Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 10 vom 15. Juni 2018

Aufgabe 1 (noethersche Ringe)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist R noethersch, so ist $\dim R \leq 2018$.
2. Ist $R[T]$ noethersch, so ist R noethersch.

Aufgabe 2 (Länge von Moduln)**.** Sei R ein Ring. Die *Länge* $\ell_R(M)$ eines R-Moduls M ist (in Analogie zur Dimension von Ringen) definiert durch

$$\ell_R(M) := \sup\bigl\{n \in \mathbb{N} \bigm| \text{es gibt } R\text{-Untermoduln } N_0, \dots, N_n \text{ von } M \text{ mit } N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_n\bigr\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Modul mit $\ell_R(M) = 0$, so ist $M \cong_R \{0\}$.
2. Was ist $\ell_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$?
3. Zeigen Sie $\ell_R(M \oplus N) = \ell_R(M) + \ell_R(N)$ für alle R-Moduln M und N.

Aufgabe 3 (Länge als Klassifikationshilfsmittel)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei $p \in R$ prim. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgabenteile (die Länge von Moduln ist in Aufgabe 2 definiert):

1. Zeigen Sie, dass $\ell_R\bigl(R/(p^n)\bigr) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Zeigen Sie mithilfe von ℓ_R: Sind $N, M, n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_M \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N \geq 1$ und $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_M \geq 1$ sowie
$$\bigoplus_{j=1}^{N} R/(p^{n_j}) \cong_R \bigoplus_{j=1}^{M} R/(p^{m_j}),$$
so folgt $N = M$ und $n_j = m_j$ für alle $j \in \{1, \dots, N = M\}$.
3. Folgern Sie daraus (und mit geeigneten Tensorproduktfunktoren) die Eindeutigkeitsaussage des Klassifikationssatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz II.2.5.15).

Aufgabe 4 (noethersche Potenzreihenringe)**.** Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass dann auch $R[\![T]\!]$ noethersch ist.
Hinweis. Betrachten Sie zu einem Ideal in $R[\![T]\!]$ die Koeffizienten der *niedrigsten* Potenzen. Verschieben Sie dann alle Sorgen ins Unendliche.

Bonusaufgabe (noethersche topologische Räume)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie noethersche topologische Räume definiert sind.
2. Zeigen Sie: Ist R ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec} R$ bezüglich der Zariski-Topologie ein noetherscher Raum.

Abgabe bis zum 22. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen