Dr. Christian Săcărea

“Babeş–Bolyai” Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2019/2020

14. Übung zur Vorlesung

Logik für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 45)

Seien $\Pi = \{P, Q, R, S, T, U, W, X\}$ eine Menge von propositionalen Konstanten und F die folgende Formel über Π geschrieben als Konjunktion von Implikationen:

$F =$

1. $\rightarrow R$
2. $Q \rightarrow$
3. $P, U \rightarrow Q$
4. $T, X \rightarrow P$
5. $R \rightarrow X$
6. $R, X \rightarrow T$
7. $R, P \rightarrow S$
8. $S, T \rightarrow P$

a) Definieren Sie Horn-Formel. Wie ändert sich die Definition, falls die Formel als Konjunktion von Implikationen aufgeschrieben ist? (1 Punkt)

b) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus, um die Erfüllbarkeit von F zu untersuchen. Geben Sie explizit jeden Schritt an, welche Atome markiert werden und wieso die Markierung zustande kommt. (5 Punkte)

c) Verwenden Sie voriges Ergebnis, um zu begründen ob die Formel F erfüllbar ist oder nicht. Geben Sie im Fall der Erfüllbarkeit das Modell an, das aus dem Markierungsalgorithmus hergeleitet wurde. (2 Punkte)

(G 46)

Seien $\Pi = \{P, Q\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und F die folgende Formel über Π:

$$F : \neg(\neg((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg Q) \rightarrow (\neg Q \vee \neg P)).$$

a) Verwenden Sie den DPLL-Algorithmus, um die Erfüllbarkeit von F zu untersuchen. (5 Punkte)

b) Verwenden Sie das vorige Ergebnis, um eine begründete Aussage zur Erfüllbarkeit von F zu machen. (2 Punkte)

(G 47)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/3, r/4\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $u, v, w, x, y, z \in X$.

a) Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in NNF an. (2 Punkte)

$$\neg\exists x((\forall y \neg q(x,y,b)) \rightarrow (r(x,y,a,b))).$$

b) Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in bereinigter Form an. (2 Punkte)

$$\forall x \forall y(\neg r(a,y,z,x) \wedge (\exists y \neg q(z,x,y)) \vee (\forall z r(a,z,x,y))).$$

c) Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in Pränexnormalform an. (1 Punkt)

$$(\forall x((\exists y q(y,x,a)) \wedge \neg p(x,a))) \vee (\forall u \forall w r(w,a,u,b)).$$

d) Bringen Sie die folgende Formel über Σ und X in Skolemnormalform. (2 Punkte)

$$\exists u \forall x \exists w \forall y \exists z((q(a,z,u) \vee \neg p(x,y)) \wedge r(z,w,a,v) \wedge \neg p(u,x)).$$

e) Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in KNF an. (2 Punkte)

$$\forall x \forall y(((\neg p(x,y) \wedge q(x,x,y)) \vee (\neg p(a,b) \wedge q(x,y,a))) \wedge p(x,y))$$

f) Stellen Sie die folgende Formel über Σ und X als Klauselmenge dar. (1 Punkt)

$$\forall x \forall y(q(a,x,y) \wedge (p(a,x) \vee r(b,a,y,x) \vee \neg q(a,a,a)) \wedge p(y,y)).$$

(G 48)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, f/1, g/1, h/2\}$ und $\Pi = \{= /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \{0_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}, f_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, g_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, so dass

- $0_{\mathcal{A}} = 2 \in \mathbb{Z}$
- $f_{\mathcal{A}}(r) = r - 1 \in \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$
- $g_{\mathcal{A}}(r) = -r^2 \in \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$
- $h_{\mathcal{A}}(r_1, r_2) = r_1 + r_2^2 \in \mathbb{Z}$ für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$
- $=_{\mathcal{A}} = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ ist die Gleichheitsrelation und
- $\beta \colon X \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\beta(x) = 1, \beta(y) = 0, \beta(z) = 0$.

Evaluieren Sie die folgenden Terme und Formeln:

a) $\mathcal{A}(\beta)(h(f(g(x)), h(y,0)))$ (2 Punkte)

b) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \forall y(f(y) = f(h(y,x))))$ (3 Punkte)

c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \exists y(f(h(g(x),y)) = z))$. (3 Punkte)

(G 49)

Seien $\Omega = \{a/0, h/1, f/3, g/2\}$ eine Menge von Funktionensymbolen, X eine Menge von Variablen und $u, w, x, y, z \in X$. Verwenden Sie den Martelli-Montanari-Algorithmus an, um die Unifizierbarkeit der folgenden Unifikationsprobleme über Ω und X zu untersuchen. Geben Sie explizit den allgemeinsten Unifikator an (mgu).

a) $\{f(x,z,h(w)) \stackrel{?}{=} f(h(u),u,h(h(u))), g(x,h(y)) \stackrel{?}{=} g(w,h(h(x)))\}$. (2+2 Punkte)

b) $\{f(w, g(w, x), x) \stackrel{?}{=} f(y, g(y, f(a, y, z)), y)\}$. (2+2 Punkte)

(G 50)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, f/1\}$ und $\Pi = \{p/3, q/2\}$. Seien X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$.

a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Klauseln über Σ und X faktorisierbar sind. Ist eine Klausel faktorisierbar, geben Sie den Faktor und den verwendeten Unifikator an. Führen Sie dabei die Substitution im Ergebnis explizit an. Ist eine Klausel nicht faktorisierbar, begründen Sie, warum dem so ist. (4 Punkte)

1. $\{q(f(x), x), q(f(f(z)), f(z)), p(x, a, z)\}$
2. $\{q(f(x), x), q(z, f(z)), q(a, b), p(x, a, z)\}$
3. $\{q(x, f(x)), p(f(f(y)), f(f(x)), f(b)), p(f(x), z, f(x))\}$.

b) Seien die folgenden Klauseln gegeben: (4 Punkte)

(1) $\{\neg p(a, f(y), y), q(y, f(x))\}$

(2) $\{p(x, y, y), \neg q(y, y)\}$

(3) $\{p(x, x, x), \neg p(y, f(y), y), q(x, f(y))\}$

Bilden Sie sämtliche Resolventen, die sich mit der Resolutionsregel aus den folgenden Klauseln über Σ und X bilden lassen:

- (1) und (2).
- (2) und (3).
- (1) und (3).

Geben Sie dabei explizit die verwendeten Unifikatoren und durchgeführten Umbennenungen und Substitutionen an.