Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Maximilian Leist
Jonas Metzinger

Repetitorium Analysis 1 (WS 2022/23)
Blatt 1
Induktion, Abzählbarkeit, Konvergenz von Folgen und Reihen

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(i) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(ii) Die Menge $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(iii) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(iv) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(v) Ist $I \neq \emptyset$ abzählbar und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\Pi_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(vi) (a_n) ist eine konvergente Folge reeller Zahlen genau dann, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

(vii) Für jede Folge (a_n) reeller Zahlen gilt: (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) beschränkt ist.

(viii) Seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver Zahlen, sodass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann konvergiert die Quotienten-Folge (a_n/b_n) gegen 0.

(ix) Eine Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodass $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(x) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(xi) Jede konvergente Reihe ist absolut konvergent.

(xii) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und (b_n) eine Folge nichtnegativer Zahlen sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Aufgabe 2 (Induktion): Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\Pi_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(v) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M_1, \ldots, M_n$ nichtleere, abzählbare Mengen. Dann ist $M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

(ii) Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon f \text{ Abbildung}\}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ überabzählbar.

Aufgabe 4 (Suprema und Infima): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und A sei nach oben beschränkt. Weiterhin gebe es für jedes $x \in B$ ein $y \in A$ mit $x < y$. Zeigen Sie dass dann ebenfalls B nach oben beschränkt ist mit $\sup B \leq \sup A$. Gilt auch $\sup B < \sup A$?

Aufgabe 5 (Grenzwerte von Folgen): Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf eigentliche oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \geq 1$.

(ii) $a_n = n \sin(\frac{1}{n})$.

(iii) $a_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1}$.

(iv) $a_n = (-1)^n \frac{n^2 - 2n}{n^3 + 4n + 1}$.

(v) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ mit $0 < a \leq b$.

Aufgabe 6 (Mehr zu Folgen): Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge (b_n) durch

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass (b_n) ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 7 (Und noch mehr zu Folgen):

(i) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Sei (a_n) eine Folge, sodass es $C \in [0,1)$ gibt, sodass $|a_{n+1}| \leq C|a_n|$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.

(iii) Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ ist und, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Aufgabe 8 (Konvergenz von Reihen):

(i) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

(ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Reihen?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Wert. *Hinweis: Partialbruchzerlegung.*

Aufgabe 9 (Mehr zu Reihen): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent ist. Gilt dies auch wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur als konvergent vorrausgesetzt ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 10 (Etwas kniffliger): Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt sodass $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Weiterhin nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash A$ offen ist. Zeigen Sie dass $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A$ ist.

Hinweis: Diese Aufgabe ist warscheinlich nicht relevant für die Klausur, ihr werdet in Analysis 2 eine viel allgemeinere Version dieser Aussage sehen. Dennoch ist die Aufgabe mit Kenntnissen aus der Analysis 1 lösbar.

Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Maximilian Leist
Jonas Metzinger

Repetitorium Analysis 1 (WS 2022/23)
Blatt 2
Komplexe Zahlen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

---

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Seien stets $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass D nicht nur einen Punkt enthält und $f, g : D \to \mathbb{R}$

(i) Es gibt keine Ordnung auf $\mathbb{C}$, so das die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

(ii) f ist stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(iii) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f stetig.

(iv) f ist nicht stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

(v) Ist f stetig in $x \in D$, dann ist f in x differenzierbar.

(vi) Ist f stetig und D beschränkt, dann ist f beschränkt.

(vii) Sind f und g nicht differenzierbar in $x \in D$ dann ist $f + g$ nicht differenzierbar in x.

(viii) Ist f gleichmäßig stetig und D beschränkt, dann ist f beschränkt.

(ix) Ist f differenzierbar und x_0 eine Extremstelle von f dann ist $f'(x_0) = 0$.

(x) Ist f 2-mal differenzierbar und $x_0 \in D$ sodass $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 kein lokales Extremum.

(xi) Ist f differenzierbar und $f > 0$ auf D dann ist f streng monoton wachsend.

(xii) Wenn ich in der Klausur eine Funktion ableite, dann gehe ich sicher dass die Funktion differenzierbar ist und schreibe es auch hin.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen): (i) Geben Sie für folgende komplexe Zahlen z jeweils Real-, Imaginärteil und den Betrag an und bringen Sie z auf die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $z = r \cdot e^{i\varphi}$ mir $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$.

(a) $z = 3 + 4i$.

(b) $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(c) $z = \frac{12}{5} + \frac{9}{5}i$.

(d) $z = e^{-i\pi}$.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$.
Hinweis für (c): Eine Lösung der Gleichung ist reell.

(a) $z^2 + 2z - 2i + 1 = 0$.

(b) $z^4 = 1$.

(c) $z^3 - iz^2 - 2z^2 + 7z + 4iz - 6 - 3i = 0$.

Hinweis: die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen, das bedeutet dass ein Polynom n-ten Grades über den komplexen Zahlen genau n Nullstellen hat (mit Vielfachheit gezählt, $n \geq 1$).

Aufgabe 3 (Stetigkeit): Untersuchen Sie folgende Funktionen f auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs. Welche der Funktionen sind gleichmäßig stetig?

(i) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}.$$

(ii) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) - 1 & , x \in [0, 1] \\ 0 & , x \in [-1, 0) \end{cases}.$$

(iii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in (0, 1) \\ -\sqrt{x - 1} + 1 & , x \in [1, \infty) \end{cases}.$$

(iv) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Aufgabe 4 (Sätze über stetige Funktionen): Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sodass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist f konstant.

(iii) Die Gleichung $\exp(x) + x = x^2$ besitzt mindestens eine Lösung in dem Intervall $[-1, 1]$.

Hinweis zu (i): Wenn $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, was ist dann $f(1)$?

Aufgabe 5 (Differenzierbarkeit): Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

(i) Sei $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ist f differenzierbar, so bestimme man f' und prüfe die Ableitung auf Stetigkeit.

(ii) Sei $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

(iii) Wieso ist die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{|x|}$$

nicht differenzierbar in $x = 0$?

Aufgabe 6 (Extremstellen): (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n e^{-n}$ an genau einer Stelle, nämlich $x = n$ ihr einziges (absolutes, als auch relatives) Maximum annimmt.

(ii) Sei folgende Funktion gegeben

$$f \colon \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log(x)}{x}.$$

Bestimmen Sie alle lokale als auch globale Extrema. Man bestimme zusätzlich die maximalen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ in denen die Funktion konvex, bzw. konkav ist.

Aufgabe 7 (Mittelwertsatz, Sätze über differenzierbare Funktionen): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, dann gilt genau dann $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, wenn f ein Polynom vom Grad echt kleiner n war.

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes für $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dass

$$\exp\left(x^2\right) \leq \frac{1}{1-2x^2}$$

gilt.

(iii) Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I und differenzierbar in $I\backslash\{a\}$ mit $a \in I$. Weiterhin existiere $c := \lim_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist und es gilt $c = f'(a)$.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergieren und nutzen Sie den Mittelwertsatz.

(iv) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend ist.

(v) Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in V$ mit $f'(x) > 0$. Zeigen Sie, dass ein offenes Intervall $U \subseteq V$ mit $x \in U$ existiert, sodass die Einschränkung

$$f\,|_U\colon U \to \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 8 (Grenzwerte): Entscheiden und zeigen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Sei $a > 0$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\exp\left(\cos(x)\right)-1}{x-\pi/2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(x)}{x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\sinh(x)+1)^{1/x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)+x}{\log(1+x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{7}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{a^{\log(x)}-x}{\log(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})$

Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Maximilian Leist
Jonas Metzinger

Repetitorium Analysis 1 (WS 2022/23)
Blatt 3
Integration, Funktionenfolgen, Taylorreihen

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind Wahr? Begründen Sie ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegegenbeispiel. Seien $a < b$ und $f_n, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Jede 2-mal differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

(ii) Wenn f stetig ist dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Lipschitz-stetig und differenzierbar.

(iii) Für jede integrierbare Funktion existiert eine analytisch geschlossene Formel für die Stammfunktion, d. h. wir können eine Stammfunktion konkret angeben.

(iv) Es gilt $\int e^{-x^2} dx = \frac{1}{-x^2} e^{-x^2}$.

(v) Jede auf einem beschränkten Intervall definierte stetige Funktion hat ein endliches Integral auf diesem Intervall.

(vi) Sei (f_n) eine stetige Funktionenfolge, die punktweise gegen f konvergiert. Ist f unstetig, so konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f.

(vii) Es sei $f \in C^\infty[a,b]$. Die Taylorreihe von f konvergiert auf ganz $[a,b]$.

Aufgabe 2 (Integrale ausrechnen): Bestimmen Sie folgende Integrale

(i)
$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

(ii)
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

(iii)
$$\int_0^{4\pi} x \sin(x) \cos(x) dx$$

(iv)
$$\int_0^1 \frac{x^2+4}{x^2+1}dx$$

(v)
$$\int_0^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$$

(vi)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(2x)dx$$

(vii)
$$\int_e^{e^e} \frac{\log(\log(x))}{x}dx$$

(viii)
$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

(ix)
$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

(x) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für welche das uneigentliche Integral
$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}dx$$
existiert. Bestimmen Sie den Wert, falls das uneigentliche Integral existiert.

Aufgabe 3 (Riemann-Integral): Sei $a < b$.

(i) Das Riemann-Integral ist monoton, d. h. für riemann-integrierbare Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ so gilt
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

(iii) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ riemann-integrierbar und es existiere ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist $1/f$ riemann-integrierbar.
Hinweis: Man betrachte geeignete Treppenfunktionen ψ, ϕ mit der Eigenschaft $\psi \leq f \leq \phi$ und
$$\int_a^b \psi(x) - \phi(x)dx \leq \varepsilon'.$$

(iv) Zeigen Sie, dass folgendes Integral konvergiert,

$$\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cos(x)dx.$$

Aufgabe 4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\varphi\colon [c,d]\to I$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c)=a$ und $\varphi(d)=b$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

(ii) Seien $\alpha,\beta\colon [a,b]\to[a,b]$ differenzierbar und sei f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Bestimme die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt.$$

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $H(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt$ mit $x_0\in[a,b]$.

Aufgabe 5 (Konvergenz von Funktionenfolgen): (i) Sei $f_n\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ durch

$$f_n(x)=\frac{x}{n^2}e^{-x/n}$$

definiert. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx=0?$$

(ii) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n\colon [0,2023]\to\mathbb{R}$ mit $f_n(x)=\sin(\frac{x}{n})$.

(b) $g_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ mit $g_n(x)=nx(1-x^2)^n$.

(c) $h_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $h_n(x)=\max\left\{0, n-n^2\left|x-\frac{1}{n}\right|\right\}$.

Aufgabe 6 (Funktionenfolge): Man zeige folgende Aussagen

(i) Sei $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die monoton fallend ist, d. h. $f_n\geq f_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Weiterhin konvergiere f punktweise gegen 0, dann konvergiert f gleichmäßig.

Hinweis: Man zeige die Aussage durch Widerspruch und nutze den Satz von Bolzano-Weierstraß.

(ii) Sei $f_n\colon [a,b] \to [A,B]$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion F konvergiert. Weiterhin sei $\varphi\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann konvergiert die Funktionenfolge $\varphi \circ f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $G := \varphi \circ F$.

(iii) Sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion $F\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Ebenso konvergiert sie punktweise gegen $G\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Gilt $F = G$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 7 (Satz von Taylor): (i) Sei $\alpha > 0$ und $|x| < 1$. Zeigen Sie, dass folgende Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^\alpha$$

mit $\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k}$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Reihe lediglich für $|x| < 1$ konvergiert.

Bestimmen Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Die Konvergenz der Taylorreihe gegen f lässt sich mit dem Lagrange Restglied nicht zeigen. Stattdessen nutzt man das Integralrestglied. Diesen Schritt müssen Sie also als gegeben annehmen.

(ii) Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ durch geeignete algebraische Umformungen die Taylorreihe von $f(x) = x^\alpha$ im Entwicklungspunkt $x_0 = a$ mit Hilfe von (i).

(iii) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \log(1+x)$ für $x \geq 0$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zusätzlich den Konvergenzradius derTaylorreihe. Konvergiert die Taylorreihe in dem Konvergenzbereich gegen die Funktion?

Hinweis: Nutzen Sie das Lagrange-Restglied für den letzten Teil der Aufgabe.