

Article

Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen
Cantors.

Haenzel, Gerhard

in: Journal für die reine und angewandte Mathematik | Journal
für die reine und angewandte Mathematik - 170

6 Page(s) (123 - 128)



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen Cantors.

Von *Gerhard Haenzel* in Karlsruhe.

Georg Cantor schied bei der Begründung der Mengenlehre das Potential-Unendliche vom Aktual-Unendlichen. Dem Aktual-Unendlichen in der Mengenlehre, insbesondere den transfiniten Zahlen, schrieb er einerseits *immanente* Realität zu, insofern, als die transfiniten Zahlen „auf Grund von Definitionen in unserem Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmter Beziehung stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifizieren“¹⁾.

Ebenso aber behauptete Cantor die *transiente* Realität seiner transfiniten Zahlen insofern, als diese „für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenklassen... Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen“¹⁾.

Die Ableitung der transfiniten *Ordnungszahlen* gründet sich in der Mengenlehre auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen, das sukzessive Bildungsgesetz ruht auf dem Satz²⁾:

„Kommt in der gegebenen Menge M von Ordnungszahlen gleichzeitig mit irgend-einer Ordnungszahl α aus M auch jede kleinere Ordnungszahl als α vor, so ist die nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete Menge M wohlgeordnet. Die zur wohlgeordneten Menge M gehörige Ordnungszahl μ ist die auf alle Ordnungszahlen von M nächstfolgende Ordnungszahl, und so geht aus allen jeweils bekannten Ordnungszahlen durch ihre Anordnung zu einer wohlgeordneten Menge die nächsthöhere Zahl eindeutig hervor“.

Auf diese Weise ergab sich die Folge aller ganzen Zahlen der Zahlenklassen I und II, wenn unter ω die kleinste transfinite Zahl und erste Zahl der Klasse II verstanden wird:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} 0, 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3, \dots, \omega \nu, \dots, \omega^2, \\ \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \nu, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 + \omega \nu, \omega^2 + \omega \nu + 1, \dots, \omega^3, \omega^3 + 1, \dots \\ \dots (\nu_n \omega^n + \nu_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + \nu_1 \omega + \nu_0), \dots, \omega^\omega, \omega^\omega + 1, \dots, \omega^{\omega+1}, \dots, \omega^{\omega^n}, \dots, \omega^{\omega^\omega} = \varepsilon, \varepsilon + 1, \dots \end{array} \right\}$$

ν_i sind endliche ganze Zahlen.

In den Originalarbeiten Cantors steht methodisch das konstruktive Denken im Vordergrund, und das sukzessive Bildungsgesetz der Ordnungszahlen erscheint dort in zwei Schritte aufgelöst, die beiden Cantorschen *Erzeugungsprinzipen*³⁾ genannt:

¹⁾ G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, § 8, Math. Annalen 21 (1883).

²⁾ A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, § 12, 3. Aufl. 1928.

³⁾ G. Cantor, Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre, § 11, 12, Math. Annalen 21 (1883). — Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre § 15, Math. Annalen 46 (1895), 49 (1897).

Das *erste* Erzeugungsprinzip besteht in der Bildung neuer natürlicher Zahlen durch Hinzufügung der Einheit zu schon gegebenen ganzen (endlichen oder transfiniten) Zahlen. Das *zweite* schafft aus einer wohldefinierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen, unter denen keine größte existiert, eine neue transfinite Ordnungszahl als Grenzzahl der Fundamentalreihe, definiert als die allen Zahlen der Reihe nächstfolgende größere Zahl.

Die Fusion der beiden Erzeugungsprinzipie im sukzessiven Bildungsgesetz der Ordnungszahlen, gegründet auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen, kommt in der Existenz der beiden verschiedenen Arten transfiniter Ordnungszahlen zum Ausdruck: Die transfinite Ordnungszahl *erster* Art hat in der wohlgeordneten Zahlenreihe ein bestimmtes ihr unmittelbar vorangehendes Element, die transfinite Ordnungszahl *zweiter* Art hat ein solches Element nicht.

Die Ableitung der transfiniten Zahlen durch die Mengenlehre rief Widerspruch hervor, der sich auf die Antinomien der Mengenlehre stützte. Die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten suchte der Intuitionismus zu beseitigen. Während der Wohlordnungssatz keinen konstruktiven sondern rein existentialen Charakter besitzt, geht der Intuitionismus von der Grundthese Brouwers aus, daß unter mathematischer Existenz die Konstruierbarkeit zu verstehen sei, daß es aber nicht angehe, die Existenz als bloße Widerspruchsfreiheit zu deuten.

Im folgenden wird zwar die Bekanntschaft mit der Cantorschen Mengenlehre (zu Vergleichszwecken) vorausgesetzt; jedoch besteht das Ziel *in einer neuen Definition der transfiniten Ordnungszahlen mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion unabhängig von der mengentheoretischen Begründung. Dabei wird von dem Grundsatz ausgegangen: Existenz gleich geometrischer Konstruierbarkeit.*

1. Die Axiome der ebenen Geometrie seien in folgende drei Gruppen geordnet ⁴⁾:

I. Die projektiven Axiome. Sie bilden die Grundlagen der projektiven Geometrie.

II. Die Kongruenzaxiome. Sie bilden zusammen mit Gruppe I die Basis für die absolute (euklidische und nichteuklidische) Geometrie.

III. Das Ähnlichkeitsaxiom, dessen Hinzuziehung zu I und II die euklidische Geometrie bedingt.

Auf Grund der projektiven Axiome sind die beiden Operationen des Projizierens und Schneidens ausführbar, d. h. es lassen sich die Schnittpunkte einer Geraden mit anderen Geraden aufsuchen, und es lassen sich die Projektionsstrahlen aus einem gegebenen Punkte nach anderen Punkten ziehen. Die Hinzufügung der Kongruenzaxiome zieht die Grundoperation des Abtragens von Strecken nach sich, d. h. es lassen sich von einem gegebenen Punkte aus auf allen durch ihn gehenden Geraden Segmente gegebener Länge abtragen. Die Einführung des Ähnlichkeitsaxioms ermöglicht die ähnliche Abbildung von Strecken und ebenen Figuren innerhalb der euklidischen Geometrie. Die genannten Operationen sollen die „Grundoperationen“ heißen.

Definition: Geometrische „Grundkonstruktionen“ sind diejenigen Operationen, die aus einer endlichen Anzahl von Grundoperationen bestehen. Kommen allein die Grundoperationen des Projizierens und Schneidens zur Anwendung, so heißt die Grundkonstruktion *projektiv*, bei Hinzuziehung des Streckenabtragens dagegen *absolut*.

2. In der gegebenen Ebene ε liege die gerichtete Strecke $\vec{0\omega}$ auf der Gerade g innerhalb des durch die Punkte ω und ω^* begrenzten Segmentes (Fig.), und zwar weise die Richtung $\vec{0\omega}$ von 0 nach ω . Aus dem Projektionszentrum Z_I außerhalb von g werden

⁴⁾ H. Mohrmann, Einführung in die Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1930.

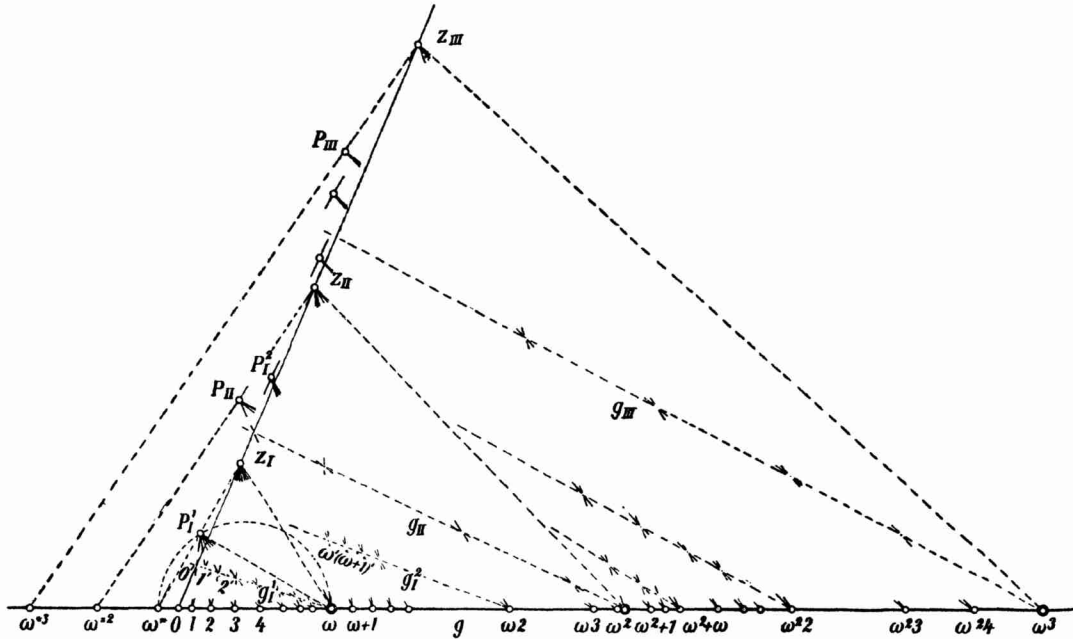


Fig. 1.

die Punkte ω^* , 0 , 1 , ω durch Strahlen angeschnitten. Auf dem Strahle $Z_I\omega^*$ befindet sich das „Additionszentrum“ P_I^1 . Die Gerade $P_I^1 1$ schneidet $Z_I 0$ in $0'$. Die „Additionsgerade“ $\omega 0' = g_I^1$ wird von $Z_I 1$ in $1'$ getroffen; der Strahl $P_I^1 1'$ schneidet auf g den Punkt 2 aus; der Projektionsstrahl $Z_I 2$ trifft die Additionsgerade g_I^1 in $2'$, der Strahl $P_I^1 2'$ bestimmt auf g den Punkt 3 u. s. f. Auf diese Weise entsteht aus der Strecke $\overrightarrow{01}$ auf g mittels des Projektionszentrums und des Additionszentrums die gegen den Grenzpunkt ω konvergierende Punktefolge:

$$1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$$

Sind die Punkte der Folge bis zur Nummer n bekannt, so ist $Z_I n$ mit der Additionsgeraden g_I^1 in n' zu schneiden; der Strahl $P_I^1 n'$ bestimmt dann auf g den nächsten Punkt $n + 1$ der Folge. Dabei bilden zwei gegebene benachbarte Punkte mit ω und ω^* ein konstantes Doppelverhältnis:

$$(0 1 \omega \omega^*) = (1 2 \omega \omega^*) = \dots = (\nu (\nu + 1) \omega \omega^*).$$

Auf g werden nunmehr in der Richtung $\overrightarrow{01}$ jenseits ω zwei neue Punkte $\omega + 1$, $\omega 2$ gewählt unter der Bedingung:

$$[\omega (\omega + 1) \omega 2 \omega^*] = [0 1 \omega \omega^*],$$

was auf eine projektive Transformation der Geraden g in sich selbst hinausläuft. Dazu soll ein neues Projektionszentrum Z_{II} auf $0Z_I$ jenseits Z_I und die neue Additionsgerade g_I^2 gehören. Letztere schneidet die beiden Projektionsstrahlen $Z_{II}\omega$ und $Z_{II}(\omega + 1)$ bzw. in ω' und $(\omega + 1)'$. Die Verbindungsgerade von $(\omega + 1)$ mit ω' bestimmt auf $Z_{II}\omega^*$ das neue Additionszentrum P_I^2 . Nun setzt der vorhin beschriebene Konstruktionsprozeß ausgehend von ω und $\omega + 1$ mit dem Projektionszentrum Z_{II} und dem Additionszentrum P_I^2 die Folge der Punkte gegen $\omega 2$ hin weiter fort. Es entsteht die gegen den Grenzpunkt $\omega 2$ konvergierende Punktefolge:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots,$$

und es besteht innerhalb der gesamten Folge die Gleichungskette der Doppelverhältnisse:

$$[0 \ 1 \ \omega \ \omega^*] = [\omega \ (\omega + 1) \ \omega 2 \ \omega^*] = [(\omega + 1) \ (\omega + 2) \ \omega 2 \ \omega^*] = \dots$$

Es versteht sich von selbst, daß beliebig viele solcher Punktfolgen in der beschriebenen Weise aneinander gereiht werden können und daß die gesamte entstehende Punktmenge in der Richtung $\overrightarrow{01}$ unbegrenzter Erweiterung fähig ist. Jedoch werden die beiden bisher konstruierten aneinander anschließenden Teilskalen:

$$(II) \quad 0, 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots$$

von vornherein folgendermaßen in eine „übergeordnete Skala“ eingeschachtelt:

Zwei neue Grenzpunkte ω^2 in der Richtung $\overrightarrow{01}$ und ω^{*2} in der Richtung $\overrightarrow{10}$ sind so angenommen, daß die Doppelverhältnisgleichung:

$$[0 \ \omega \ \omega^{*2} \ \omega^2] = [\omega \ \omega 2 \ \omega^{*2} \ \omega^2]$$

besteht. Mit Hilfe des Projektionszentrums Z_{II} und des Additionszentrums P_{II} (auf $Z_{II}\omega^{*2}$) entsteht die gegen ω^2 konvergierende übergeordnete Skala:

$$(III) \quad 0, \omega, \omega 2, \omega 3, \dots, \omega \nu, \dots$$

Auch hier gilt die Gleichungskette der Doppelverhältnisse:

$$[0 \ \omega \ \omega^2 \ \omega^{*2}] = [\omega \ \omega 2 \ \omega^2 \ \omega^{*2}] = \dots = [\omega \nu \ \omega(\nu + 1) \ \omega^2 \ \omega^{*2}].$$

Die beiden aufeinander folgenden Segmente $\overrightarrow{0\omega}$ und $\overrightarrow{\omega\omega 2}$ dieser Skala enthalten bzw. die beiden vorhin konstruierten aneinander anschließenden Punktfolgen (II). In derselben Weise liegt jetzt zwischen zwei gegebenen aufeinander folgenden Punkten $\omega \nu$ und $\omega(\nu + 1)$ von (III) eine Punktfolge von der Form:

$$\omega \nu, \omega \nu + 1, \omega \nu + 2, \dots, \omega \nu + \mu, \dots, \omega(\nu + 1).$$

Für alle solche eingeschachtelten Teilfolgen dient Z_{II} als Projektionszentrum; die zugehörigen Additionszentren $P_I^2, P_I^3, P_I^4, \dots$ liegen auf $Z_{II}\omega^*$.

Nach Konstruktion der bisher erhaltenen Punktfolge:

$0, 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \dots, \omega 2 + \nu, \dots, \omega 3, \dots, \omega 4, \dots, \omega \nu, \dots, \omega^2$ kann auch dieser eine neue Punktfolge übergeordnet werden mit dem Projektionszentrum Z_{III} und dem Additionszentrum P_{III} , nämlich die Folge:

$$(IV) \quad 0, \omega^2, \omega^2 2, \omega^2 3, \dots, \omega^2 \nu, \dots, \omega^3.$$

Zwischen zwei gegebenen aufeinander folgenden Punkten $\omega^{2\nu}$ und $\omega^2(\nu + 1)$ dieser Folge (IV) liegt eine Skala von der Form:

$$(IV a) \quad \omega^{2\nu}, \omega^{2\nu} + \omega, \omega^{2\nu} + \omega 2, \dots, \omega^{2\nu} + \omega \mu, \dots, \omega^2(\nu + 1).$$

Ihr Projektionszentrum ist Z_{III} , ihr Additionszentrum liegt auf der Geraden $Z_{III}\omega^{*2}$. Zwei aufeinander folgende Punkte von (IV a), z. B. $\omega^{2\nu}$ und $\omega^{2\nu} + \omega$, schließen ihrerseits wieder eine Punktfolge ein von der Form:

$$(IV b) \quad \omega^{2\nu}, \omega^{2\nu} + 1, \omega^{2\nu} + 2, \dots, \omega^{2\nu} + \mu, \dots, \omega^{2\nu} + \omega.$$

Die durch den bisherigen Konstruktionsprozeß gewonnene Punktfolge läßt sich auch über ω^3 hinaus unbegrenzt erweitern, und das gesetzmäßige Konstruktionsverfahren wird niemals eine letzte Schranke finden. Auf diese Weise entsteht auf g die Punktreihe:

$$(V) \quad \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3, \dots, \omega \nu, \dots, \omega^2, \\ \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \nu, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 + \omega \nu, \omega^2 + \omega \nu + 1, \dots, \omega^3, \omega^3 + 1, \dots \\ \dots (\nu_n \omega^n + \nu_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + \nu_1 \omega + \nu_0), \dots, \omega^\omega, \omega^\omega + 1, \dots, \omega^{\omega+1}, \dots, \omega^{\omega^n}, \dots, \omega^{\omega^\omega} = \varepsilon, \varepsilon + 1, \dots \end{cases}$$

Jeder Punkt geht in der Ordnung aus allen vorhergehenden Punkten durch geometrische Operationen hervor. Jedoch lassen sich am Konstruktionsprozeß zwei verschiedene Methoden unterscheiden und dementsprechend gehören der Reihe zwei verschiedene Arten von Punkten als Elemente an. Die Punkte *erster Art* gehen aus der Gesamtheit aller vorangehenden Elemente durch einen einzigen Konstruktionschritt hervor, nämlich durch eine Projektion von dem zuletzt benutzten Additionszentrum aus. Sind z. B. alle Elemente bis $\omega + 1$ bekannt und damit auch $(\omega + 1)'$, so entsteht das nächstfolgende Element $\omega + 2$ durch Projektion des Punktes $(\omega + 1)'$ aus dem Additionszentrum P_2^2 . Die Punkte *zweiter Art* sind dagegen Grenzpunkte von Teilskalen gebildet aus Punkten erster Art; so ist $\omega 2$ der Grenzpunkt der Folge: $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots$. Deshalb ergibt sich:

Die Punkte erster Art haben ein in der Wohlordnung unmittelbar vorangehendes Element, die Punkte zweiter Art haben ein solches nicht und sie sind Häufungspunkte.

3. Bei Abzählung der konstruierten Punkte repräsentieren die Punkte der ersten Teilskala: $0, 1, 2, \dots, \nu, \dots$ die natürlichen ganzen Zahlen, der Punkt ω und alle folgenden sind die Repräsentanten der transfiniten Ordnungszahlen.

Mit anderen Worten:

Die durch den Konstruktionsprozeß erzeugte wohlgeordnete Punktmenge (V) ist abzählbar durch die Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse.

Die Punktreihe (V) ist in der Bezeichnungsweise Cantors eine lineare, wohlgeordnete, auf g nirgends dichte Menge. Die Teilreihe aller Punkte von (V) bis zu einem gegebenen Elemente von der Form:

$$\nu_n \omega^n + \nu_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + \nu_1 \omega + \nu_0,$$

wo die ν_i ganze natürliche Zahlen darstellen, ist eine Menge erster Gattung n -ter Art. Ihre Häufungspunkte werden durch $\nu_0 = 0$ charakterisiert, jedoch sind Häufungspunkte verschiedener Ordnungen zu unterscheiden. So sind alle Punkte mit $\nu_0 = 0$, $\nu_1 \neq 0$ einfache Häufungspunkte; alle Punkte, für die $\nu_0 = \nu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$, müssen als Häufungspunkte einfacher Häufungspunkte angesehen werden u. s. f. Die Ordnung eines Häufungspunktes ist durch den niedrigsten Exponenten gegeben, der in der obigen symbolischen Form vorkommt.

Die Scheidung der transfiniten Zahlen in solche *erster* und *zweiter* Art — je nachdem die gegebene Zahl ein ihr unmittelbar vorangehendes Element besitzt oder nicht besitzt — entspricht im Konstruktionsprozeß der Unterscheidung von Punkten *erster* und *zweiter* Art auf Grund des gleichen Kriteriums. Gewisse Rechengesetze der transfiniten Zahlen folgen unmittelbar aus der Struktur der konstruierten Punktmenge.

Der bisherige Konstruktionsprozeß besteht aus projektiven Grundkonstruktionen (1.)

4. Durch dieses Konstruktionsverfahren können anscheinend nur Punkte von der Form:

$$\nu_n \omega^n + \nu_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + \nu_0$$

wirklich erreicht werden, wobei ν_i endliche ganze Zahlen bedeuten. Die Konstruktion des Punktes ω^ω erfordert bereits unendlich viele Schritte; dieser und die ihm folgenden scheinen durch den Konstruktionsprozeß höchstens gedanklich erfaßt zu werden. Für die bekannten transfiniten ε -Zahlen Cantors:

$$\omega^{\omega^{\dots}} = \varepsilon, \varepsilon + 1, \varepsilon + 2, \dots$$

müßte danach die geometrische Konstruierbarkeit längst aufgehört haben.

In Wirklichkeit ist das nicht so. Vielmehr ist es sogar möglich, nach Konstruktion der ersten Teilmenge: $0, 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega$ eine weitere gegebene transfinite Zahl, z. B. ε ,

mit einem Konstruktionsschritte durch einen gegebenen Punkt der Gerade g zu repräsentieren. Maßgebend hierfür ist die Tatsache, daß der bisherige Konstruktionsprozeß projektiv ist. Die zuerst konstruierte Teilreihe:

$$0, 1, 2, \dots, \nu, \dots \omega$$

werde vom Punkte 0 aus in der Richtung $\vec{01}$ im Ähnlichkeitsverhältnis:

$$\zeta = \frac{0\omega}{01}$$

gestreckt. Der Punkt 0 bleibt dabei fest, der Punkt 1 geht in den Punkt ω über; die weiteren Punkte der neuen Skala seien bzw.:

$$\omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\nu, \dots \omega^\omega$$

so daß der letzte Punkt ω^ω aus ω durch Streckung hervorgeht und vom Anfangspunkte 0 den Abstand $\zeta \cdot |0\omega|$ besitzt. Dann gilt:

$$0, 1, 2, \dots, \nu, \dots \omega \sim 0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^\nu, \dots \omega^\omega$$

Die Skalenteile zwischen zwei gegebenen Punkten ω^ν und $\omega^{\nu+1}$ fügen sich nach dem vorher angegebenen Konstruktionsprozeß von selbst ein, so daß jeder Punkt bis ω^ω einschließlich durch eine endliche Zahl von Konstruktionsschritten erreicht wird. Die Wiederholung der Ähnlichkeitskonstruktion führt direkt zu den ε -Zahlen. Eine abermalige Streckung

von 0 aus im Verhältnis ζ führt die Reihe: $0, \omega, \omega^2, \dots \omega^\omega$ über in: $0, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \varepsilon$.

Der Punkt $\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \varepsilon$ stellt dabei die kleinste ε -Zahl dar und liegt wegen der Beziehung:

$$0, 1, 2, \dots, \nu, \dots \omega \sim 0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^\nu, \dots \omega^\omega \sim 0, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \varepsilon$$

in der Entfernung $\zeta^2 |0\omega|$ vom Anfangspunkte 0. Abermals lassen sich die Intervalle zwischen zwei neuen Punkten, etwa zwischen ω^ω und ω^{ω^ω} , nach dem ersten Konstruktionsverfahren mittels Additionszentrum und Projektionszentrum ausfüllen.

Die transfiniten ε -Zahlen, die von den natürlichen Zahlen und von ω ausgehend durch Addition, Multiplikation und deren Wiederholungen in endlicher Schreibweise nicht darstellbar sind und die deshalb einer besonderen Schreibweise bedürfen, werden geometrisch durch Punkte eingeführt, die durch geometrische Grundkonstruktionen von endlicher Zahl nicht mehr erreichbar sind; ihre Bestimmung erfolgt durch absolute Grundkonstruktionen (1.).