Aufgabe 1

Für aussagenlogische Formeln φ und ψ schreiben wir $\varphi \leq \psi$ genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ eine Tautologie ist. Weiter sei $\varphi < \psi$ genau dann, wenn $\varphi \leq \psi$ und $\psi \not\leq \varphi$.

(a) Zeigen Sie, dass die so definierte Relation dicht ist, d.h. zu je zwei Formeln $\varphi < \psi$ existiert eine Formel ϑ mit $\varphi < \vartheta < \psi$.
Hinweis: Konstruieren Sie ϑ aus φ und ψ mittels einer Aussagenvariable, die weder in φ noch in ψ vorkommt.

(b) Zeigen Sie, dass eine unendliche aufsteigende Kette $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \dots$ existiert.

(c) Zeigen Sie, dass es für je zwei Formeln φ und ψ eine kleinste Formel ϑ gibt, so dass $\varphi \leq \vartheta$ und $\psi \leq \vartheta$, d.h. für alle Formeln η mit $\varphi \leq \eta$ und $\psi \leq \eta$ gilt auch $\vartheta \leq \eta$.