7: Eigenwerte & Eigenvektoren

7.1 Def.: Vorgelegt: K-VR V, Endomorphismus $f: V \to V$.
Ein Skalar $t \in K$ heißt Eigenwert von f, falls die Gleichung $f(\vec{u}) = t \cdot \vec{u}$ eine Lösung $\vec{u} \neq \vec{0}$ besitzt.
Ein solches $\vec{u}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert t.
Der Lösungsraum $E_t(f) = \{ \vec{u} \in V \mid f(\vec{u}) = t \cdot \vec{u} \}$ heißt Eigenraum zum Eigenwert t.

Abkürzungen:
EW : Eigenwert
EV : Eigenvektor
ER : Eigenraum

7.2 Notiz: $f(\vec{u}) = t \cdot \vec{u} \iff \underline{\vec{0} =} \, f(\vec{u}) - t \cdot \vec{u} = \underline{(f - t \cdot id_V)(\vec{u})}$

Erinnerung: $(f - t \cdot id_V)(\vec{u}) = f(\vec{u}) - t \cdot id_V(\vec{u}) = f(\vec{u}) - t \cdot \vec{u}$.
$f - t \cdot id_V : V \to V$ linear.

Also: $E_t(f)$ ist der Lösungsraum der linearen Gleichung $(f - t \cdot id_V)(\vec{u}) = \vec{0}$ und daher ein Untervektorraum.

Beispiel 1: $V = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\underline{u}) = A \cdot \underline{u}$

$$\underline{0} = f(\underline{u}) - t \cdot \underline{u} = A \cdot \underline{u} - t \cdot E \cdot \underline{u} = (A - t \cdot E) \cdot \underline{u}$$

LGS besitzt genau dann eine Lösung $\underline{u} \neq \underline{0}$, wenn $\det(A - t \cdot E) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

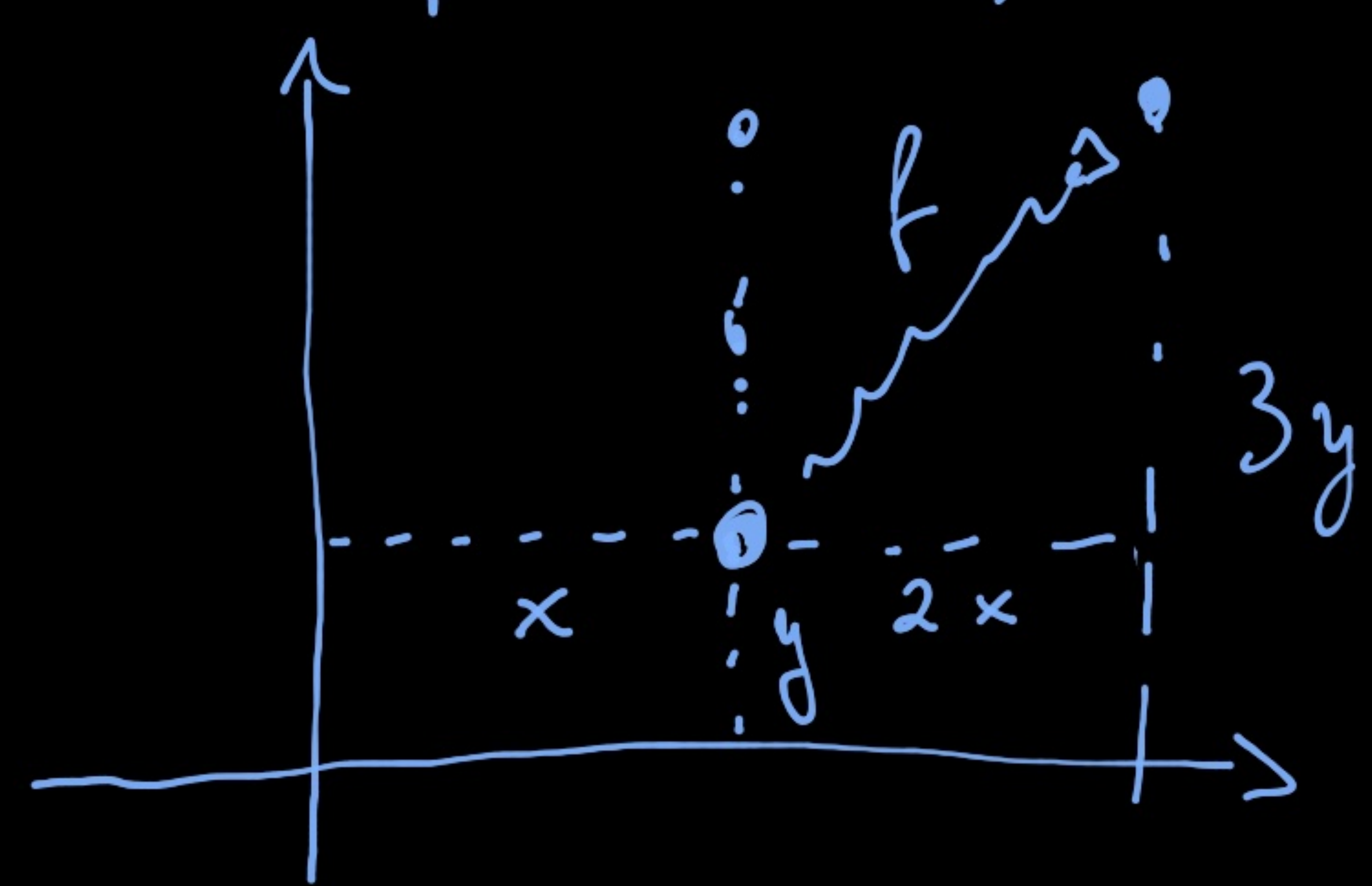
$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2, 3$ EW von f, $\det(A - t \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix}$

$$= (2-t) \cdot (3-t)$$

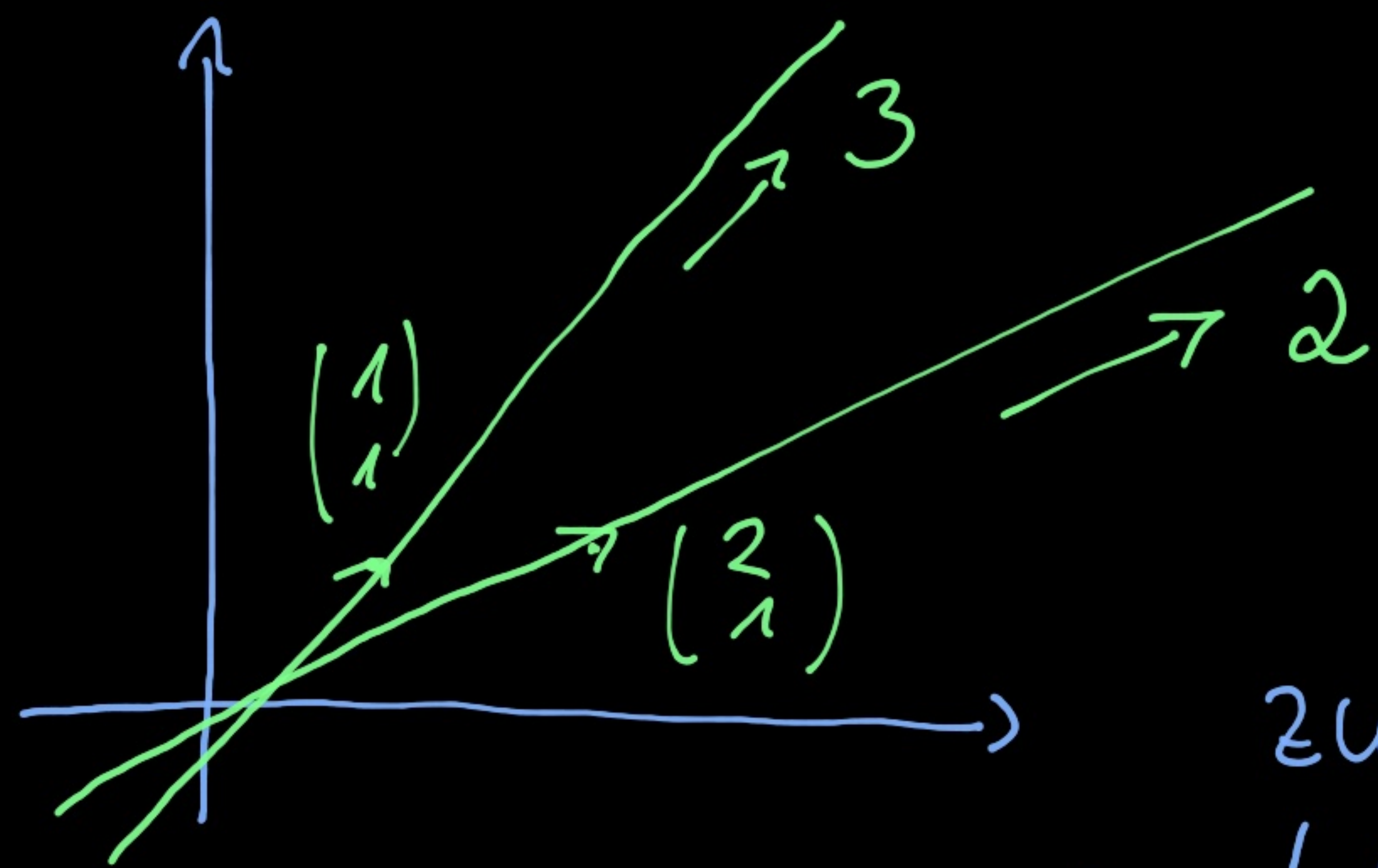
$\leadsto$ alle EW gefunden

$E_2(f) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $E_3(f) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



Beispiel 2

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zugeh. Matrix A

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\,\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad ? \quad [f]_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel 3</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(\underline{u}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underline{u}$

EW ausrechnen: $0 = \det(A - t\cdot E) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)\cdot(2-t)$

Also: $t = 2$ ist der einzige EW von f

ER ausrechnen:

$$A - 2\cdot E = \begin{array}{cc|c} 0 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow E_2(f) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Angenommen, es gibt eine Basis B mit $[f]_B^B = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$,

dann gilt:

$$[f]_B^B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=[\underline{u}]_B} = t_1 \underline{u} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=[\underline{v}]_B} = t_2 \cdot \underline{v} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{u}, \underline{v}$ EV zu t_1, t_2 $\rightsquigarrow$ $t_1 = t_2 = 2$

$\rightsquigarrow$ $\underline{u}, \underline{v} \in E_2(f)$, aber: $\underline{u}, \underline{v}$ linear unabh.

Das geht nicht!

Beispiel 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\underline{u}) = A \cdot \underline{u}$

$\boxed{V = \mathbb{R}^2}$ Eigenwerte ausrechnen.

$$0 = \det(A - tE) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 + 1$$

$$= (t-1)^2 + 1$$

$\Leftrightarrow \quad (t-1)^2 = -1$: keine Lösung!

Folgt: Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, sod. $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{V = \mathbb{C}^2}$ $(t-1)^2 = -1 \Leftrightarrow t = +1 \pm i$ EW von f.

ER: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-(1\pm i) & -1 & 0 \\ 1 & +1-(1\pm i) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mp i & -1 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -i \\ -I \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mp i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$E_{1+i}(f) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{1-i}(f) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ Basis von $\mathbb{C}^2$ mit $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$

Beispiel 5:

$\mathbb{R}$-VR: $\quad V = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ bel. oft differenzierbar} \}$

Endomorphismus $D : V \longrightarrow V$, $\quad D(\varphi) = \varphi'$ $\quad$ Differential-Operator

linear! $\quad (\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi'$

$\quad (r \cdot \varphi)' = r \cdot \varphi'$

$$D(e^{k \cdot x}) = (e^{k \cdot x})' = k \cdot e^{x} \qquad (k \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

$\rightsquigarrow$ e^x ist EV zum EW k

Jede reelle Zahl k ist ein EW von D

$E_k(D)$: $\quad D(\varphi) = k \cdot \varphi$

$\quad \varphi' = k \cdot \varphi \iff \varphi(x) = c \cdot e^{kx}$

$\quad c \in \mathbb{R}$ Konst.

Also: $\quad E_k(D) = \operatorname{span}\{ e^{kx} \}$

AB HIER SIND ALLE VR ENDLICH-DIMENSIONAL!

7.3 Def.: Vorgelegt ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$

Ein Skalar $t \in K$ heißt Eigenwert von A, falls

die Gleichung $A \cdot \underline{u} = t \cdot \underline{u}$ bzw $(A - t \cdot E) \cdot \underline{u} = \underline{0}$

eine Lösung $\underline{u} \neq \underline{0}$ besitzt.

Solche Lösungen $\underline{u}$ heißen Eigenvektoren zum EW t,

der Lösungsraum $E_t(A) = \{ \underline{u} \mid (A - t \cdot E) \cdot \underline{u} = \underline{0} \}$

heißt Eigenraum zum EW t.

Beachte: $f(\underline{u}) = A \cdot \underline{u}$ ist linear.

7.4 Satz Genau die Nullstellen des charakteristischen

Polynoms $\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E) = (-1)^n \cdot t^n + \ldots\ldots$

"Chi"

sind die Nullstellen von A.

Beweis: $(A - t \cdot E) \cdot \underline{u} = \underline{0}$ hat Lsg. $\underline{u} \neq \underline{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det(A - tE) = 0$.

Notiz: $\chi_A(t)$ hat höchstens n Nullstellen.

7.5 Def: Zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen **ähnlich** (i.Z. $A \sim B$), falls es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ mit

$$B = TAT^{-1}$$

gibt.

Notiz $f: V \to V$ Endomorphismus, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = T\,[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\,T^{-1} \quad \text{mit } T = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

(vgl. Transformationsformel)

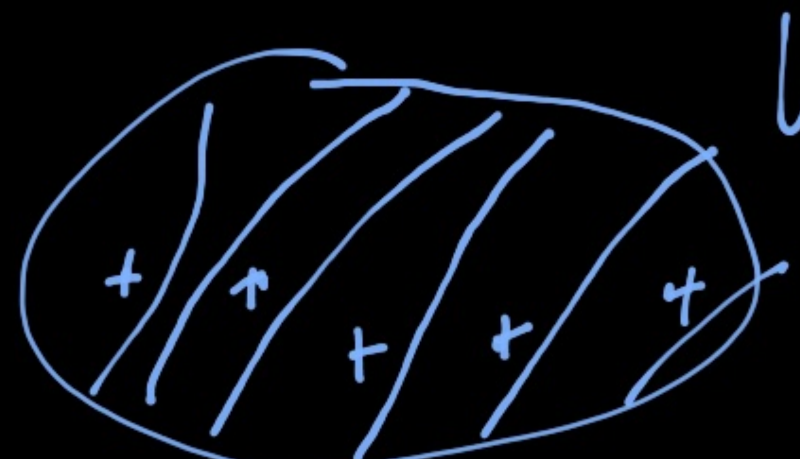
Darstellungsmatrizen von f bzgl. verschiedener Basen sind ähnlich.

Notiz

$A \sim A$, denn $A = EAE^{-1}$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$, denn $B = TAT^{-1} \Rightarrow A = T^{-1}B(T^{-1})^{-1}$

$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$, denn ...



$K^{n\times n}$

$$[A]_\sim = \{ B \in K^{n\times n} \mid B \sim A \} \ni A$$

$$K^{n\times n} = \bigcup_{A \in K^{n\times n}} [A]_\sim$$

$$[A]_\sim \cap [B]_\sim \neq \emptyset \Rightarrow [A]_\sim = [B]_\sim$$

7.6 Satz Sind A, B ähnliche Matrizen, so gilt $\chi_A(t) = \chi_B(t)$. Speziell besitzen A, B die gleichen Eigenwerte.

Beweis $A \sim B \Rightarrow$ es gibt eine invertierbare Matrix T mit $B = TAT^{-1}$.

$$T \cdot (A - t \cdot E) \cdot T^{-1} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=B} - t \cdot \underbrace{TET^{-1}}_{=E}$$

$$= B - t \cdot E$$

Also:
$$\begin{aligned}\chi_B(t) &= \det(B - t \cdot E) \\ &= \det(T(A - t \cdot E)T^{-1}) \\ &= \cancel{\det(T)} \cdot \det(A - tE) \cdot \cancel{\det(T)}^{-1} \\ &= \det(A - t \cdot E) = \chi_A(t).\end{aligned}$$ ∎

Notiz: Für einen Endomorphismus $f: V \to V$ ist $\chi_f(t) = \det([f]_B^B - t \cdot E)$ sinnvoll.

char Polynom von f.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2 \cdot E$

$$\left.\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 \\ \chi_B(t) &= \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 \end{aligned}\right\} =$$

A und B sind <u>nicht</u> ähnlich,

denn $TAT^{-1} = T \cdot (2E) \cdot T^{-1} = 2 \cdot E = A \neq B$

Notiz: $\chi_A(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det(A)$

Also: $\chi_A(t) = (-1)^n \cdot t^n + \ldots + \det(A)$

Kann zeigen: $\chi_A(t) = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1} \cdot tr(A)\, t^{n-1}$

$+ \ldots + \det(A)$

Summe der Diagonal-elemente

7.7 Def.

(a) Ein Endomorphismus $f: V \to V$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis B gibt, für die
$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$$
gilt.

(b) Eine zu einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$ ähnliche Matrix heißt diagonalisierbar.

Notiz: f diagonalisierbar $\Rightarrow$ $[f]_C^C$ diagonalisierbar für jede Basis C

$[f]_C^C$ diagonalisierbar $\Rightarrow$ f diagonalisierbar

Denn: $[f]_B^B = D$ Diagonalmatrix

$\Rightarrow$ $D = [f]_B^B = T\,[f]_C^C\,T^{-1} \sim [f]_C^C$ ✓

Umgekehrt: $[f]_C^C = T D T^{-1}$, $D = T^{-1} [f]_C^C\, T$

T Trafomatrix $B \rightsquigarrow C$: $D = [f]_B^B$ ✓

Notiz $A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar, $A \sim D = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\chi_A(t) = (t_1 - t) \cdot \ldots \cdot (t_n - t) = \chi_D(t)$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\det(A - t\cdot E) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (t-1)^2 + 1$
hat keine NSt. $\Longrightarrow$ A ist nicht diagonalisierbar.
ABER: $A \sim \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A(t) = (t-2)^2$

A ist nicht diagonalisierbar!

Sprachregelung:

$p(t) \in K[t]$ Polynom mit Nullstelle t_0.
Die Vielfachheit der Nullstelle t_0 ist diejenige Zahl $k \geq 1$, für die
$p(t) = (t-t_0)^k \cdot q(t)$ mit einem passenden Polynom $q(t)$ mit $q(t_0) \neq 0$ gilt.

Beispiel: $p(t) := (t-2)^3 \cdot (t-3)^5 \cdot \left(t - \frac{\pi^2}{6}\right)^3 \cdot (t^2 + t + 1)$

7.8 Def: Vorgelegt: $A \in K^{n \times n}$ sowie ein Eigenwert t_0 von A.

(a) Die algebraische Vielfachheit $s_{alg}(A, t_0)$ ist die Vielfachheit von t_0 als NSt von $\chi_A(t)$.

(b) Die geometrische Vielfachheit $s_{geo}(A, t_0)$ ist die Dimension des ER $E_{t_0}(A)$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow s_{alg}(A, 2) = 2 \neq 1 = s_{geo}(A, 2)$

$E_2(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \chi_A(t) = (t-2)^2$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow s_{alg}(A, 2) = 2 = 2 = s_{geo}(A, 2)$

7.9 Satz: Vorgelegt: $A \in K^{n \times n}$ mit EW t_0. Dann

$$\boxed{1 \leq s_{geo}(A, t_0) \leq s_{alg}(A, t_0)}$$

$\dim E_{t_0}(A) \geq 1$

7.10 Satz: Vorgelegt ist ein K-VR V sowie ein Endomorphismus $f: V \to V$. Weiterhin seien $t_1, \dots, t_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f. Zu jedem t_i sei außerdem ein bel. Eigenvektor $\vec{u}_i \; (\neq \vec{0})$ vorgegeben.

Dann sind $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ linear unabhängig.

Kurz: $\boxed{\text{EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig}}$

Beweis: Angenommen, dieser Satz ist falsch.

Dann gibt es ein Gegenbeispiel mit minimalem m.

Es gibt $r_1, \dots, r_m \in K$ mit: $(r_1, \dots, r_m) \neq (0, \dots, 0)$ und $r_1 \vec{u}_1 + \dots + r_m \vec{u}_m = \vec{0}$. Speziell: $m \geq 2$

Außerdem: $r_1, \dots, r_m \neq 0$ (wg. m minimal)

Es gilt $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(r_1 \vec{u}_1 + \dots + r_m \vec{u}_m) = r_1 f(\vec{u}_1) + \dots + r_m f(\vec{u}_m)$

$= r_1 t_1 \vec{u}_1 + \dots + r_m t_m \vec{u}_m$.

Folgt: $\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} r_i t_i \vec{u}_i - t_m \sum_{i=1}^{m} r_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{r_i (t_i - t_m)}_{\neq 0} \vec{u}_i$, $t_i \neq t_m$

$\Rightarrow \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m-1}$ lin. abh.: kleineres Gegenbeispiel, $\lightning$ m minimal ∎

7.11 Satz: Vorgelegt ist ein n-dimensionaler K-VR V und ein Endomorphismus $f: V \to V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar

(b) Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

(c) f hat die Eigenwerte $t_1, \ldots, t_m$ und es gilt $g_{geo}(f, t_1) + \ldots + g_{geo}(f, t_m) = n$.

(d) Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren $\left(\chi_f(t) = (t_1 - t)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (t_m - t)^{\alpha_m} \right)$ und für jeden Eigenwert t_i gilt $g_{alg}(f, t_i) = g_{geo}(f, t_i)$.

Beweis $(a \Rightarrow b)$ Es gibt Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = B$ mit

$[f]^B_B = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$. Also: $f(\vec{b}_i) = t_i \vec{b}_i$, d.h.

$\vec{b}_i$ ist EV von f.

7.11 **Satz**: Vorgelegt ist ein n-dimensionaler K-VR V und ein Endomorphismus $f: V \to V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar

(b) Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Beweis: ($b \Rightarrow a$)

Nach Vor. gibt es eine Basis $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ von V mit $f(\vec{b}_i) = t_i \vec{b}_i$ — (für ein $t_i \in K$).

$$[f]^B_B \cdot \underline{e}_i = [f]^B_B \cdot [\vec{b}_i]_B = [f(\vec{b}_i)]_B$$

$$= [t_i \vec{b}_i]_B = t_i \cdot [\vec{b}_i]_B = \underbrace{t_i \underline{e}_i}_{i\text{-te Spalte von } [f]^B_B}$$

Also: $[f]^B_B = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix}$ ist diagonal

(b) Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

(c) f hat die Eigenwerte $t_1, \ldots, t_m$ und es gilt $g_{geo}(f, t_1) + \ldots + g_{geo}(f, t_m) = n = \dim V$.

Beweis von ($b \Longleftrightarrow c$):

Es seien $t_1, \ldots, t_m$ die Eigenwerte von f (paarw. versch.)

Setze $g_i = g_{geo}(f, t_i) = \dim E_{t_i}(f)$

Wähle Basis $(\vec{u}_{i,1}, \ldots, \vec{u}_{i,g_i}) = B_i$ von $E_{t_i}(f)$.

Dann ist $\underbrace{(\vec{u}_{1,1}, \ldots, \vec{u}_{1,g_1}, \ldots, \vec{u}_{m,1}, \ldots, \vec{u}_{m,g_m})}_{=: B}$ lin. unabh.,

denn: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{g_i} r_{i,j} \cdot \vec{u}_{i,j} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{g_i} r_{i,j} \vec{u}_{i,j}}_{\in E_{t_i}(f)} = \vec{0}$ für jedes i $\overset{B_i \text{ Basis}}{\Longrightarrow}$ $r_{i,j} = 0$ für alle j

B ist genau dann eine Basis, wenn $g_1 + \ldots + g_m = n$. ✓

(c) f hat die Eigenwerte $t_1, \ldots, t_m$ und es gilt $g_{geo}(f, t_1) + \ldots + g_{geo}(f, t_m) = n$.

(d) Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren $\left(\chi_f(t) = (t_1 - t)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (t_m - t)^{\alpha_m} \right)$ und für jeden Eigenwert t_i gilt $g_{alg}(f, t_i) = g_{geo}(f, t_i)$.

Beweis von ($c \Leftrightarrow d$):

(Notiz: $t_1, \ldots, t_m$ paarw. verschieden, alle EW)

$g_i = g_{geo}(f, t_i)$, $\alpha_i = g_{alg}(f, t_i)$

Polynom ohne Nullstellen

Also: $\chi_f(t) = (t - t_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (t - t_m)^{\alpha_m} \cdot g(t)$

$$n = \operatorname{grad} \chi_f(t) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + \operatorname{grad} g(t)$$
$$\geq g_1 + \ldots + g_m + \operatorname{grad} g(t)$$

$g_1 + \ldots + g_n = n \iff \operatorname{grad} g(t) = 0$ bzw. $g(t) = 1$
((c) gilt)

und. $g_1 + \ldots + g_m = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$,

wg. $g_i \leq \alpha_i$: $g_i = \alpha_i$ für alle i ∎

Beispiel 1: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{C} \}$

$f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = (x+1) \cdot (r_1 + 2 r_2 x)$

Ist f diagonalisierbar? $= r_1 + (r_1 + 2r_2) x + 2 r_2 x^2$

Wähle Basis: $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

Dann: $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\chi_f(t) = \det([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} - t \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 0-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$

$= -t \cdot (1-t)(2-t)$ zerfällt in Linearfaktoren

Eigenwerte $0, 1, 2$ mit Vielf. $g_{alg}(0) = g_{alg}(1) = g_{alg}(2) = 1$

$1 \leq g_{geo}(0) \leq g_{alg}(0) = 1 \implies g_{geo}(0) = 1$

Analog: $g_{geo}(1) = g_{geo}(2) = 1$

Folgt $g_{geo}(0) + g_{geo}(1) + g_{geo}(2) = 3 = \dim V$

Also ist f diagonalisierbar!

$C = (1, 1+x, 1+2x+x^2 = (1+x)^2) \rightsquigarrow [f]^C_C = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 2: Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar? $(K = \mathbb{R})$

Gleiche Frage: Ist $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(\underline{u}) = A \cdot \underline{u}$ diagonalisierbar?

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-t & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\mathrm{IV} \end{matrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4-t & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t & 1 \\ 1 & 0 & t-3 & -t \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{matrix} = \det \begin{pmatrix} 4-t & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

nach 3. Spalte entwickeln

$$= (3-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-t & 1 & 0 \\ -3 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} - (1-t) \cdot \mathrm{I}$$

NR: $(4-t)(1-t) = t^2 - 5t + 4$

$$= (3-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-t & 1 & 0 \\ -7+5t-t^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= -(3-t) \cdot \det \begin{pmatrix} -7+5t-t^2 & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (t-3) \cdot (t^3 - 5t^2 + 7t - t^2 + 5t - 7 - 1)$$

$$= (t-3) \cdot (t^3 - 6t^2 + 12t - 8) = (t-3)(t-2)^3$$

Beispiel 2: (Forts.) Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar? $(K = \mathbb{R})$

$$\chi_A(t) = (t-3)\cdot(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) = (t-3)\cdot(t-2)^3$$

$\chi_A(t)$ zerfällt in Linearfaktoren ✓

$s_{alg}(3) = 1 = s_{geo}(3)$ ✓

A diagonalisierbar, wenn $s_{geo}(2) = s_{alg}(2) = 3$

$\dim E_2(A)$, $\quad E_2(A) = \ker(A - 2\cdot E)$

$$A - 2\cdot E \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\,I + III + IV \\ \\ \\ \end{array} \Bigg\| \begin{array}{l} -\,2\cdot \underline{IV} \\ \\ :2 \\ \\ \end{array} \Bigg\| \text{ sortieren}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ eine freie Variable, also $s_{geo}(2) = \dim E_2(A) = 1 \neq 3$

Ergebnis: A ist <u>nicht</u> diagonalisierbar.

Beispiel 3. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ und – falls möglich – eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt besitzt.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A ist symmetrisch: $A^T = A \implies A$ diagonalisierbar

- $\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E)$ per SARRUS

$$\begin{array}{ccccc} 7-t & -2 & 1 & 7-t & -2 \\ -2 & 10-t & -2 & -2 & 10-t \\ 1 & -2 & 7-t & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= (7-t)^2(10-t) + 8 - (10-t) - 8\cdot(7-t) \\ &= -t^3 + 24t^2 - 189t + 490 + 8 - 10 + t - 56 + 8t \\ &= -(t^3 - 24t^2 + 180t - 432) = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 3. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ und – falls möglich – eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt besitzt.

- $\chi_A(t) = -[t^3 - 24t^2 + 180t - 432]$; $432 = 2^4 \cdot 3^2$

  $\chi_A(t) < 0$ für $t \leq 0$ $\leadsto$ alle NSt. sind positiv

- Nullstellen-Raten mit Horner !

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -24 & 180 & -432 \\ \cancel{2} & & 2 & -44 & 272 \\ \hline & 1 & -22 & 136 & \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -24 & 180 & -432 \\ \cancel{3} & & 3 & -63 & 151 \\ \hline & 1 & -21 & 117 & \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -24 & 180 & -432 \\ \cancel{4} & & 4 & -80 & 400 \\ \hline & 1 & -20 & 100 & -32 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -24 & 180 & -432 \\ 6 & & 6 & -108 & 432 \\ \hline & 1 & -18 & 72 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

$$-\chi_A(t) = (t-6)\cdot(\underbrace{t^2 - 18t + 72}_{NSt:\ 9 \pm \sqrt{81-72} = 9 \pm 3})$$

$$\chi_A(t) = (6-t)^2 \cdot (12-t)$$

Beispiel 3. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ und – falls möglich – eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt besitzt.

- $\chi_A(t) = -[t^3 - 24t^2 + 180t - 432]$; $432 = 2^4 \cdot 3^2$
- $\chi_A(t) = (6-t)^2(12-t)$ zerfällt in Linearfaktoren
- Bestimme Basen der Eigenräume $\ker(A - t \cdot E)$ für $t = 6; 12$

$\underline{t=6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\cdot I \\ -I \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

freie Var $\longrightarrow$ $\dim E_6(A) = 2$

$E_6(A)$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\underline{\underline{t=12}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & +2 & +5 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I \\ +5\cdot I \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :3 \\ -II \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} -II \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$E_{12}(A)$ hat Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ und – falls möglich – eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt besitzt.

- $\chi_A(t) = -[t^3 - 24t^2 + 180t - 432]$; $432 = 2^4 \cdot 3^2$
- $\chi_A(t) = (6-t)^2(12-t)$ zerfällt in Linearfaktoren
- $E_6(A)$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\quad g_{geo}(6) = 2 = g_{alg}(6)$

  $E_{12}(A)$ hat Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad g_{geo}(12) = 1 = g_{alg}(12)$
- Sammle die erhaltenen Basisvektoren in eine Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar}$$

und $$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

HIERFÜR MUSS MAN NICHT RECHNEN!

Beispiel 4: Vorgelegt ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3};\quad f(X) = AXA^{-1}$$

Zeige, dass f linear ist. Ist f diagonalisierbar?

Bsp. 3:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix}.$$

- f ist linear: $f(X+Y) = A(X+Y)A^{-1} = AXA^{-1} + AYA^{-1} = f(X) + f(Y)$ ✓

  $f(r\cdot X) = A(r\cdot X)A^{-1} = r\cdot AXA^{-1} = r\cdot f(X)$

- $\mathcal{B}$ Basis von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ $\rightsquigarrow$ $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$

  X EV zum EW t, falls $AXA^{-1} = f(X) = t\cdot X$

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}XT)(T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}X\underbrace{TT^{-1}}A^{-1}T$$

$$= T^{-1}(AXA^{-1})T = t\cdot T^{-1}XT$$

bzw. mit $Y = T^{-1}XT$: $\quad (T^{-1}AT)\,Y\,(T^{-1}AT)^{-1} = t\cdot Y$

Also betrachte

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & & \\ & 1/6 & \\ & & 1/12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \frac{1}{2}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & \frac{1}{2}y_{23} \\ 2y_{31} & 2y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4: Vorgelegt ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3};\ f(X) = AXA^{-1}$$

Bsp. 3:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix}.$$

$$(T^{-1}AT)Y(T^{-1}AT)^{-1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \frac{1}{2}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & \frac{1}{2}y_{23} \\ 2y_{31} & 2y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

($E_{ij} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,
1 an der Stelle (i,j)
0 sonst)

EW 1, Basis des ER $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33})$

EW $\frac{1}{2}$, Basis des ER (E_{13}, E_{23})

EW 2, Basis des ER (E_{31}, E_{32})

$$(T^{-1}AT)Y(T^{-1}AT)^{-1}$$
$$= T^{-1}ATYT^{-1}AT$$
$$= t \cdot Y$$

$$A(TYT^{-1})A^{-1} = t \cdot TYT^{-1}$$

Für $f(X) = AXA^{-1}$

EW 1, Basis des ER
$B_1 = (TE_{11}T^{-1}, TE_{12}T^{-1}, \dots)$

EW $\frac{1}{2}$, Basis des ER $B_{1/2} = (TE_{13}T^{-1}, TE_{23}T^{-1})$

EW 2, Basis des ER $B_2 = (TE_{31}T^{-1}, TE_{32}T^{-1})$

$B = B_1 \cup B_{1/2} \cup B_2$ Basis von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 &&&& \\ &&&&& 1/2 &&& \\ &&&&&& 1/2 && \\ &&&&&&& 2 & \\ &&&&&&&& 2 \end{pmatrix}$

ist diagonal.

Hausaufgabe IngMa 14 A

(1) Vorgelegt ist ein n-dimensionaler Vektorraum V, ein Endomorphismus $f: V \to V$ sowie eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V.
Zeige: Genau dann ist die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $t_1, \dots, t_n$ in der Diagonalen, wenn $t_1, \dots, t_n$ Eigenwerte von f sind und für jedes $1 \le j \le n$ der Vektor $\vec{b}_j$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert t_j ist.

(2) Vorgelegt sind Matrizen $A, T \in K^{n \times n}$, wobei $T = (\underline{u}_1 \dots \underline{u}_n)$ invertierbar ist. Zeige:
Genau dann ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $t_1, \dots, t_n$, wenn $t_1, \dots, t_n$ Eigenwerte von A sind und die Spalten von T eine Basis aus Eigenvektoren von A bilden, wobei $A \cdot \underline{u}_j = t_j \cdot \underline{u}_j$ gilt.

Hausaufgabe IngMa 14B

Berechne für jede der Matrizen M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -10 & 11 & -20 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und Eigenvektoren. Bestimme – wenn möglich – jeweils eine Matrix T, für die $T^{-1} M_i T$ eine Diagonalmatrix ist.

– Ende des 2. Kapitels –