
Vorgehensweise Alex, 4. Klasse





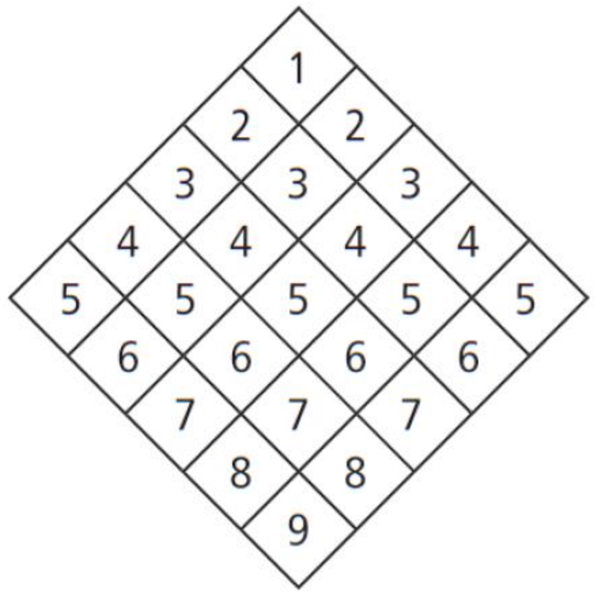
Vorgehensweise Lisa, 5. Klasse





«Reichhaltige Aufgaben»

Beispiel
Zahlenfelder



«rechnen»
Addition/Multiplikation
Rechengesetze nutzen
Geschickt rechnen
(Zahlenblick)

Struktur erforschen
Muster entdecken und nutzen

eigenen Rechenweg darstellen, erklären

begründen

Rechenwege anderer verstehen

argumentieren

Bezug zum Lehrplan 21

		Kompetenzbereiche		
		Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Handlungsaspekte	Operieren und Benennen			
	Erforschen und Argumentieren			
	Mathematisieren und Darstellen			

«Kompetenzen erwerben»

Mathematik lernen

«Was soll gelernt werden?» und «Wie soll gelernt werden?»

Inhaltsbezogene Ziele
Kenntnisse und Fertigkeiten
«Zahl und Variable»
«Form und Raum
«Grössen, Funktionen, Daten und Zufall»

Tätigkeitsbezogene Ziele
Vorgehensweisen
Erforschen, Argumentieren
Begründen
Zusammenhänge herstellen
verallgemeinern

Mathematische «Tätigkeiten und Vorgehensweisen» als Ziel und Weg des Mathematikunterrichtes.

Zur Erinnerung …… (aus der Ausschreibung)

- Mathematische Kompetenz (und mathematisches Verständnis) kann sich nur in der **aktiven Auseinandersetzung mit mathematisch gehaltvollen Aufgabenstellungen** entwickeln. So eröffnet sich ein breites Spektrum an Möglichkeiten für den Erwerb von inhaltlichem Wissen sowie für die Förderung mathematischer Fähigkeiten wie z.B. Erforschen, Begründen und Strukturen erkennen.

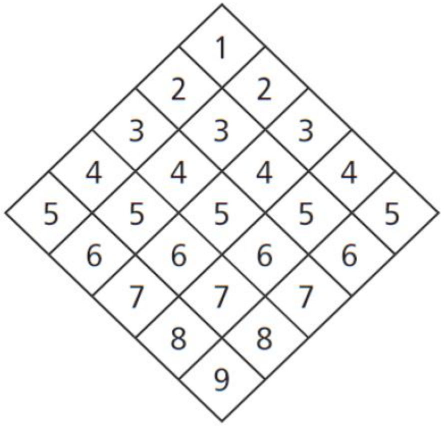
- Auf Grund ihrer **mathematischen Substanz** können solche Aufgaben in vielfältiger Weise **variiert und erweitert** werden, so dass **alle Kinder gefördert** und insbesondere die **Leistungsstarken herausgefordert** werden.

Grundidee:
Das Potential «reichhaltiger Aufgaben» ausschöpfen

Aufgaben variieren, öffnen, weiterentwickeln, erweitern, so dass alle Kinder erfolgreich lernen können:

- im Hinblick auf Anforderungen und Komplexität (einfacher/schwieriger)
- im Hinblick auf die Tiefe der Bearbeitung (Zusammenhänge erforschen, Erklärungen finden, Vermutungen überprüfen, …..)
- Weiterführende Aufträge anbieten und zur Entwicklung eigener Aufgaben anregen
- Lernbegleitung, Hilfen, Tipps und geeignete Materialien anbieten

Aufgaben variieren, erweitern, öffnen…..
Beispiel Zahlenfelder



Startaufgabe

- Berechne die Summe des kleinen Zahlenfeldes (5 mal 5) möglichst geschickt und schreibe deinen Lösungsweg übersichtlich auf.
- Findest du noch eine andere Möglichkeit, die Summe auszurechnen?

Weiterführende Aufträge (Fokus des Ateliers)

Lernangebote für leistungsstarke und besonders begabte Kinder

Unterstützung für Kinder mit Lernschwierigkeiten

Differenzierte Anforderungen/ Vereinfachungen, Variationen, Materialien

Lernbegleitung, Hilfen und Tipps für alle Kinder

Dossier «Aufgaben variieren»

- Wählen Sie eine (oder zwei) der Aufgaben aus dem Dossier aus:

  Zahlenfelder (Fortsetzung)

  Experimentieren mit Dreiecken

  Summe 1000

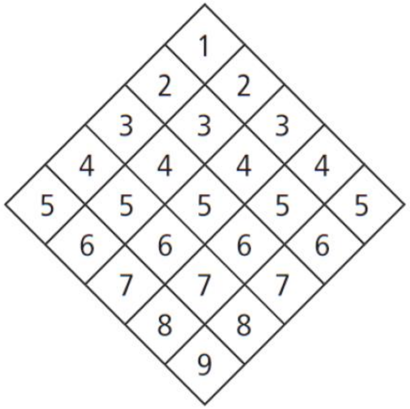
  Froschhüpfen
- Setzen Sie sich mit den gewählten Aufgaben gemäss der jeweiligen Aufträge/Fragestellungen auseinander.
- Tauschen Sie sich mit Ihren Kolleginnen und Kollegen aus.
- Notieren Sie sich Fragen, Anregungen und ggf. neue Ideen.

Mögliche Perspektiven zur Erweiterung der Aufgaben aus dem Dossier

Beispiele

- Zahlentafeln: Strukturanalogien, Vernetzungen
- Dreiecke: systematisches Vorgehen
- Summe 1000: Kombinatorische Teilfragen
- Froschhüpfen: Zahlenmuster – Algebraisieren

Zahlenfelder: Summen berechnen



Startaufgabe

- Berechne die Summe des kleinen Zahlenfeldes (5 mal 5) möglichst geschickt und schreibe deinen Lösungsweg auf.
- Findest du noch eine andere Möglichkeit, die Summe auszurechnen?

Was können alle Kinder lernen?

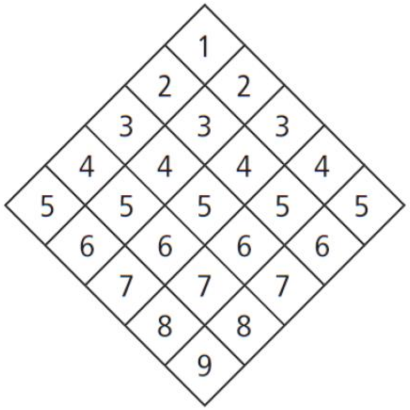
Muster entdecken und nutzen

rechnen
Addition/Multiplikation
Rechengesetze nutzen
Geschickt rechnen (Zahlenblick)

eigenen Rechenweg darstellen, erklären

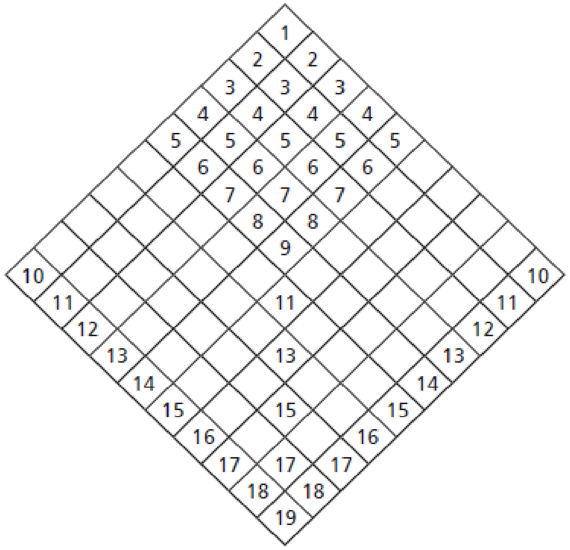
Rechenwege anderer verstehen

Zahlenfelder: Summen berechnen



eine Idee der Weiterarbeit

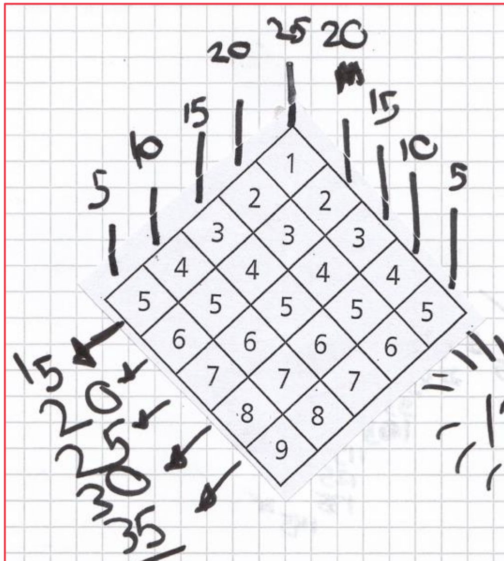
- Berechne auch das grosse Zahlenfeld. Finde verschiedene Wege.
- Entdeckst du einen Zusammenhang des kleinen mit dem grossen Feld und den entsprechenden Summen?



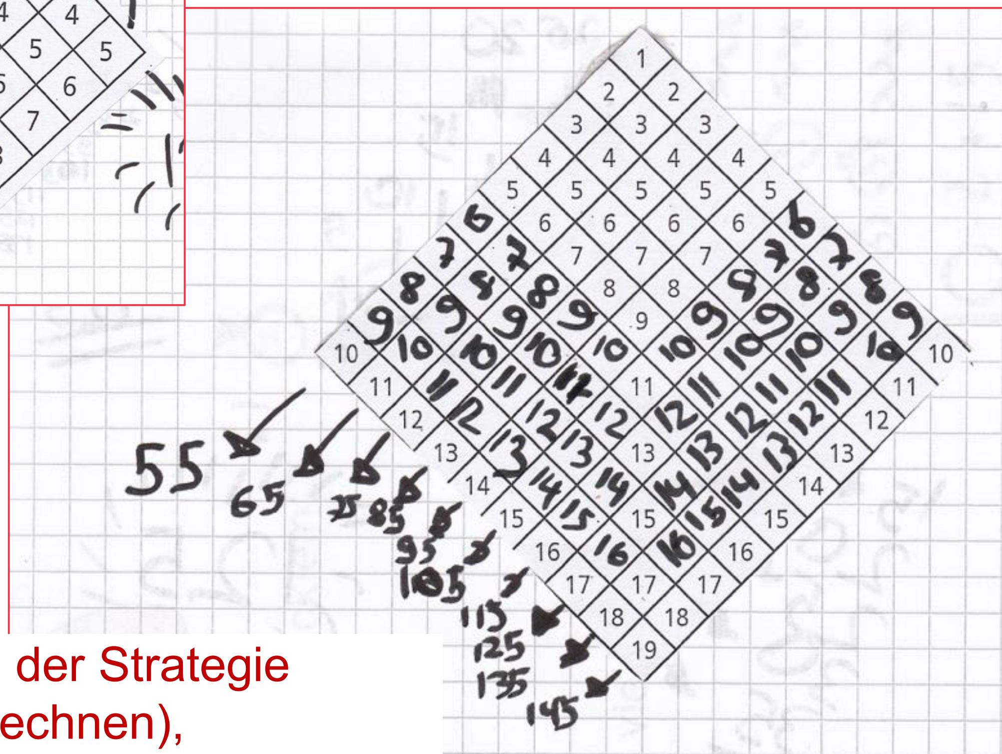
Lernchancen für leistungsstarke Kinder:

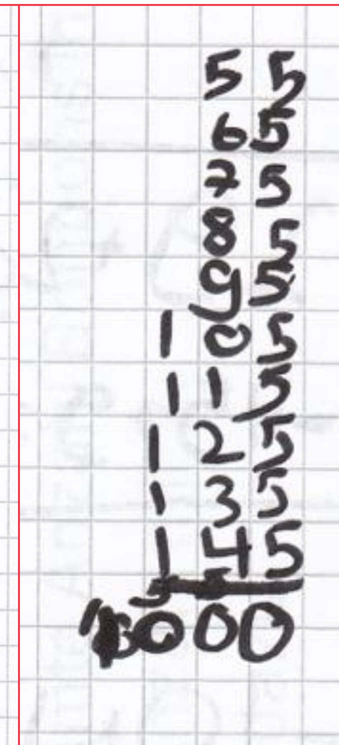
- Struktur erforschen, Muster beschreiben und nutzen
- Zusammenhänge erklären und begründen
- vernetzen, verallgemeinern, Strukturanalogien erkennen

Bearbeitung durch Lisa



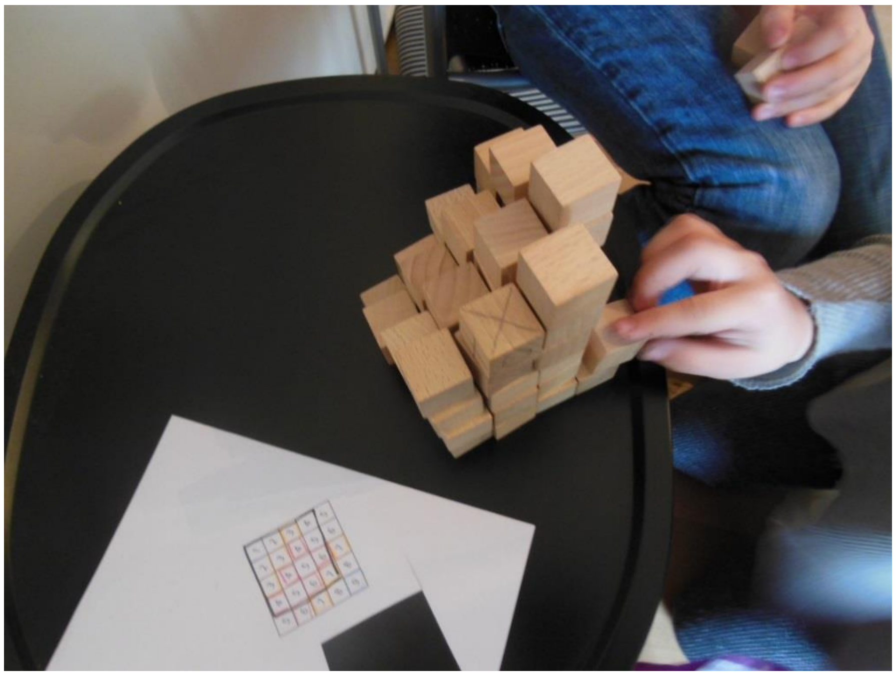
Lisas Vermutung: 10 x 125

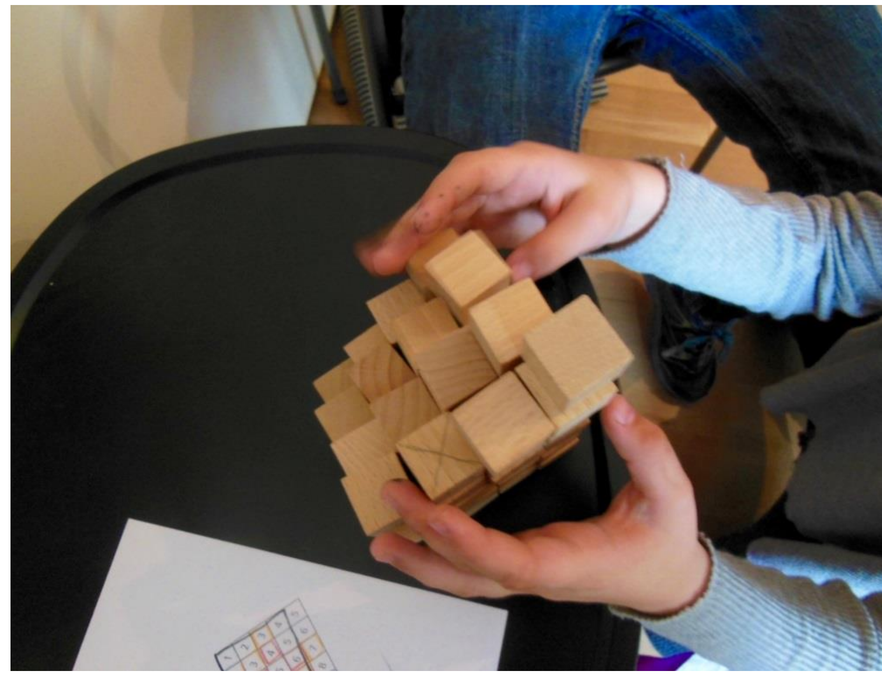




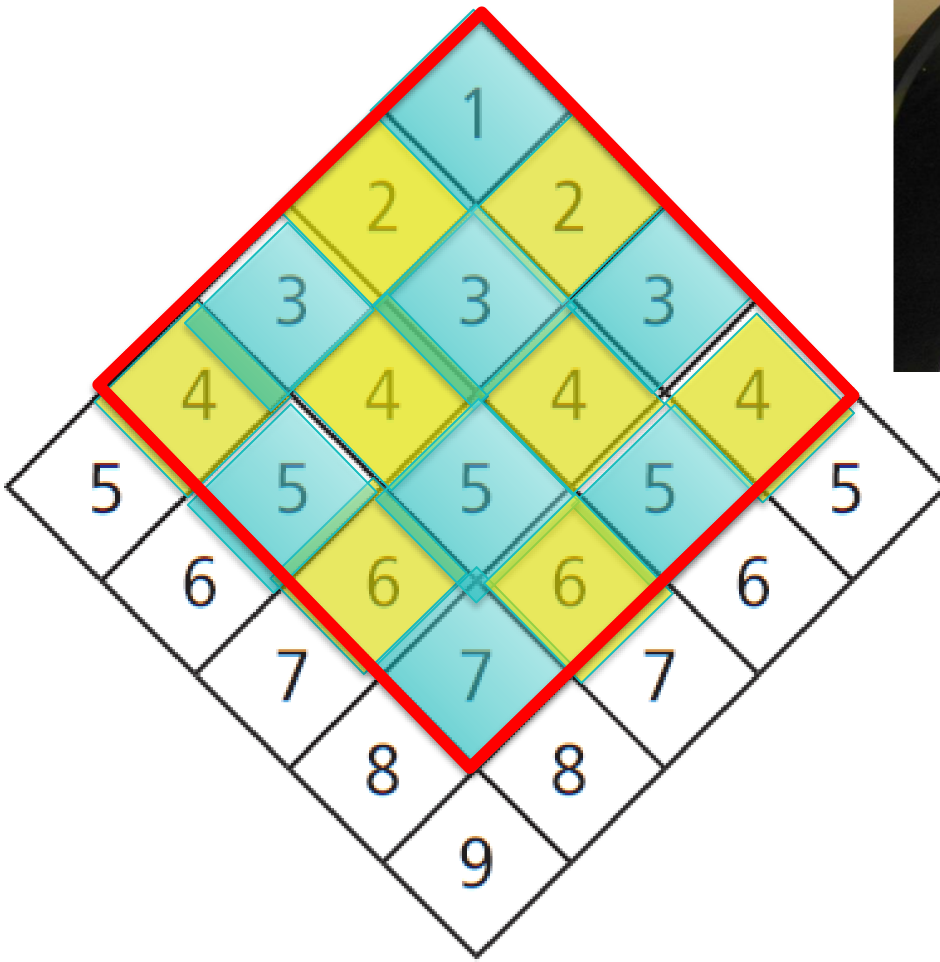
Transferversuch der Strategie (Diagonalen berechnen), anschliessend schlussfolgern auf die Summe der anderen Diagonalen

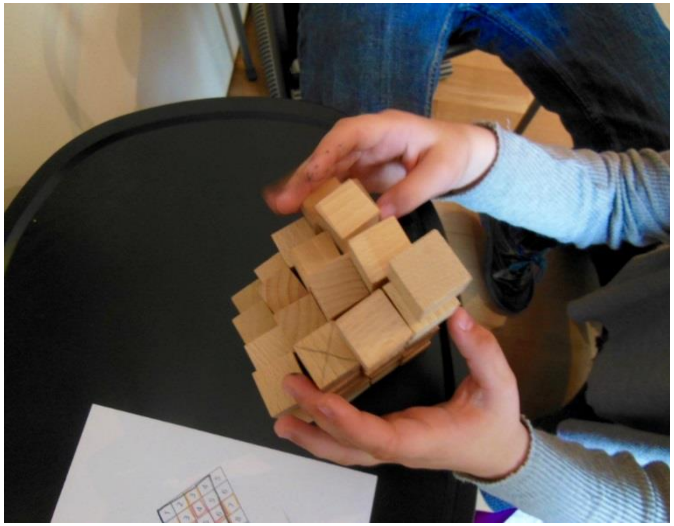
Lisa und Alex: Erkunden der Strukturanalogie Zahlenfeld - Würfelgebäude



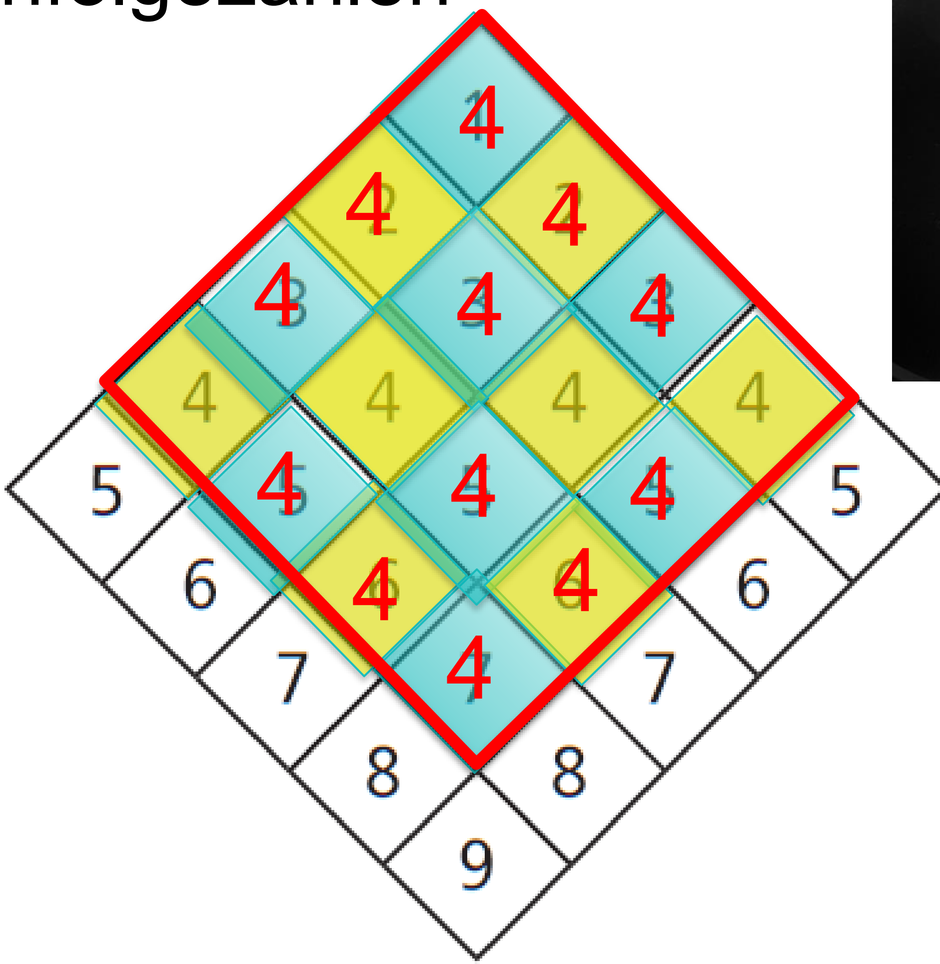


Erkunden der Strukturanalogie Zahlenfeld - Würfelgebäude





Erkunden der Strukturanalogie Würfelgebäude – Reihenfolgezahlen



Ausgleich um die Zahlen der mittleren Reihe:
Summe aller Zahlen im 4x4 Zahlenfeld =
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Wie kann man diese Idee nutzen, um die Summe beliebiger analoger Zahlenfelder zu berechnen?

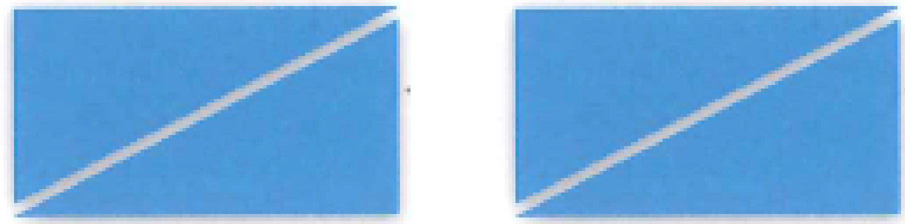
Zahl in der Spitze 1

- Feld 4 x 4 Summe 64
- Feld 5 x 5 Summe 125
- Feld 10 x 10 Summe 1000
- Feld n x n Summe n^3

Verallgemeinerung: Zahl in der oberen Spitze m

- Feld n x n Summe $n^2 \cdot m$

Experimentieren mit Dreiecken

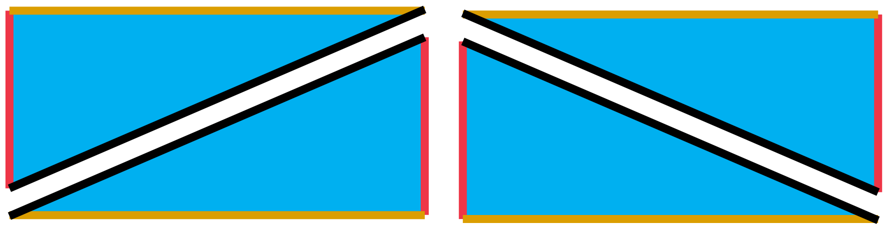


Startaufgabe
- Lege mit **allen vier** Dreiecken verschiedene Vierecke.
- Zeichne die gelegten Vierecke von Hand ab. Zeichne auch die Einteilungen.
- Wie viele verschiedene Vierecke findest du?
- Benenne die Vierecke.

Was können alle Kinder lernen?
- Räumliche Vorstellung
- Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken (Zusammensetzen und Zerlegen)
- Beschreiben und Benennen von Vierecken
- Darstellung gefundener Lösungen

Experimentieren mit Dreiecken

gespiegelt (gewendet)



eine Idee der Weiterarbeit

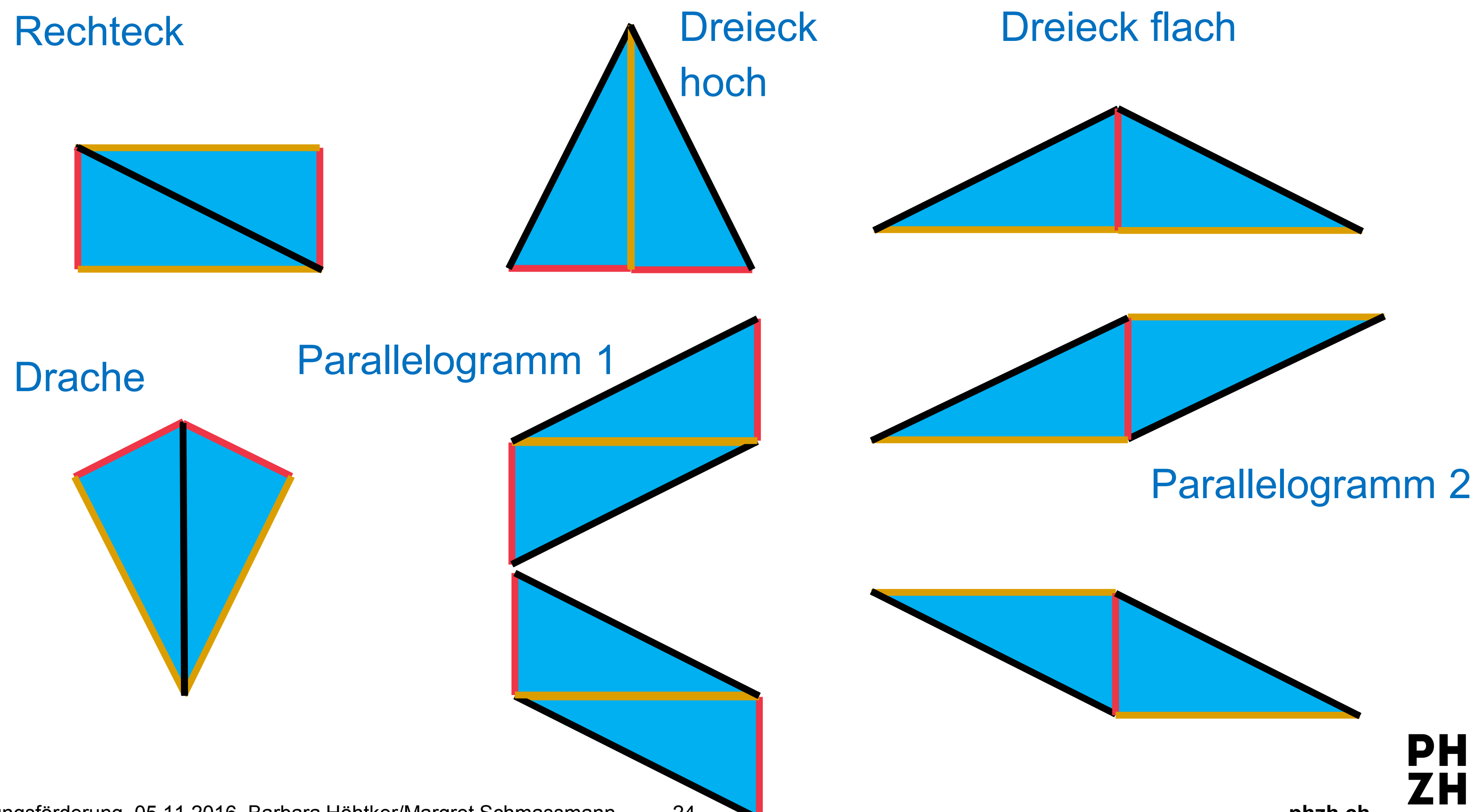
- Finde **alle** Vierecke. Begründe, warum du sicher bist, alle Vierecke gefunden zu haben. Erkläre wie du vorgegangen bist.

Lernchancen für leistungsstarke Kinder:

- systematisches Herleiten der verschiedenen Vierecke
- Begründungen und Erklärungen versuchen

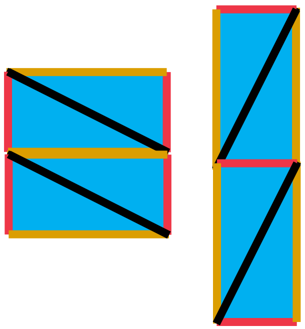
Alle Grundformen aus 2 Dreiecken

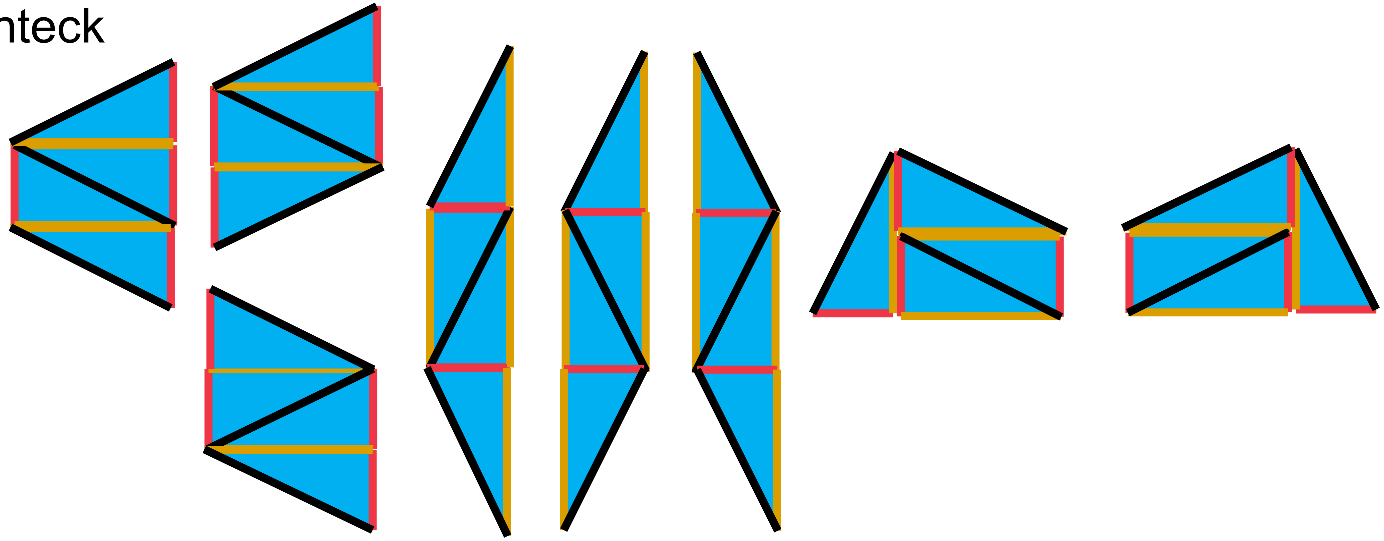
lange Seite **mittlere Seite** **kurze Seite**



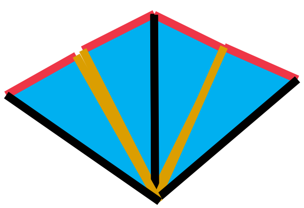
Aus den Grundformen und den ursprünglichen Dreiecken die Vierecke aufbauen

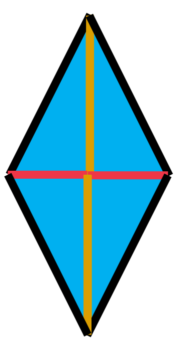
Grundform Rechteck

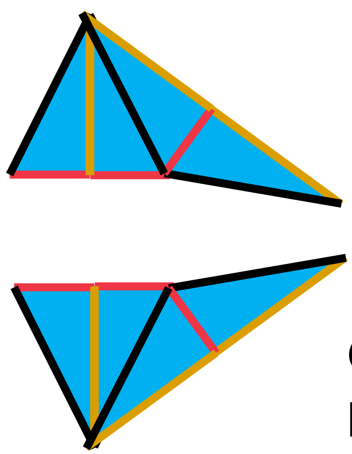




Grundform Drachen







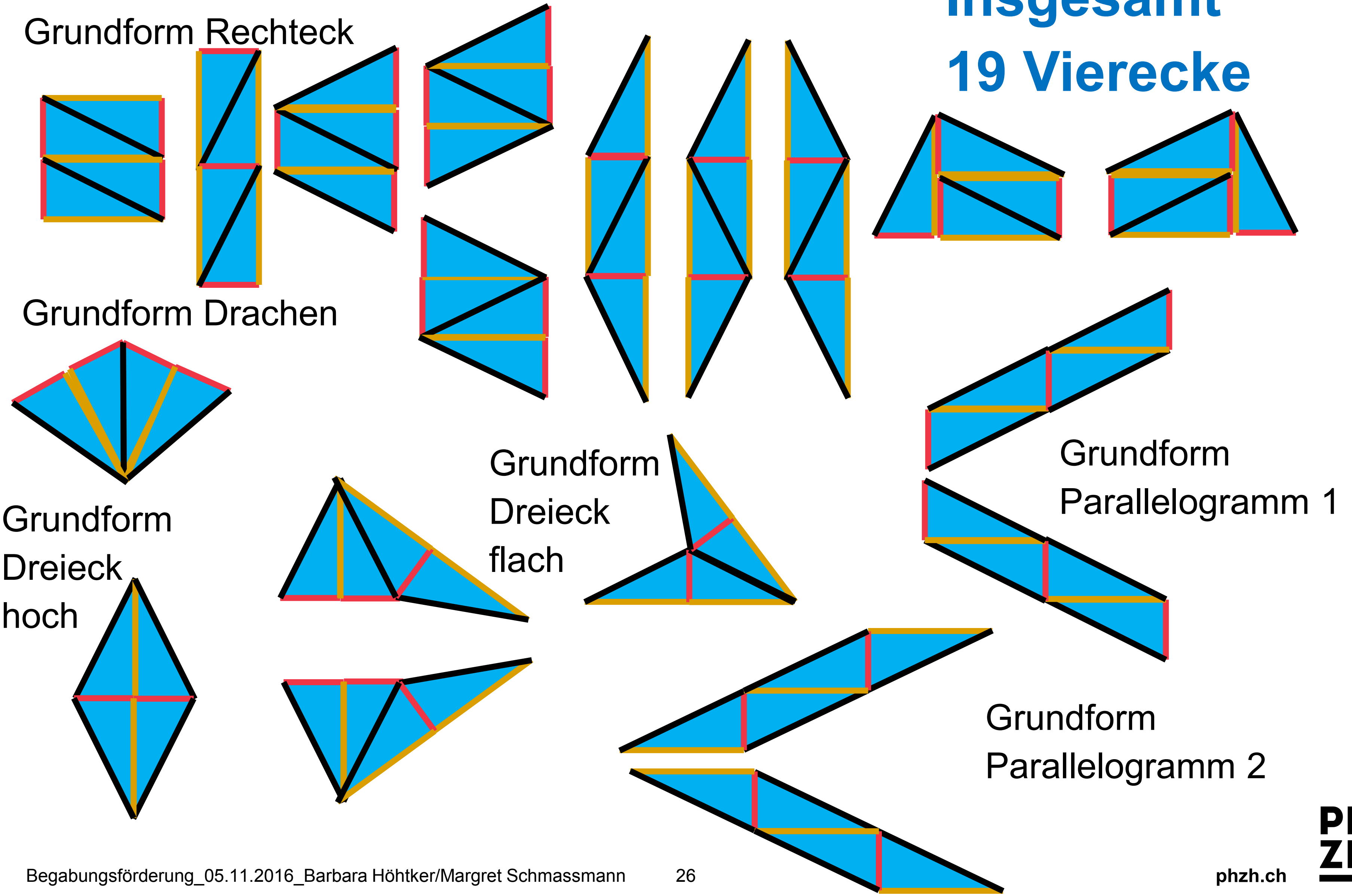
10 Vierecke - mit Spiegelung 14.

Fehlen noch welche?

Grundform Dreieck hoch

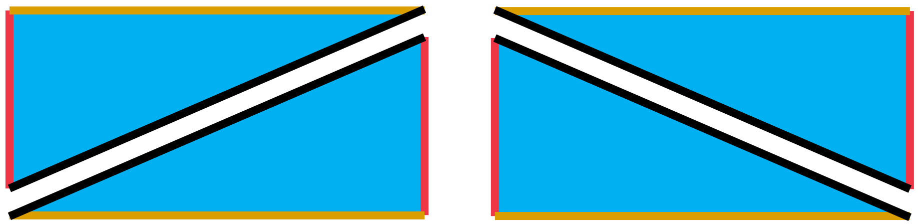
Aus den Grundformen und den ursprünglichen Dreiecken die Vierecke aufbauen

Insgesamt 19 Vierecke



Experimentieren mit Dreiecken

gespiegelte (gewendete)



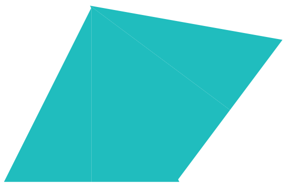
noch mehr Ideen

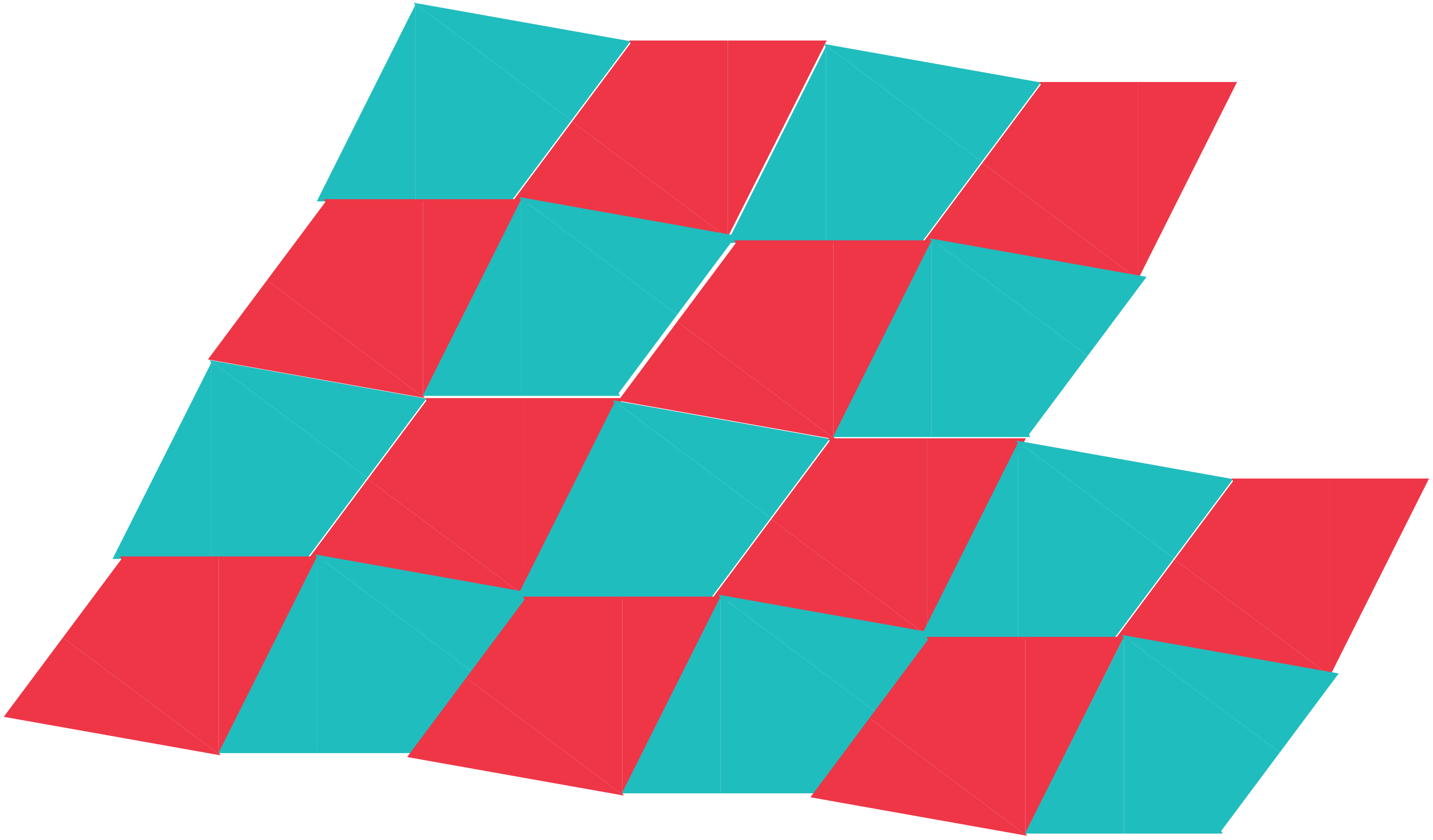
- Versuche, mit den gefundenen Vierecken (gleichen oder verschiedenen) die Ebene zu parkettieren. Mit welchen geht es, mit welchen nicht?
- Versuche, mit den gefundenen Vierecken vergrösserte (d.h. ähnliche) Vierecke zu legen.

Lernchancen für leistungsstarke Kinder:

- Systematisches Herleiten der Parkettierungen
- Begründungen und Erklärungen versuchen
- Geometrische Berechnungen anstellen (Winkel, Seiten)

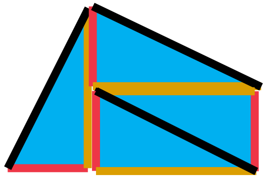
Zum Beispiel: Parkettierung mit dem Drachen



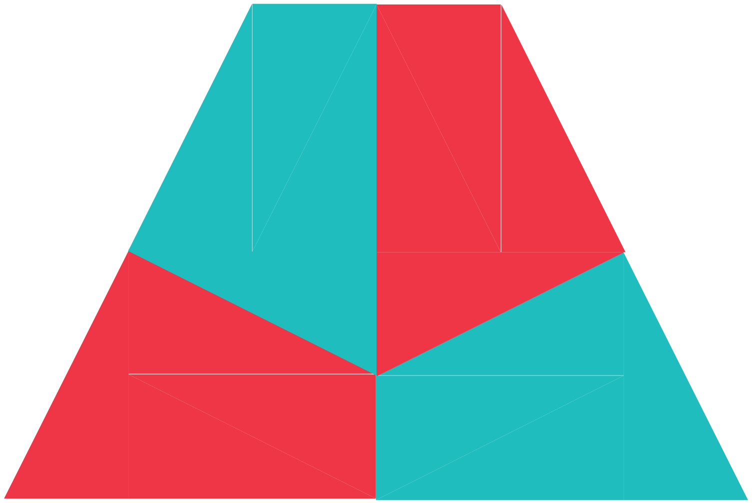


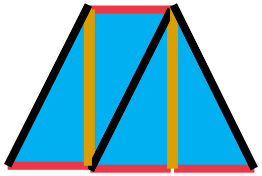
Auf der Suche nach vergrösserten Vierecken
……

Baustein

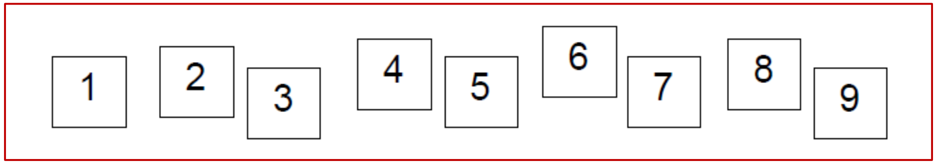


Vergrössertes (ähnliches) Trapez im Verhältnis 1: 2 aus 4 allgemeinen Vierecken





Summe 1000



Startaufgabe

- Bilde aus den Ziffern 1 – 9 jeweils zwei dreistellige Zahlen und addiere die Zahlen schriftlich. Jede Ziffer darf nur einmal verwendet werden.
- Finde möglichst viele verschiedene Additionen aus zwei Summanden mit der Summe 1000.

Was können alle Kinder lernen?

- schriftlich addieren
- Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems vertiefen
- systematisch variieren – Strategien entwickeln

Summe 1000

1 2 3 4 5 6 7 8 9

eine Idee der Weiterarbeit

- Wie viele verschiedene Aufgaben gibt es?
- Was hast du dir überlegt? Erkläre.

noch mehr Ideen

- Warum kann man die Summe 1000 mit drei Summanden nicht erreichen?
- Welche Summen kann man erreichen? Überlege und Probiere.

Lernchancen für leistungsstarke Kinder:

- Vernetzung: kombinatorische Überlegungen versuchen
- argumentieren, begründen, darstellen

Lösungen suchen …..

Einerstelle: Summe 10

1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6

Zehner- und Hunderterstelle: Summe 9

1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5

6 Möglichkeiten

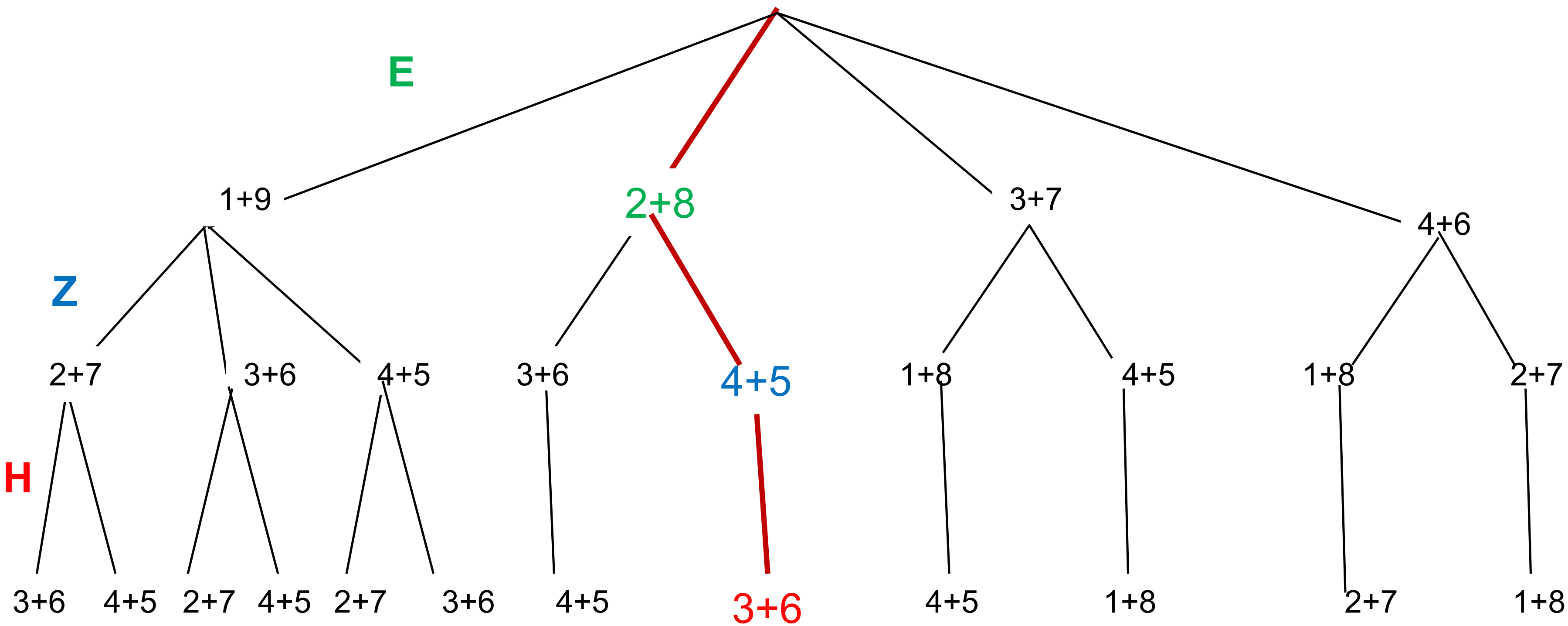
Lösungen suchen .....

- 6 Möglichkeiten

- Hunderter- und Zehnerstelle können horizontal vertauscht werden:
  12 Möglichkeiten

- Diese Möglichkeiten können auf 8 Arten vertikal vertauscht werden:
  96 Möglichkeiten

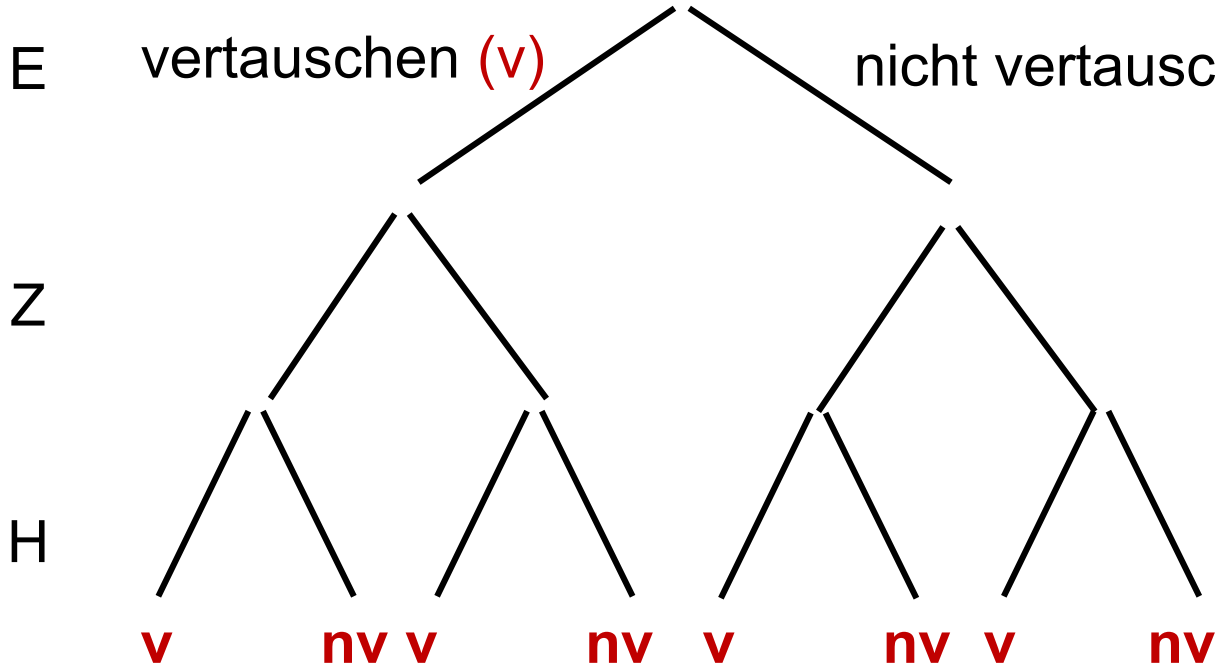
Lösungen suchen – andere Vorgehensweise



$$\begin{array}{r} 342 \\ 658 \\ \hline 1000 \end{array}$$

12 Varianten

Die 12 Möglichkeiten können noch vertikal variiert werden: 96 Möglichkeiten



		H	Z	E
		3	2	1
+		6	7	9

8 Varianten: 8 • 12 = 96

Warum kann man die Summe 1000 mit drei Summanden nicht erreichen?

- Für die drei dreistelligen Zahlen werden alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal verwendet.
- Die Quersumme des Ergebnisses ist gleich wie die Summe dieser 9 Ziffern, nämlich 45.
- 45 ist durch 9 teilbar.
- Daraus folgt, dass die Summe nicht 1000 sein kann, denn 1000 ist nicht durch 9 teilbar.
- Welche Summen kann man mit drei Summanden erreichen?

  774,… , 990, 999, 1008, …,2556

  (Quersumme durch 9 tb.)

H	Z	E
3	7	2
4	6	8
1	5	9
1	1	
9	9	9

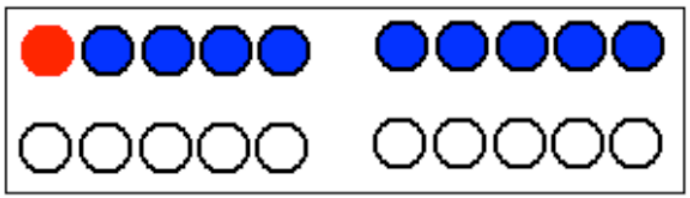
Warum kann man die Summe 1000 mit drei Summanden nicht erreichen?

andere Vorgehensweise, wer es lieber fleissig mag...

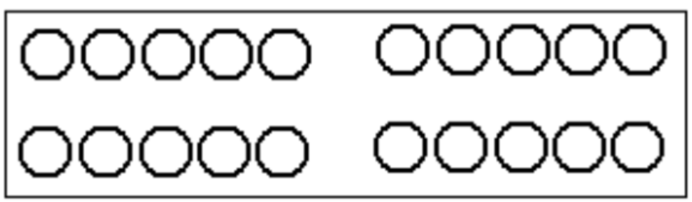
- Alle Ziffern von 1 bis 9 werden verwendet.
- Einerstellen: Summe 10 oder Summe 20
  Summe 10: 1+2 +7, 1+3+6, 1+4+5, 2+3+5
  Summe 20: 3+8+9, 4+7+9, 5+6+9, 5+7+8
- Zehnerstellen wenn Einerstelle 10:
  Summe 19 (3+7+9, 4+7+8, 4+6+9, 5+6+8)
  oder Summe 9 (1+2+6, 1+3+5, 2+3+4)
- Zehnerstellen wenn Einerstelle 20:
  Summe 18 (3+7+8, 3+6+9, 4+6+8, 4+5+9,5+6+7)
  oder Summe 8 (1+2+5, 1+3+4)
- Und jetzt alle Varianten durchspielen...→ Summe 1000 nicht möglich, da für die Hunderterstellen nie passende Ziffern mit der Summe 8 oder 9 übrig bleiben

Für Kinder mit Lernschwierigkeiten …..

Finde möglichst schlau Aufgaben mit der Summe 10 (9).



____ + ____ = 10

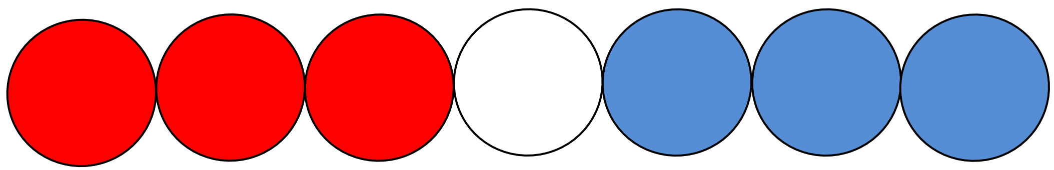


____ + ____ = 10

Froschhüpfen

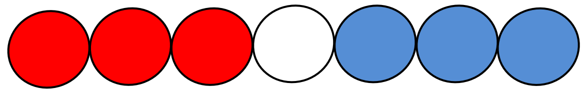
Startaufgabe

- Probiere das Spiel «Froschhüpfen» aus (auch mehrmals).
- Versuche mit möglichst wenigen Spielzüge das Ziel zu erreichen.



Ziel: Die Plättchen tauschen die Seiten.
Regel: Jedes Plättchen darf sich auf ein benachbartes freies Feld verschieben oder über ein benachbartes besetztes Feld hüpfen. (Weder rot/blau noch hüpfen/schieben müssen sich abwechseln!)

Froschhüpfen



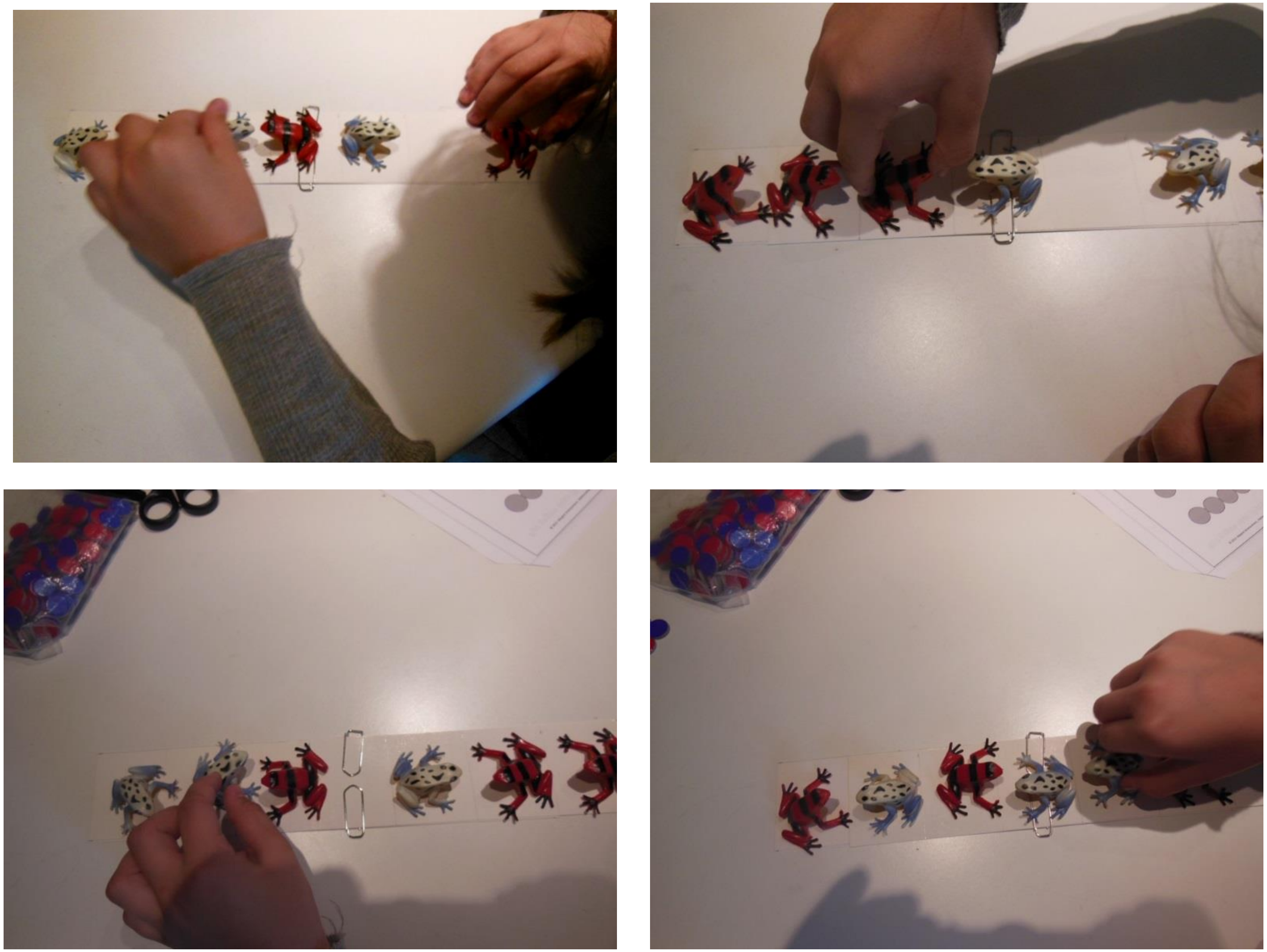
Startaufgabe

- Probiere das Spiel «Froschhüpfen» aus (auch mehrmals).
- Versuche mit möglichst wenigen Spielzüge das Ziel zu erreichen.
- Mache ein «Protokoll» des Spielverlaufs.
- Wie viele Spielzüge brauchst du mindestens?

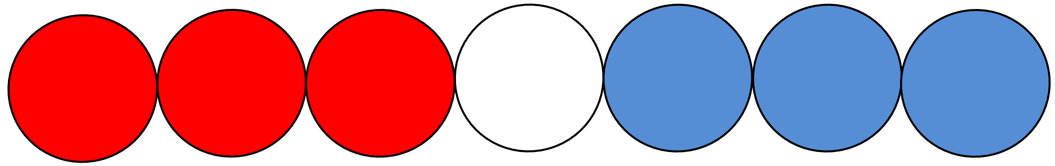
Was können alle Kinder lernen?

- Spielzüge protokollieren
- Effizienz bestimmter Spielzüge erkennen und beschreiben
- (Teil-) Strategien entwickeln

Lisa auf der Suche nach einer Strategie



Mindestanzahl Spielzüge begründen (3 Frösche auf jeder Seite)

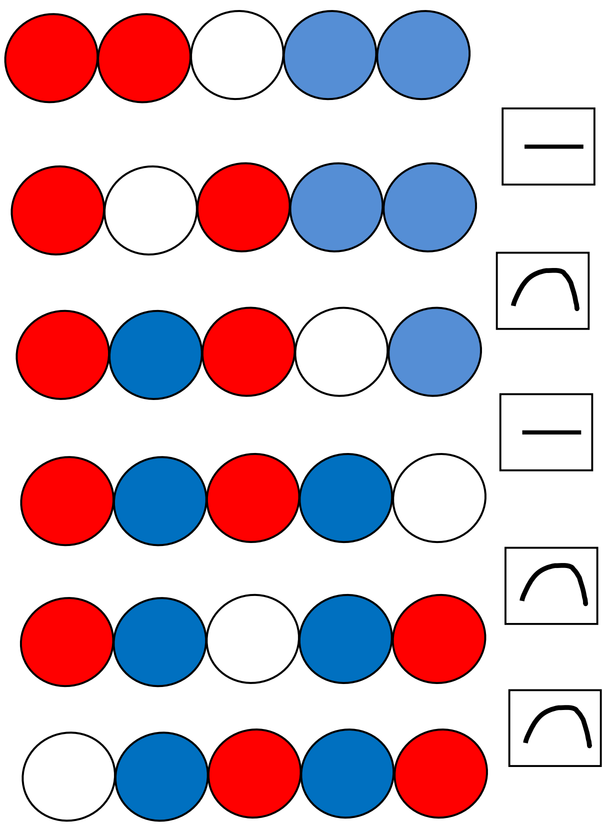


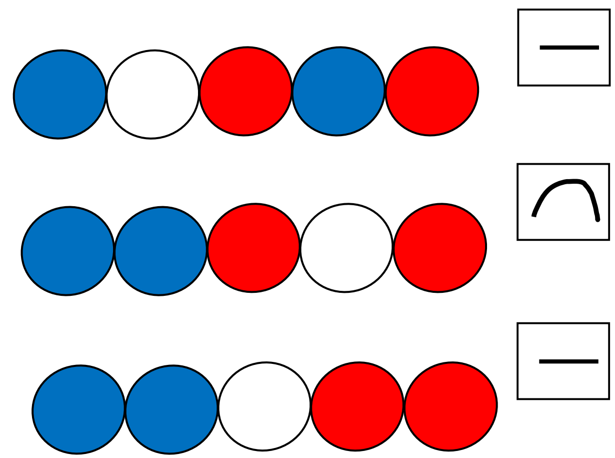
Jeder der 6 Frösche muss 4 Felder weiter bewegt werden, damit die Zielaufstellung erreicht werden kann.
→24 Bewegungen

Da aber jeweils die Frösche der anderen Farbe übersprungen werden müssen, rücken dabei die Frösche nicht nur 1 Feld, sondern 2 Felder weiter.

Jeder Frosch der einen Farbe überspringt jeden Frosch der anderen Farbe, also gibt es 9 Sprünge, wodurch 9 Bewegungen eingespart werden. → 24 – 9 = 15 Züge

Bewegungsmuster protokollieren (2 Frösche auf jeder Seite)

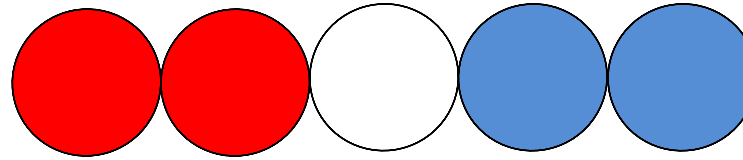




8 Spielzüge!

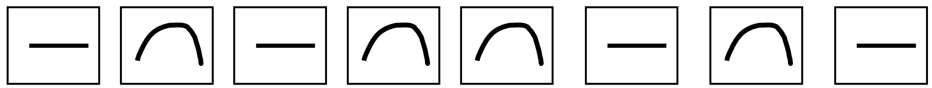
s h s h h s h s

Froschhüpfen
(2 Frösche auf jeder Seite)



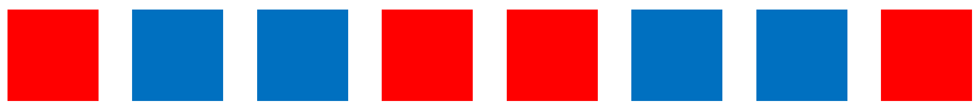
Bewegungsmuster:

s h s h h s h s



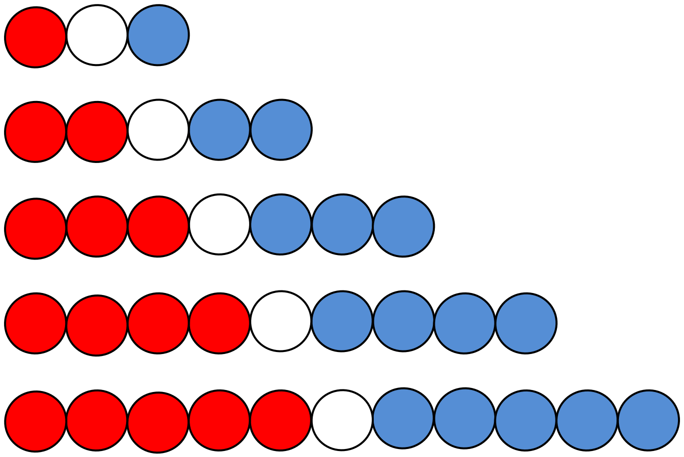
Farbmuster:

r b b r r b b r



Anzahl Züge: 8

Froschhüpfen



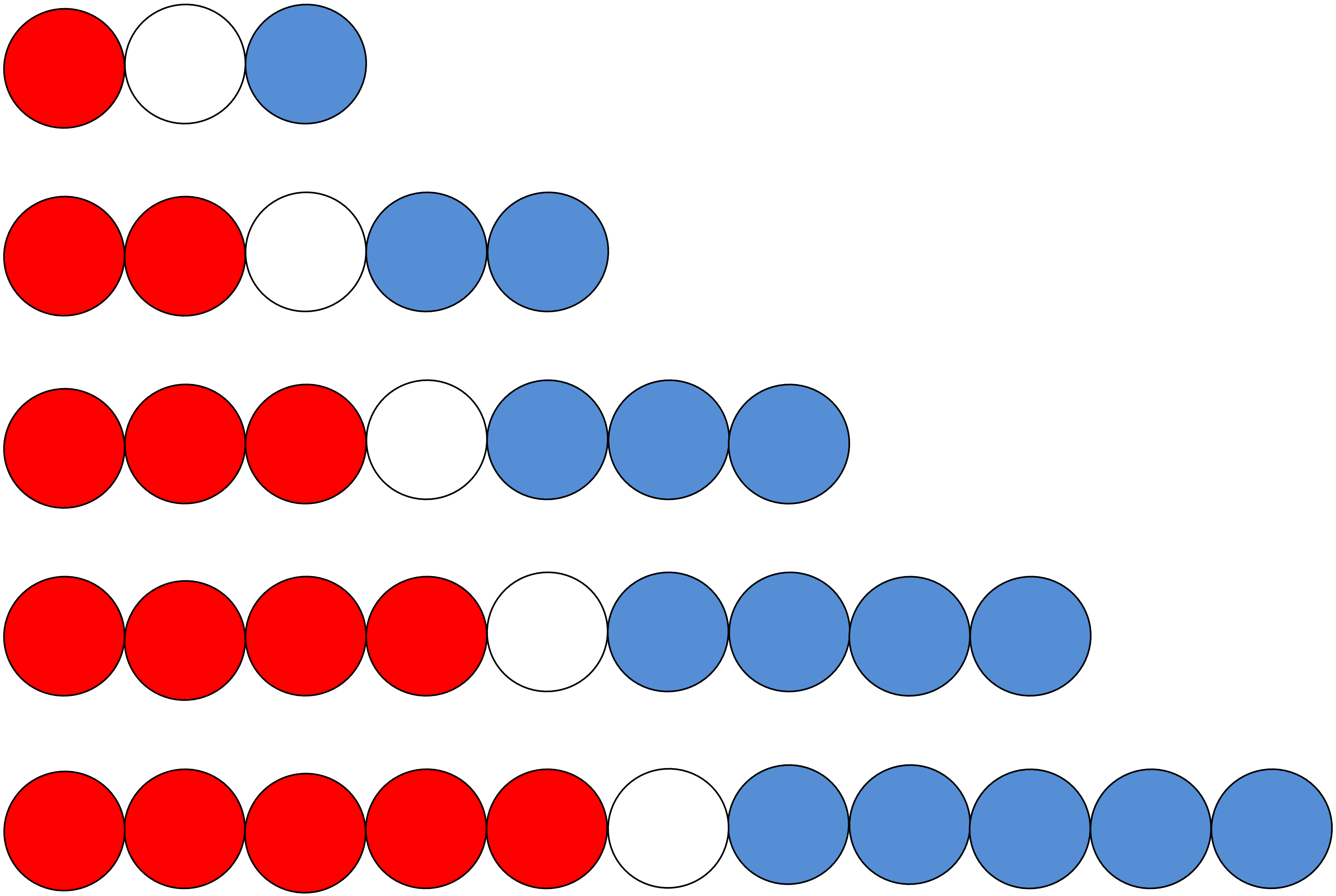
eine Idee der Weiterarbeit

- Untersuche die Mindestanzahl Spielzüge bei verschiedenen Spielfeldlängen.
  Was stellst du fest?
  Entdeckst ein Muster?

Lernchancen für leistungsstarke Kinder:

- Muster entdecken und verallgemeinern: Zusammenhänge von Spielfeldgrösse, Anzahl und Verteilung der Frösche und der mindestens benötigten Anzahl Spielzüge untersuchen, beschreiben, algebraisieren
  …

Froschhüpfen: Mindestanzahl Spielzüge



3

8

15

24

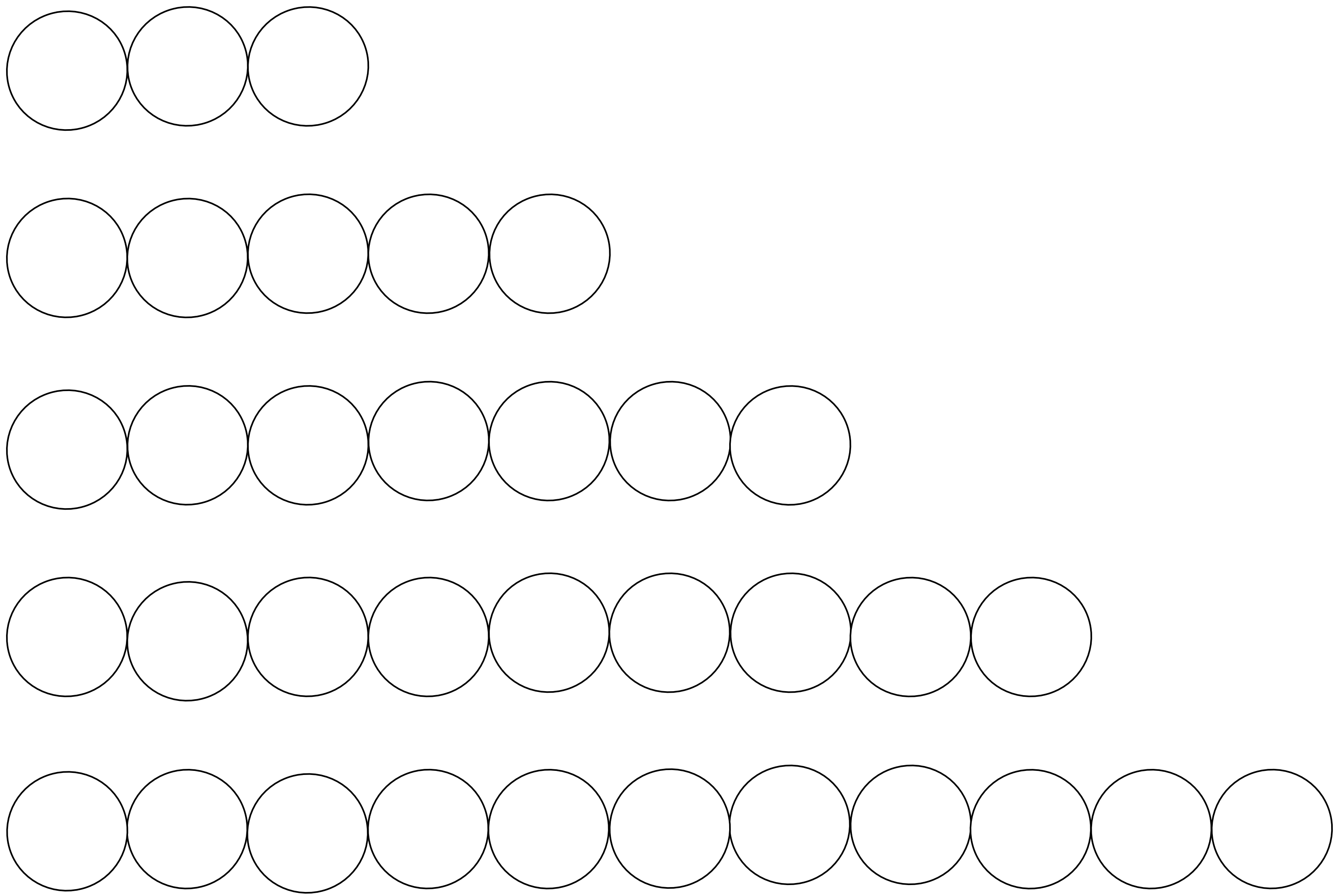
35

Zahlenmuster für je n Frösche auf beiden Seiten

Frösche pro Seite	Frösche ins-gesamt	Felder, die jeder Frosch überwinden muss	Felder, die insgesamt (von allen Fröschen) überwunden werden müssen	„Hüpfer“ (h)	Spielzüge:
1	3	$1 + 1 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	1	$4 – 1 = 3$
2	4	$2 + 1 = 3$	$4 \cdot 3 = 12$	$2 \cdot 2 = 4$	$12 – 4 = 8$
3	6	$3 + 1 = 4$	$6 \cdot 4 = 24$	$3 \cdot 3 = 9$	$24 – 9 = 15$
4	8	$4 + 1 = 5$	$8 \cdot 5 = 40$	$4 \cdot 4 = 16$	$40 – 16 = 24$
5	10	$5 + 1 = 6$	$10 \cdot 6 = 60$	$5 \cdot 5 = 25$	$60 – 25 = 35$
n	2n	n+1	2n(n+1)	n^2	$2n^2 + 2n – n^2 =$ $n^2 + 2n =$ $(n+1)^2 - 1$

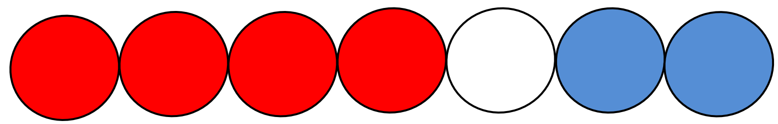
Quadratzahlen – 1

Froschhüpfen (Solitaire)



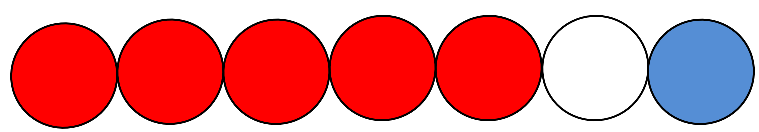
Was wäre wenn...

...sich die Frösche anders verteilen, z.B. 4 links und 2 rechts.
Braucht es dann gleich viele Züge?



$4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \rightarrow 22$ Bewegungen
Da es aber $2 \cdot 4$ Sprünge gibt, wird
das Vorwärtsschieben 8 mal eingespart → $22 - 8 =$ **14**

Und wenn sich die Frösche so verteilen: links 5, rechts 1?
16 Bewegungen – 5 Sprünge = **11**



Aufgabenkultur - Unterrichtskultur

… und den Austausch sinnvoll und produktiv gestalten.

Inszenierung

- sorgfältige Klärung der Aufgabenstellung (alle Kinder können «starten»)
- Motivieren, Herausfordern
- (differenzierte) Erwartungen klar formulieren

Lernbegleitung

- das Lernen der Kinder wahrnehmen, begleiten und unterstützen
- Hilfen, Tipps bei Schwierigkeiten
- Variationen, weiterführende Aufträge als «Rampen»

Fazit
Aufgabenpotential nutzen und flexibel differenzieren

Suchen, durchdenken, anbieten:

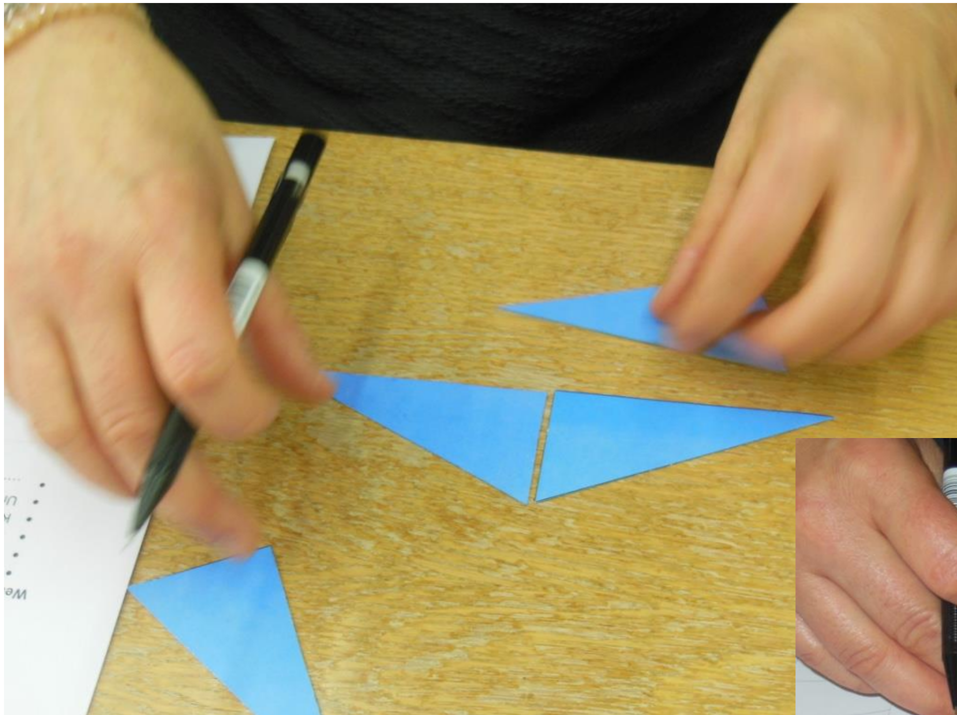
- Variationen (z.B. «Was wäre, wenn …..»)
- Transfermöglichkeiten
- Verallgemeinerungen – propädeutisches Algebraisieren
- Vernetzungen
  mit anderen mathematischen Themenbereichen
  mit strukturanalogen Aufgaben
- verschiedene Vorgehensweisen und Darstellungen
- Potential zur Strategieförderung (probieren, operativ variieren, systematisieren, strukturieren)

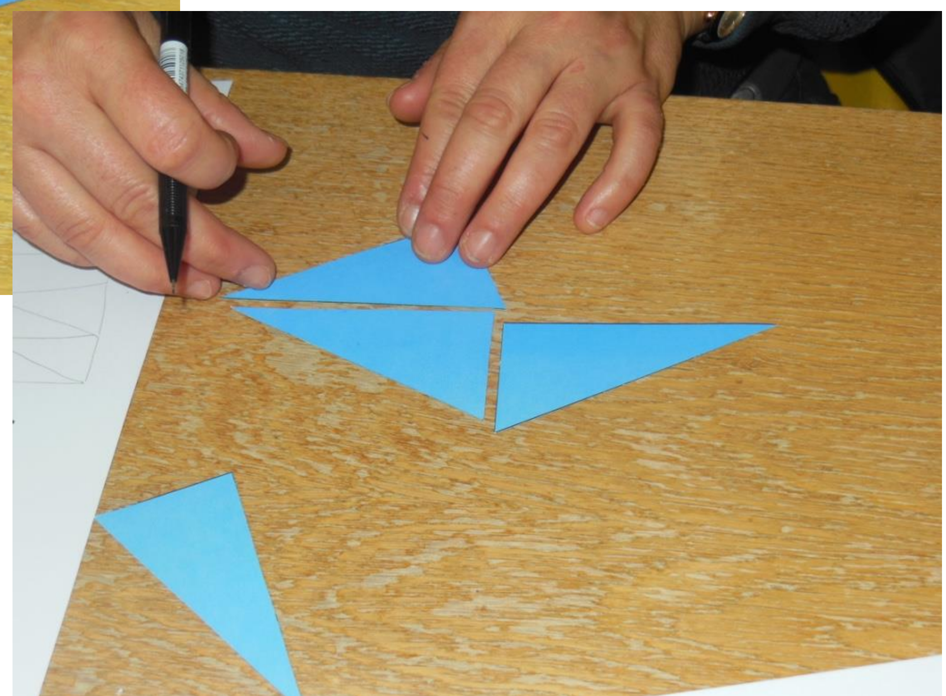
Wir würden uns freuen, wenn ….
Sie noch mehr Lust bekommen haben, sich auf eine vertiefte Auseinandersetzung mit den Themen und Aufgaben der Primarschulmathematik einzulassen.

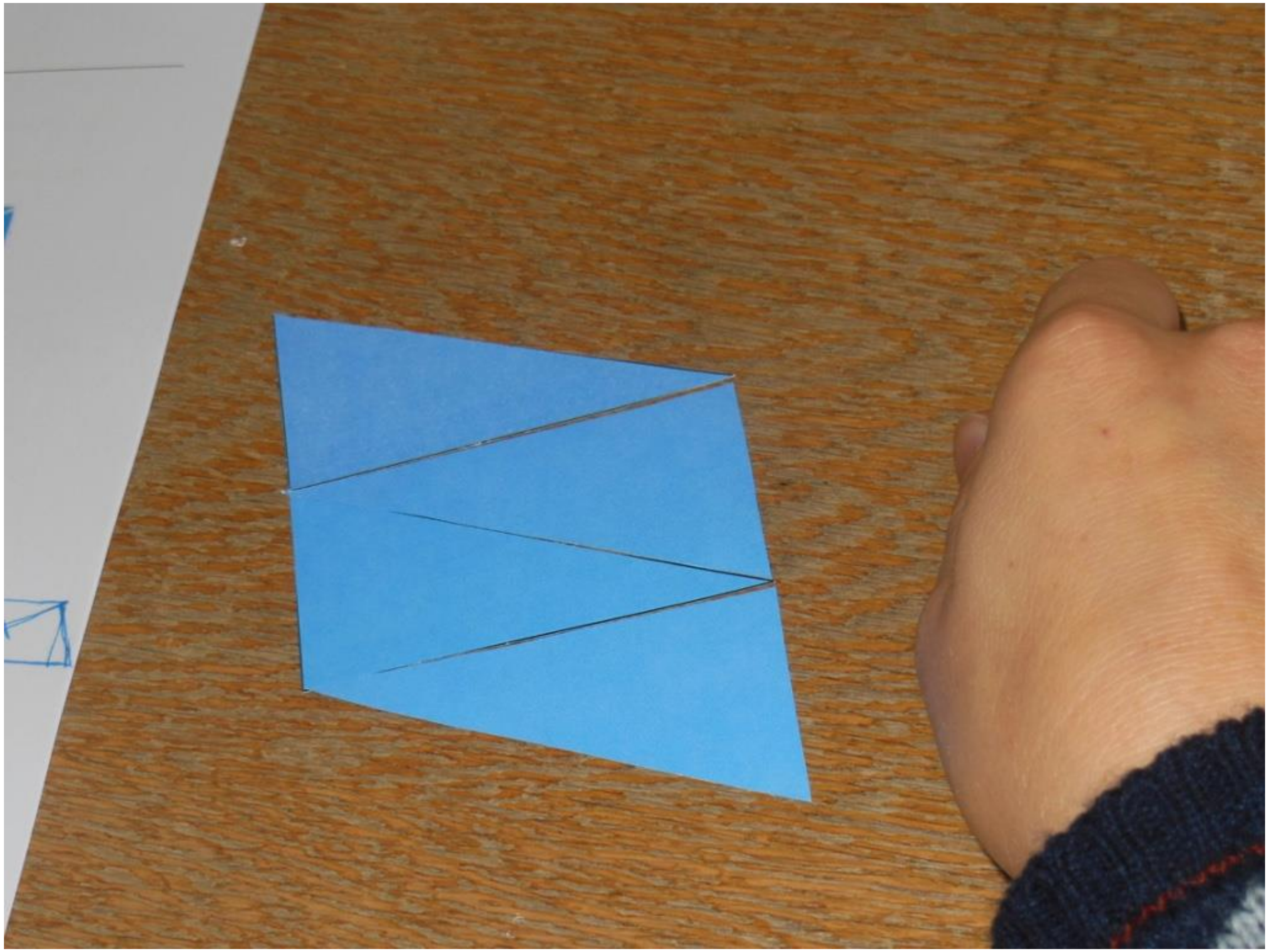
Herzlichen Dank!

Im Anhang einige Impressionen

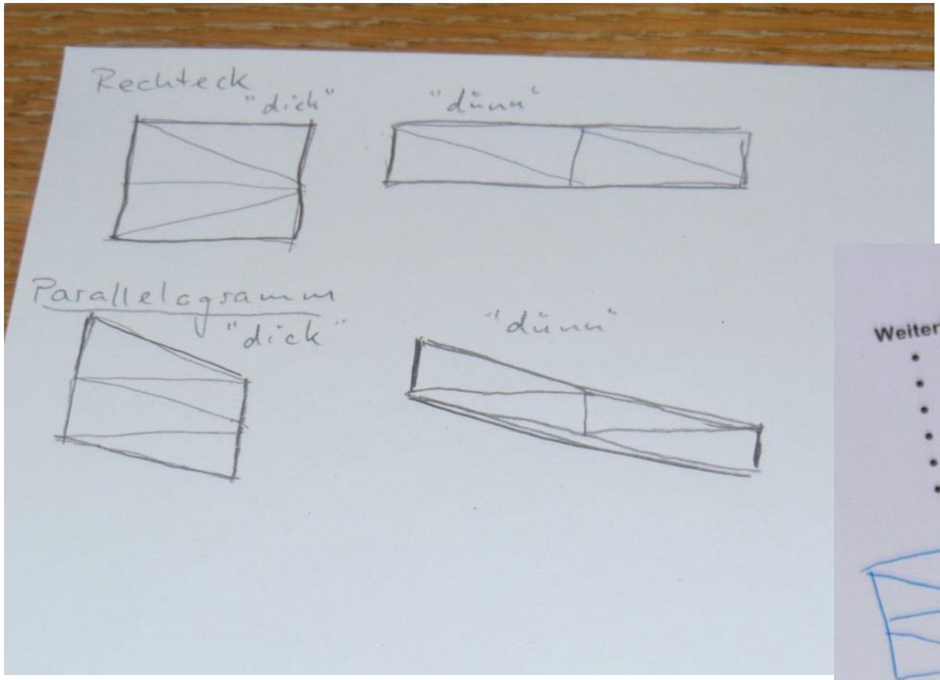
Ihrer Arbeit …..

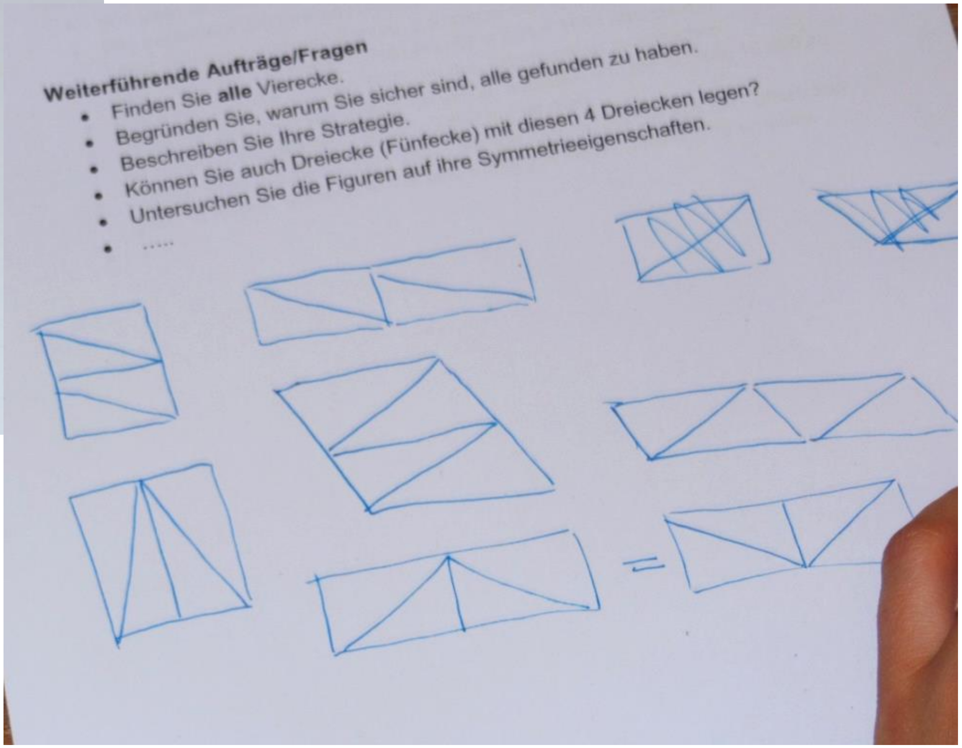




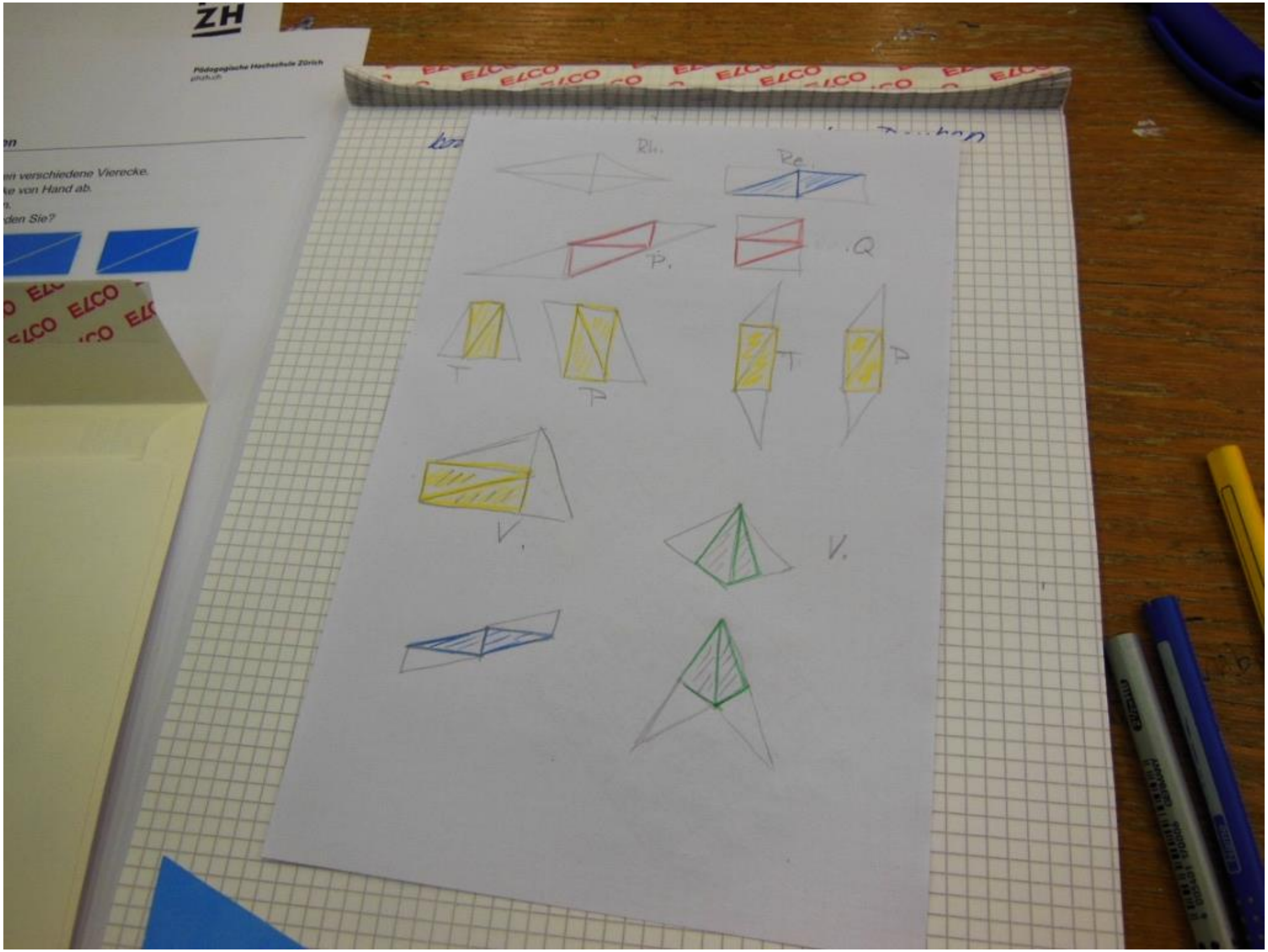


Dreiecke

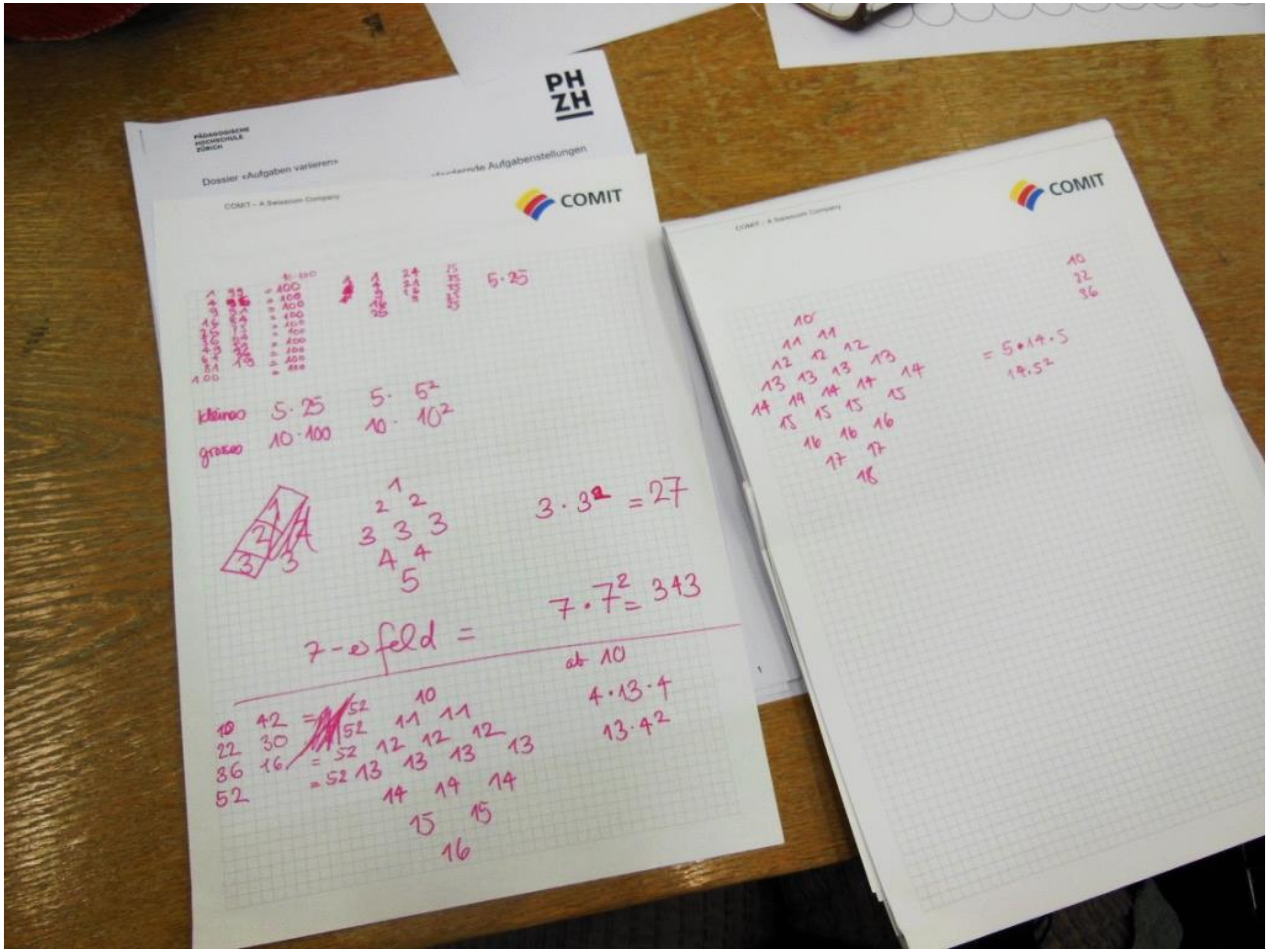

Rechteck
"dick"
"dünn"
Parallelogramm
"dick"
"dünn"


Weiterführende Aufträge/Fragen
• Finden Sie **alle** Vierecke.
• Begründen Sie, warum Sie sicher sind, alle gefunden zu haben.
• Beschreiben Sie Ihre Strategie.
• Können Sie auch Dreiecke (Fünfecke) mit diesen 4 Dreiecken legen?
• Untersuchen Sie die Figuren auf ihre Symmetrieeigenschaften.
• .....

Dreiecke



Zahlenfelder



Froschhüpfen