Logik für Informatiker

Vorlesung 12: Resolution

Babeş-Bolyai Universität, Department für Informatik, Cluj-Napoca
csacarea@cs.ubbcluj.ro

Klauselnormalform (konjunktive Normalform

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$

(1)	$(F \leftrightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
(2)	$(F \rightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee G)$	
(3)	$\neg(F \vee G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \wedge \neg G)$	
(4)	$\neg(F \wedge G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee \neg G)$	
(5)	$\neg\neg F$	$\Rightarrow_K$	F	
$(\neg\forall)$	$\neg\forall x F$	$\Rightarrow_K$	$\exists x \neg F$	
$(\neg\exists)$	$\neg\exists x F$	$\Rightarrow_K$	$\forall x \neg F$	(NNF)
(P)	Pränex Normalform			
(S)	Skolemisierung			
(6)	$(F \wedge G) \vee H$	$\Rightarrow_K$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$	
(7)	$(F \wedge \top)$	$\Rightarrow_K$	F	
(8)	$(F \wedge \bot)$	$\Rightarrow_K$	$\bot$	
(9)	$(F \vee \top)$	$\Rightarrow_K$	$\top$	
(10)	$(F \vee \bot)$	$\Rightarrow_K$	F	(KNF)

Übersicht

$$
\begin{array}{llll}
F & \stackrel{*}{\Rightarrow}_P & Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \; G & (G \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Pränexnormalform} \\
 & \stackrel{*}{\Rightarrow}_S & \forall x_1, \ldots, x_m \; H & (H \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Skolemnormalform} \\
 & \stackrel{*}{\Rightarrow}_K & \underbrace{\underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n}_{\text{weglassen}} \bigwedge_{i=1}^{k} \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i}}_{F'} & \text{Skolemnormalform mit Matrix in KNF}
\end{array}
$$

$N = \{C_1, \ldots, C_k\}$ heißt Klausel(normal)form (KNF) von F.
Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.
Falls F freie Variablen enthält, werden diese Variablen mit Konstanten ersetzt ($F(x)$ erfüllbar gdw. $\exists x F(x)$ erfüllbar)

Theorem: F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.

Viel Optimierungspotential vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u, z, x))) \rightarrow (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \Big)$$

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \to (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x))))\Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists z\Big((\neg\forall x p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x))))\Big) \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x))))\Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x_1 r(y,x_1))))\Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1(\neg p(u,z,x) \lor (q(z,y) \land r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \to (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists z\Big((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1)))) \Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u$, $z \mapsto sk_z$; $x \mapsto sk_x$; $x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \quad \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \to (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))\Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists z\Big((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))\Big) & \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))\Big) & \text{(NNF)} \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1))))\Big) & \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) & \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u, z \mapsto sk_z; x \mapsto sk_x; x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Skolemnormalform mit Matrix in KNF:

$$\Rightarrow_K^* \forall y((\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee q(sk_z, y)) \wedge (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee r(y, sk_{x_1}(y))))$$

Klauselmenge: $N = \{\{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), q(sk_z, y)\}, \{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), r(y, sk_{x_1}(y))\}\}$

Resolution für Grundklauseln

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

Resolutionsregel:

$$\frac{C \cup \{A\} \qquad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$$

$C \cup D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Beispiel

1.	$\{\neg P(f(a)), \quad Q(b)\}$	(gegeben)
2.	$\{P(f(a)), \quad Q(b)\}$	(gegeben)
3.	$\{\neg P(g(b,a)), \quad \neg Q(b)\}$	(gegeben)
4.	$\{P(g(b,a))\}$	(gegeben)
5.	$\{Q(b)\}$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\{\neg P(g(b,a))\}$	(Res. 5. in 3.)
8.	$\perp$	(Res. 4. in 6.)

Resolution für Grundklauseln

Resolutionsregel:

$$\frac{C \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

„$\vee$“ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Beispiel

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b,a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b,a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(Fakt. 5.)
7.	$Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 6.)
8.	$Q(b)$	(Fakt. 7.)
9.	$\neg P(g(b,a))$	(Res. 8. in 3.)
10.	$\perp$	(Res. 4. in 9.)

Korrektheit und Vollständigkeit

- Aussagenlogische Resolution ist korrekt und vollständig.
- Mengennotation: Resolutionsregel
- Klauselnotation: Resolutionsregel + Faktorisieren

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

- Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$
Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

BEISPIEL

$$\frac{\{p(x,f(x)), q(f(x))\} \qquad \{\neg r(f(y)), \neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma, \neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x)), L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

σ_1	$\sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$
σ_1	$\sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$
$\ldots$	

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)), q(f(x))\} \qquad \{\neg r(f(y)), \neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma, \neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x)),\ L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$

$\ldots$

Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

$q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y) \quad \Rightarrow \quad f(x) \stackrel{?}{=} y \quad \Rightarrow \quad y \stackrel{?}{=} f(x)$

$\sigma = [f(x)/y] \qquad \sigma(y) = f(x),\ \sigma(z) = z$ for $z \neq y$.

Unifikation

Sei $E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ (s_i, t_i Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

Definition: Eine Substitution σ heißt ein Unifikator von E g.d.w.

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i\sigma = t_i\sigma.$$

Existiert ein Unifikator, so heißt E unifizierbar.

Definition: σ heißt allgemeiner als τ

$$\sigma \leq \tau \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt Subst.}\, \varrho : \sigma \circ \varrho = \tau$$

wobei $(\sigma \circ \varrho)(x) := \varrho(\sigma(x))$ die Komposition von σ und ϱ als Abbildungen.[a]

---

[a] Ist wohldefiniert, weil $\sigma \circ \varrho$ einen endlichen Bereich hat.

Beispiel

$E = \{q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y)\}$

$\sigma_1 = [a/x, f(a)/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma_2 = [f(a)/x, f(f(a))/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma = [f(x)/y]$ ist ein Unifikator von E

σ ist allgemeiner als σ_1 und als σ_2:

$\sigma_1 = \sigma \circ [a/x]$

$$\sigma \circ [a/x](y) = \sigma(y)[a/x] = f(x)[a/x] = f(a)$$
$$\sigma \circ [a/x](x) = \sigma(x)[a/x] = x[a/x] = a$$

$\sigma_2 = \sigma \circ [f(a)/x]$

$$\sigma \circ [f(a)/x](y) = \sigma(y)[f(a)/x] = f(x)[f(a)/x] = f(f(a))$$
$$\sigma \circ [f(a)/x](x) = \sigma(x)[f(a)/x] = x[f(a)/x] = f(a)$$

Fakten

- Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $p(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $q(t_1, \ldots, t_n)$ sind niemals unifb.
- Eine Variable x und ein Term t, der x nicht enthält, sind immer unifb. (mittels $[t/x]$)
- Eine Variable x und ein Term $t \neq x$, der x enthält, sind niemals unifizierbar

Unifikationsalgorithmus von Martelli/Montanari

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & t \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & E \\[1em]
(2) & f(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{?}{=} f(t_1, \ldots, t_n), E & \Rightarrow_{MM} & s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n, E \\[1em]
(3) & f(\ldots) \stackrel{?}{=} g(\ldots), E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\[1em]
(4) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E[t/x] \\
 & & & \text{falls } x \in var(E), x \notin var(t) \\[1em]
(5) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
 & & & \text{falls } x \neq t, x \in var(t) \\[1em]
(6) & t \stackrel{?}{=} x, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E \\
 & & & \text{falls } t \notin X
\end{array}
$$

Beispiel 1

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} x, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), x \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 2

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} g(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}\\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\\
&\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}\\
&\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}\\
&\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}\\
&\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \overset{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \overset{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \overset{?}{=} z, g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), z \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), g(a,x) \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b)$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, v \overset{?}{=} v, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} b, a \overset{?}{=} a, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

Allgemeinster Unifikator:

$$[g(a,a)/z, v/y, a/x, b/w]$$

Vorsicht: a, b sind Konstanten. $[g(a,a)/z, v/y, x/a, w/b]$ ist keine Substitution!

Beispiel 4

$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \quad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}$
$x, y, z \in X$

$$\{p(g(x,a), g(f(x,b), y)) \stackrel{?}{=} q(g(f(x,b), y))\} \quad \stackrel{(3)}{\Rightarrow}_{MM} \perp \qquad \text{(weil } p \neq q\text{)}$$

Beispiel 4

$$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \qquad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}, \qquad x, y, z, u \in X$$

$$\{p(g(y,a), g(f(x,b),z)) \stackrel{?}{=} p(z, g(f(g(u,y),b),u), \qquad q(a) \stackrel{?}{=} q(y))\}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(y,a) \stackrel{?}{=} z, \quad g(f(x,b),z) \stackrel{?}{=} g(f(g(u,y),b),u), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\}\\
&\overset{(6,2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad f(x,b) \stackrel{?}{=} f(g(u,y),b), \quad z \stackrel{?}{=} u, \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\}\\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad f(x,b) \stackrel{?}{=} f(g(u,y),b), g(y,a) \stackrel{?}{=} u, \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\}\\
&\overset{(2,6)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(u,y), b \stackrel{?}{=} b, \quad u \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\}\\
&\overset{(1)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(u,y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\}\\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad g(a) \stackrel{?}{=} g(y)\}\\
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad a \stackrel{?}{=} y\}\\
&\overset{(6)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y,a), \quad y \stackrel{?}{=} a\}\\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(a,a),a), \quad u \stackrel{?}{=} g(a,a), \quad y \stackrel{?}{=} a\}
\end{aligned}$$

Allgemeinster Unifikator (mgu): $[g(a,a)/z, \quad g(g(a,a),a)/x, \quad g(a,a)/u, \quad a/y]$

Unifikation: Haupteigenschaften

Definition. Eine Substitition σ heißt idempotent, wenn $\sigma \circ \sigma = \sigma$.

Lemma.
σ ist idempotent gdw. $dom(\sigma) \cap codom(\sigma) = \emptyset$.

Theorem.

1. $E \Rightarrow^*_{MM} \perp$ gdw. E nicht unfizierbar.
2. E unifizierbar gdw. $E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, x_k \stackrel{?}{=} u_k$, mit x_i pw. verschieden, $x_i \notin var(u_j), 1 \leq i, j \leq k$.
3. Falls $E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, x_k \stackrel{?}{=} u_k$, mit x_i pw. verschieden, $x_i \notin var(u_j)$ so $\sigma = [u_1/x_1, \ldots, u_k/x_k]$ ist allgemeinster Unifikator von E.

Unifikation: Haupteigenschaften

Theorem.
E unifizierbar g.d.w. es gibt allgemeinsten Unifikator σ von E, so dass:
(1) σ idempotent und
(2) $dom(\sigma) \cup codom(\sigma) \subseteq var(E)$.

Notation: $\sigma = \text{mgu}(E)$ („most general unifier")

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$

Beispiel

$$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\} \qquad \{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a,x) \overset{?}{=} p(y,y)\} &\Rightarrow_{MM} \{a \overset{?}{=} y, x \overset{?}{=} y\} \\ &\Rightarrow_{MM} \{y \overset{?}{=} a, x \overset{?}{=} a\} \end{aligned}$$

$\mathrm{mgu}(L, L')$: $\quad \sigma = [a/y, a/x]$

Beispiel

$$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\} \qquad \{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a,x) \overset{?}{=} p(y,y)\} &\Rightarrow_{MM} \{a \overset{?}{=} y, x \overset{?}{=} y\} \\ &\Rightarrow_{MM} \{y \overset{?}{=} a, x \overset{?}{=} a\} \end{aligned}$$

mgu(L, L'): $\quad \sigma = [a/y, a/x]$

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

$$R := \{p(x,x)\}\sigma \cup \{\}\sigma = \{p(a,a)\}$$

BEISPIEL

$$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\} \qquad \{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a,x) \stackrel{?}{=} p(y,y)\} &\Rightarrow_{MM} \{a \stackrel{?}{=} y, x \stackrel{?}{=} y\} \\ &\Rightarrow_{MM} \{y \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a\} \end{aligned}$$

mgu(L, L'): $\sigma = [a/y, a/x]$

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

$$R := \{p(x,x)\}\sigma \cup \{\}\sigma = \{p(a,a)\}$$

$$\frac{\{p(a,x), p(x,x)\} \qquad \{\neg p(y,y)\}}{\{p(a,a)\}}$$

Prädikatenlogische Resolution

Resolutionsregel in dieser Form alleine unvollständig für Prädikatenlogik

Beispiel:

$\{\{p(x), p(y)\}, \{\neg p(u), \neg p(v)\}\}$

- unerfüllbar
- aber nur Resolventen der Länge 2