Mathematisches Bewusstsein

Rainer Kaenders und Ladislav Kvasz

Zusammenfassung Was bedeutet es Mathematik gelernt zu haben? Sicherlich gehören Wissen und Fertigkeiten dazu. Aber wie können die Zielsetzungen von Mathematikunterricht präziser gefasst werden? Der übliche Weg besteht darin, bestimmte Kompetenzen zu formulieren. Da Kompetenzen für Tests antrainiert werden können, ist die Übertragbarkeit der getesteten operationalisierten Kompetenzen in andere Kontexte jedoch fraglich. Unser Konzept des mathematischen Bewusstseins ist ein Versuch, die Zielsetzungen des Mathematikunterrichts so zu formulieren, dass sie den Grad der mathematischen Durchdringung eines Stoffes widerspiegeln und linguistisch wahrnehmbar sind. Dies ermöglicht uns, die Unterscheidung verschiedener definierbarer Qualitäten von Werkzeugkompetenzen, Denkaktivitäten und Kenntnissen, die mehr oder weniger komplex oder schlicht sind.

Inhalt

1 Einleitung

Wenn jemand sagt, dass ein Bus um 9 Uhr abfährt - weiß man es dann? Angenommen, man ist darüber unterrichtet, dass die Busse unter der Woche immer zur vollen Stunde abfahren - von 7 Uhr morgens bis 7 Uhr abends, weiß man es dann mit dem Wissen um diese allgemeine Regel besser, dass der Bus um 9 Uhr abfährt? Macht es einen Unterschied, ob man den Fahrplan erstellt, den Bus lenkt oder nur mitfährt, um sich dieser Tatsache bewusst zu sein?

Was ist die Lösung der Gleichung $3x^2-54x+243 = 0$? Ist es 9? Was bedeutet es, sich der Lösung bewusst zu sein? Meint dies, das Ergebnis durch Anwendung der pq-Formel zu bestimmen? Oder erstellt man eine Wertetabelle? Betrachtet man den Graphen der Funktion mit Hilfe eines graphikfähigen Taschenrechners? Oder löst man die Aufgabe sogar mit einem Computer-Algebra-System? Führt man eine quadratische Ergänzung durch? Ist einem klar, dass 9 die einzige Lösung sein muss, da es die x-Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel gegeben durch den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2 - 54x + 243$ beschreibt? Oder hat man sich gar vergegenwärtigt, dass f und f' eine gemeinsame Nullstelle haben? Schaut man sich möglicherweise die kritischen Stellen der reellen Funktion $f(x) = x^3 - 27x^2 + 243x$ an? Man könnte sich fragen, wann ein Feuerwerkskörper, der beinahe vertikal mit Steigung 54 und einer Geschwindigkeit von 69,048 m/s in den Himmel geschossen wird, seinen höchsten Punkt erreicht.

In dem Moment, in dem ein Kind das Licht der Welt erblickt, wird mit diesem auch ein persönlicher mathematischer Kosmos geboren, der fortan zu expandieren beginnt. Doch ein Apfel wächst nicht ausschließlich – er verändert auch seinen Geschmack. Wenn alles gut geht: von sauer zu süß. Ebenso hat der persönliche mathematische Kosmos eines Menschen eine Qualität, die auf seine ‚Reife' hindeutet. Dies ist eine Qualität dessen, was wir *mathematisches Bewusstsein* (mathematical awareness) nennen wollen.

Warum eine solche Begrifflichkeit? Sie erlaubt, die unterschiedlichen Charakteristika mathematischen Bewusstseins zwischen diagrammatischer und symbolischer, zwischen intuitiver und formaler Herangehensweise und letztlich zwischen Komplexität und Schlichtheit zu unterscheiden. Will man diese Gegensätze begrifflich fassen, genügt es weder, ausgewählte Inhalte noch verschiedene Typen von Problemen und Prozessen aufzulisten, die jemand beherrschen sollte. Denn Inhalte können ganz unterschiedlich bearbeitet werden – vom Hersagen geeigneter Wörter bis zu tiefem Verständnis – und alle Arten von Aufgaben können entweder durch Nachahmung oder aber durch originelle eigene Ideen gelöst werden. Da wir einen Kontrast beobachten können zwischen von Bildungsplanern beabsichtigten, von Lehrern unterrichteten und von Schülern schließlich rezipierten (mathematischen) Curricula (‚intended, taught and attained curriculum'), ist es für die Ausarbeitung neuer Lehrpläne unabdingbar, Lernziele nicht nur durch Themen, durch die Beherrschung von Techniken und Fertigkeiten sowie Kompetenzen zu skizzieren, sondern vielmehr die Qualität und Tiefe der Auseinandersetzung, in welcher diese zur Verfügung stehen, in den Blick zu nehmen. Erst, wenn die Tiefe der Auseinandersetzung durch die Lernziele beschrieben wird, kann die Frage danach gestellt werden, welche didaktischen Wege zum Erreichen dieser Ziele zu - oder abträglich sind. Wir denken, dass unsere Begrifflichkeit zu mathematischem Bewusstseins dieses Problem zu klären hilft.

2 Mathematikunterricht als Bildung

Wie kann Tiefe im Umgang mit Mathematik konzeptualisiert werden? Nicht wenige Mathematiker sind der Ansicht, dass mathematische Tiefe durch den Grad der mathematischen Genauigkeit und Strenge charakterisiert wird. Auch außerhalb der Mathematik ist es eine weit verbreitete Auffassung, dass das Erlernen von Mathematik gleichzusetzen wäre mit einer stets fortschreitenden formalen Präzisierung. Freudenthal[1] formuliert dies folgendermaßen: „*System builders know one level of mathematical rigor and often they manage to stick to this one during a course of many years. All below this level, which is their own, they consider as fake, and all above as highbrow. Active mathematics, however, knows many levels of rigor, and good teaching should respect them. ... Every level knows its own honesty and rigor, which cannot be enforced in teaching, if the student has not reached this level.*“ Schon im rein mathematischen Denken hat Polya[2] den zentralen Stellenwert anderer Erkenntniswege wie Induktion und Analogie aufgezeigt und damit besonders während der New-Math-Bewegung die weit verbreitete Auffassung von Mathematik als rein deduktiver Wissenschaft in Zweifel gezogen. Bei einer Überbetonung der Exaktheit als Maß für die Tiefe mathematischer Einsicht wird der wesentliche Beitrag mehr heuristischer Herangehensweisen und Tätigkeiten von geringerer Genauigkeit, wie das Zeichnen von Graphen, die numerische Annäherung, das Experimentieren von Hand oder mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen bzw. dynamischer Geometriesoftware bei mathematischen Auseinandersetzung nicht hinreichend erfasst.

Ein anderes Extrem besteht darin, jedes solches Wissen – sei es das Ergebnis einer Berechnung, sei es am Graphen abgelesen, sei es durch Computersoftware zustande gekommen oder sei es das Ergebnis einer strengen Argumentation – als gleichwertig zu akzeptieren[3]. Durch die Outputorientierung der letzten Jahre steht heutzutage die Differenzierung nach Kompetenzen im Vordergrund, die Unterscheidung nach verschiedenen epistemologischen Qualitäten (insbesondere von Exaktheit) wird dieser Sichtweise untergeordnet. Dabei wird die mathematische Tiefe an der Komplexität des praktischen Problems bemessen, mit welchem die/der Lernende sich möglicherweise eines Tages konfrontiert sieht. Sie/er bedarf der entsprechenden Kompetenz, um in der spezifischen hypothetischen Anforderungssituation zweckmäßig zu reagieren (siehe etwa die

[1] [Freudenthal71, S. 427]
[2] [Polya54]
[3] [Kaenders09]

OECD/PISA – Definition von *mathematical literacy*[4]). Mathematik wird in erster Linie als ein Werkzeug zur (kreativen) Lösung praktischer Probleme unterschiedlicher Schwierigkeit betrachtet. Dabei entsteht die Tiefe jedoch weniger durch die Mathematik selbst, als vielmehr doch die Komplexität einer hypothetischen Anforderungssituation aus der Praxis.[5]

3 Mathematisches Bewusstsein

Zur Beschreibung mathematischer Tiefe scheint uns ein anderer und differenzierterer Ansatz notwendig, der die erlernten Fähigkeiten im Bereich mathematischen Wissens, Denkens und Handelns umfasst. Dieser Ansatz beruht ebenfalls auf einer Entwicklung in der Mathematikdidaktik, zu der Caleb Gattegno[6] einen wesentlichen Anstoß gegeben hat. Nach lebenslanger Erfahrung mit mathematischen Lernprozessen bei Kindern kommt er zu dem Schluss: „Only awareness is educable in Man“. Dies ist auch der Ansatz, den wir hier verfolgen möchten: Mathematiklernen begreifen wir als die Bildung eines mathematischen Bewusstseins. In der Umgangssprache tritt der Begriff Bewusstsein in zwei Bedeutungen auf: als die momentane Erfahrung verschiedener mentaler Zustände (wie im englischen ‚consciousness‘ oder in ‚bei Bewusstsein sein‘ und ‚bewusstlos‘) oder aber als all dasjenige, dessen wir uns bewusst sind, d.h. was uns überhaupt mental zugänglich ist (wie in ‚awareness‘ und ‚ein Bewusstsein schaffen‘ oder ‚das Sein bestimmt das Bewusstsein‘). Die erste dieser beiden Bedeutungen kann man als psychologisch und die zweite als epistemologisch verstehen. *Mathematisches Bewusstsein* verstehen wir dabei als einen epistemologischen und nicht als psychologischen Begriff, d.h. als die Totalität all der mathematischen Aspekte, auf die wir einen mentalen Zugriff haben. Hier für könnte man auch das sperrigere Wort ‚Bewusstheit‘ verwenden, das jedoch keine entsprechende Verbkonstruktionen wie ‚bewusst sein‘ oder ‚bewusst machen‘ besitzt.

Pierre van Hiele[7], der sich bei der Einführung der verschiedenen Niveaustufen des Denkens explizit auf Gattegno bezieht, spielt für unseren Ansatz eine wichtige Rolle. Sind auch die van Hiele Niveaus vornehmlich auf den Lern*prozess* bezogen, so hat er dabei die Ergebnisse des Lernprozesses im Blick. Diese sind

[4] [Blum03, S. 24]
[5] [Ernest91, vgl. z.B. die Beschreibung der *technological pragmatists*]
[6] [Gattegno87]
[7] [vanHiele86]

für ihn über linguistische Mittel wahrnehmbar und sind nicht nur Vorstellungen *von* der Mathematik sondern bilden den *Kern* der Mathematik selbst: *„The term ‚level of thinking' naturally implies emphasis on psychological aspects. Certainly the levels are signifcant for the psychology of man, but in education special attention must be paid to communication. There the most important thing is not the way of thinking, but the results of thinking, results that are fixed in speaking and writing. This is not only important for mathematics instruction, still they also have an important implication for mathematics itself.“*[8]

Weitere Autoren haben Versuche unternommen, eine Qualität der Auseinandersetzung in verschiedenen mathematischen Bereichen zu beschreiben, die über die Formulierung von Wissen, Fertigkeiten und Kompetenzen hinausgeht. Nicht immer werden dabei mathematische Denkaktivitäten von Fertigkeiten wie Techniken und Werkzeugkompetenz abgegrenzt. So hat Arcavi[9] das Konzept des *symbol sense* formuliert, das er als Erweiterung der Idee des *number sense*[10] einführt, um verschiedene Dimensionen algebraischen Verständnisses deutlich zu machen. In den Gebieten der Arithmetik und Algebra hilft dieser Ansatz das angestrebte Bewusstsein zu beschreiben. *„By symbol sense I mean a very general ability to extract mathematical meaning and structure from symbols, to encode meaning efficiently in symbols, and to manipulate symbols effectively to discover new mathematical meaning and structure.“*[11] In der Geometrie hat Hewitt[12] mit *geometrical awareness* ein ähnliches Konzept vorgestellt. Auch er verweist für eine allgemeinere Auffassung des Begriffs *awareness* auf Gattegno[13]. Doch vermeidet er eine explizite Definition, indem er auf den täglichen Gebrauch des geometrical awareness Begriffs *Bewusstsein* anspielt und eine ‚Huhn-oder-Ei-Situation' erkennt: *„where I place my attention affects what I become aware of, and what I am already aware of affects where I place my attention.“* Ähnlich zu unserer Auffassung, Bewusstsein als Beschaffenheit des persönlichen mathematischen Kosmos zu betrachten, versteht auch Hewitt dieselbe als Essenz des Mathematikerdaseins: *„However, there is also the positive reason which is that by educating awareness the mathematician inside a student is being educated which would not be the case if everything were treated as if it were to be memorized.“*[14]

[8] [vanHiele86, S. 109]
[9] [Arcavi94]
[10] [Sowder89]
[11] [Zorn02, S. 4]
[12] [Hewitt01]
[13] [Gattegno87]
[14] [Hewitt01, S. 38]

Unsere Perspektive auf mathematisches Bewusstseins baut auf Gattegnos Ansatz auf und sieht sich in Übereinstimmung mit sowohl den van Hieleschen Niveaustufen des Denkens als auch mit *number*- und *symbol sense* wie auch mit *geometrical awareness*. Da wir die Entwicklung der Mathematik selbst als ein linguistisches Phänomen verstehen[15], sehen wir wie van Hiele, dass auch die Qualität mathematischen Bewusstseins notwendigerweise eine linguistisch wahrnehmbare Eigenschaft einer Person darstellt. Unsere Sichtweise erlaubt Probleme, die aus der Isolation der vielen Teildisziplinen der Mathematik entstehen, zu formulieren und analysieren. Daher gehen wir davon aus, dass:

a. mathematisches Bewusstsein ein *ganzheitliches* Konzept ist, welches Ansätze wie *number sense* in der Arithmetik, *symbol sense* in der Algebra und *geometrical awareness* in der Geometrie vereint,

b. es *thematisch neutral* ist, zum Beispiel kann erlangtes Bewusstsein von einem Bereich in einen anderen überführt werden,

c. es *unterschiedliche Graduierungen* gibt, die eng mit verschiedenen Graden mathematischer Genauigkeit und dem Maß der Durchdringung eines mathematischen Sachverhalts verwandt sind.

Mathematisches Bewusstsein ist zu unterscheiden von mathematischem Verstehen, da wir uns mancher Dinge bewusst sind, ohne sie zu verstehen. Ein Kind kennt Zahlen bevor es in die Schule kommt und wir alle haben durch unsere alltäglichen Erfahrungen ein Bewusstsein von Begriffen wie Stetigkeit, Dimension, Geschwindigkeit etc. Verstehen jedoch verändert das mathematische Bewusstsein. Aber das mathematische Bewusstsein verändert sich auch mitunter *nachdem* man etwas verstanden hat.

Wenn wir die Qualitäten des persönlichen mathematischen Kosmos beschreiben wollen, müssen wir zunächst auf dessen Bestandteile eingehen. Wir möchten dabei nicht den Lernprozess an sich untersuchen, sondern seine Resultate, da wir ja in erster Linie Zielsetzungen des Mathematikunterrichts formulieren möchten. Auf welche Weise eine große Vielfalt im mathematischen Bewusstsein erworben werden kann, bleibt dabei offen. Sicher jedoch wird dies nicht gelingen, indem man die mit den einzelnen Bewusstseinsformen verbundenen Verhaltensweisen direkt zu vermitteln versucht. Für uns bilden die drei Aspekte *Inhalte*, *mathematische Denkaktivitäten* und *Werkzeugkompetenz (skills)* drei grundlegende Dimensionen, in welchen der persönliche mathematische Kosmos Gestalt annimmt. Figur 1 zeigt wie wir uns diese Dimension des ganzheitlichen

[15] [Kvasz08]

mathematischen Kosmos vorstellen. Die *Qualität* der entsprechenden mathematischen Befähigung jedoch, ist nicht durch eine weitere Dimension in diesem Kosmos charakterisiert, sondern qualifiziert die *Art und Weise* in der sich diese Befähigung darstellt. Zum Beispiel die Art und Weise, in der jemand in einem arithmetischen Kontext durch Visualisierung argumentiert oder in der Analysis durch den Einsatz von Algebra (algebraisieren) Beweise führt.

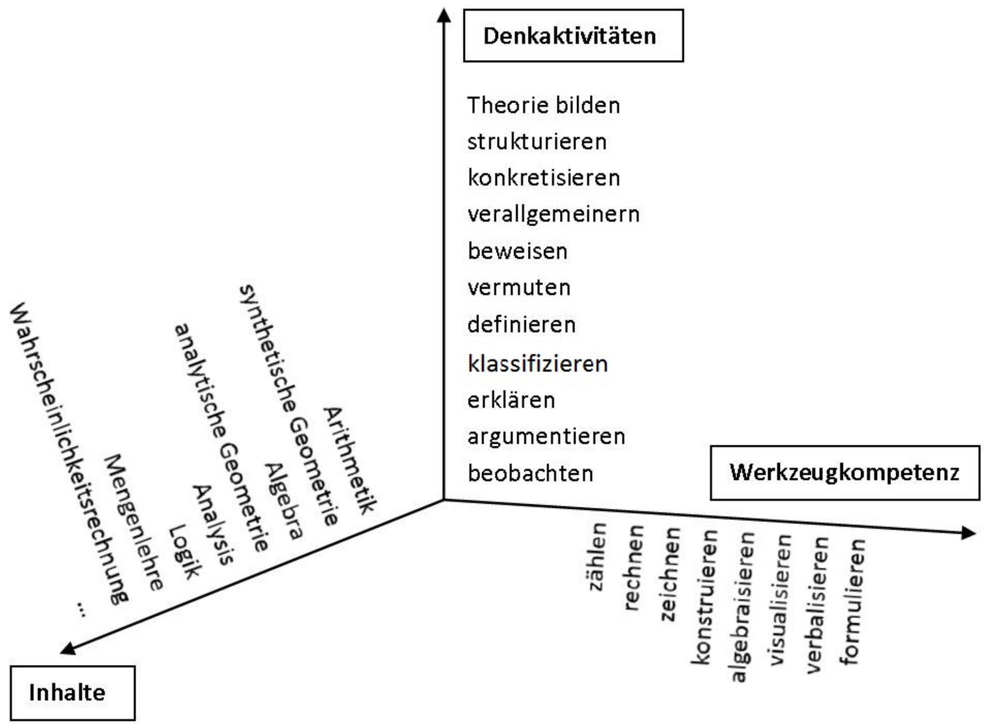

Abbildung 1: Der mathematische Kosmos eines Individuums

Im Inhaltlichen unterscheiden wir Arithmetik, synthetische Geometrie, Algebra, analytische Geometrie, Analysis, Logik, Mengentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie (es sind evtl. noch weitere Inhalte denkbar). In der Reihenfolge der Inhalte haben wir uns an historischen Entwicklungen und an der wachsenden Komplexität syntaktischer Regeln der mathematischen Sprache orientiert.[16] Im Unterschied zu Kompetenzmodellen (selbst, wenn sie ‚prozessbezogen' sind) unterscheiden wir klar zwischen der Dimension der Werkzeugkompetenz (skills, Fertigkeiten) und der Dimension der Denkaktivitäten. Fertigkeiten, bzw. Werkzeugkompetenzen können *geübt* werden. Wir rücken die

[16] [Kvasz08]

folgenden Werkzeugkompetenzen in den Vordergrund: *zählen*, *berechnen*, *zeichnen*, *konstruieren*, *algebraisieren*, *visualisieren*, *verbalisieren* und *formulieren.* Das Erlernen solcher Werkzeugkompetenzen erfolgt am effektivsten in entsprechenden inhaltlichen Kontexten, wie z.B. *zählen* in Arithmetik und Zeichnen in synthetischer Geometrie etc. Gleichwohl ist es uns wichtig, Werkzeugkompetenz von den mathematischen Denkaktivitäten und vom inhaltlichen Kontext zu lösen, um die Möglichkeit (und sogar die Notwendigkeit) des Methodentransfers zwischen verschiedenen inhaltlichen Kontexten zu unterstreichen. So trifft man die Addition üblicherweise im Kontext von Zahlen an, wir können aber auch Intervalle, Polynome, Vektoren, Funktionen etc. addieren.

Mathematisch zu arbeiten heißt, mit einer bestimmten Intention tätig zu werden. Was eine Tätigkeit zu einem Teil der Mathematik werden lässt, ist vielmehr die Aktivität des Denkens, als dass es Werkzeuge sind. Von der Perspektive der mathematischen Denkaktivitäten aus, können die verschiedenen Werkzeuge – sei es Bleistift und Papier, sei es Verbalisierung, Formulierung, instrumentelle Techniken etc. – mit den dazugehörigen Fertigkeiten eingesetzt werden, eine Denkaktivität durchzuführen. Hierbei werden verschiedene Qualitäten mathematischen Bewusstseins konstituiert. Wir unterscheiden im Besonderen die folgenden Denkaktivitäten: *beobachten*, *argumentieren*, *erklären*, *klassifizieren*, *definieren*, *vermuten beweisen*, *verallgemeinern*, *konkretisieren*, *strukturieren*, *Theorie bilden.* Wie im Vorhergegangenen dient auch die Dimension mathematischer Denkaktivitäten im Diagramm dazu, die vielfältigen Beziehungen zwischen Denkaktivitäten auf der einen Seite und verschiedenen Gebieten und Techniken auf der anderen Seite darstellbar zu machen. Die Schülerin muss eine bestimmte Werkzeugkompetenz (Fertigkeiten, Verständnis von Begriffen, Beherrschung von Techniken) besitzen, um mathematische Phänomene beispielsweise erklären, definieren oder verallgemeinern zu können. Mathematische Denkaktivitäten können auch Zweifel an Berechnungen oder Konstruktionen verursachen.

Eine strikte Bindung bestimmter Formen von Werkzeugkompetenz an eng umgrenzte inhaltliche Kontexte, wie etwa *rechen*, wäre in unserem dreidimensionalen Modell im wahrsten Sinne des Wortes ‚flach‘, wenn nicht langrfristig eine Erweiterung dieses Zusammenhangs angestrebt wird.

Kompetenzmodelle sind andererseits oft an bestimmte praktische Bedingungen gebunden. Ihre Konzepte erfordern den Transfer von Inhalten und Methoden, berücksichtigen aber den Transfer im Bereich der Denkaktivitäten weniger, da sie auf bestimmte Denkniveaus fixiert sind. Auch dies wäre im Modell als Flachheit ersichtlich.

Einer der wichtigen Aspekte mathematischen Bewusstseins ist das Verständnis adäquater Niveaus von Strenge und Rechtfertigung, welche im konkreten Fall einer Berechnung oder Konstruktion angebracht ist. Das Primat mathematischen Handelns liegt bei den mathematischen Denkaktivitäten, die ihrerseits festlegen, welche Herangehensweisen in der konkreten Situation angemessen sind. Oder mit den Worten Henri Poincarés: *„Alles zu glauben oder alles anzuzweifeln, läuft auf das Gleiche hinaus: beides ignoriert die Notwendigkeit des Denkens.“*[17] Alle die genannten Denkaktivitäten sind mathematisch und beziehen Anwendungen oder Modellierungen nicht explizit ein. Dies ist eine bewusste Wahl, da wir in Anwendungen und Modellierungsprozessen genauso mathematisch denken wie in anderen Bereichen. Es gibt kein eigenständiges angewandtes oder auf Modellierung bezogenes mathematisches Denken. Gleichwohl kann eine praktische Problemstellung Motivation sein, bestimmte mathematische Denkaktivitäten in Gang zu setzen. Daher beeinflussen Anwendungen oder zu modellierende Phänomene sehr wohl die Inhalte, erforderliche Werkzeugkompetenzen und Denkaktivitäten. Und ganz bestimmt geben sie die Qualität mathematischen Bewusstseins vor, die in einem konkreten praktischen Kontext angemessen ist.

Mathematisches Bewusstsein ist somit die Qualität, in welcher mathematische Inhalte, Werkzeugkompetenz und Denkaktivitäten miteinander verbunden sind. Es ist kein extensiver Begriff, sondern eine Beschreibung der Intensität der Zusammensetzung, welche die drei beschriebenen Aspekte verbindet. Eine möglicherweise nicht vollständige Liste verschiedener Typen mathematischen Bewusstseins, die wir bislang erkennen können, ist: *soziales*, *imitatives*, *manipulatives*, *instrumentelles*, *diagrammatisches*, *experimentelles*, *strategisches*, *kontextbezogenes*, *intuitives*, *analogisches*, *argumentatives*, *logisches* und *theoretisches Bewusstsein.*

In gewissem Sinn ist mathematisches Bewusstsein eine adverbiale Konstruktion – es beschreibt die *Art und Weise*, wie wir etwas wissen und in der Lage sind mathematische Denkaktivitäten mit Hilfe bestimmter Fertigkeiten und Werkzeuge durchzuführen. Der Begriff gestattet uns auszudrücken, dass z.B. jemand eine arithmetische Tatsache *bildhaft* durch Abzählen beweist, wie etwa die Pythagoräer dies mit ihrer Zeichnung taten, die beweist, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist: :::::. ·::::::. Oder eine Schülerin argumentiert in der Arithmetik *imitativ* durch zählen, wenn sie die rekursive Regel für die Berechnung von Dreieckzahlen anhand der vom Lehrer vorgeführter Abzählargumente rekapituliert. Auch ist es beispielsweise möglich in der *Alge-*

[17][Poincaré05, S. xxii, Übers. der Verf.]

bra etwas auf *logische Weise* durch *Verbalisierung* zu definieren: Ein Primideal ist ein Ideal, in welches man sich nicht von außen hineinmultiplizieren kann. Würde man fordern, dass der Quotient von Ring und Ideal ein Integritätsbereich sein soll, dann handelte es sich eher um *theoretisches* Bewusstsein, da diese Tatsache eine wichtige Rolle in der Theorie spielt.

Besonders bei manchen Fragestellungen zur Verwendung neuer Medien liefert diese Perspektive eine wichtige Differenzierung. Beispielsweise kann man *instrumentell* in der *Analysis* durch *Algebraisieren* mit Computeralgebra *beweisen*, dass für jedes reelle Polynom dritter Ordnung mit drei Nullen x_1, x_2 und x_3 die Tangente am Punkt mit der x-Koordinate $(x_1 + x_2)/2$ den Graphen in x_3 schneidet. Die Algebraisierung besteht darin, dass man zuerst einen allgemeinen algebraischen Ausdruck für ein reelles Polynom dritter Ordnung mit drei Nullstellen finden muss. Das CAS -System erlaubt dann die Konstruktion der Tangente und die Berechnung der Schnittstelle x mit der x-Achse auf instrumentelle Weise. Am Ende steht auf der Anzeige die Lösung $x = x_3$ und der Schüler weiß, dass die Behauptung wahr ist[18]. Was entsteht, ist eine Form von Bewusstsein, das – auch, wenn es auf algebraischem Bewusstsein aufbaut – letztlich instrumentell ist.

Wenn wir Mathematik unterrichten, müssen wir entscheiden, welche Typen mathematischen Bewusstseins wir bei welchen Schülern in welchen Situationen sinnvollerweise anstreben wollen.

4 Typen mathematischen Bewusstseins

Nachdem wir motiviert haben, was wir unter mathematischem Bewusstsein im allgemeinen verstehen, gehen wir zu einer detaillierten Beschreibung der verschiedenen Typen mathematischen Bewusstseins im Bereich der Parabeln und quadratischen Gleichungen über. Wir beziehen uns dabei auf die Eingangsfrage: Was ist die Lösung der Gleichung $3x^2 - 54x + 243 = 0$?

(i) Soziales Bewusstsein

Dies ist einer der ersten möglichen Zustände des menschlichen mathematischen Bewusstseins. Die Lösung zu dem oben genannten Problem ist 9, da es die Lehrerin/Vater/Petra so gesagt oder da man es im Anhang des Buches als Lösung gefunden hat. Eine anderes Kennzeichen

[18] [Henn04]

dieser Art von Bewusstsein äußert sich in Fragen der Schüler wie: „Darf ich das so schreiben?“ In der Mathematik können Schüler lernen, ihrem eigenen Sichtweise und Schlussfolgerungen zu vertrauen. Das soziale Bewusstsein zeichnet sich jedoch durch die Abwesenheit dieses Vertrauens auf das eigene Denken aus. Und doch ist soziales Bewusstsein selbst für Spitzenmathematiker unersetzbar. Es verändert z.B. für einen Mathematiker, der ein Gegenbeispiel zu etwa der Jacobi-Vermutung finden möchte die Situation vollständig, wenn er erfährt, dass jemand einen Beweis der Vermutung schon gefunden hat – selbst, wenn der nach dem Gegenbeispiel suchende Mathematiker den Beweis in diesem Moment entweder gar nicht kennt oder versteht.

(ii) Imitatives Bewusstsein

Die Lehrerin zeigt, wie eine Gleichung gelöst werden kann, der Schüler versteht und reproduziert den Vorgang Schritt für Schritt – und auch er erhält die Lösung. Die Schritte werden an der Tafel festgehalten und memorisiert. Dieser klassische Typ mathematischen Bewusstseins ist von großer Bedeutung für das Erlernen (Verstehen) von Mathematik. Diese Herangehensweise gibt jedem Schüler die Möglichkeit, unter der Leitung der Autorität des Lehrers weit in einem gut verstandenen Gebiet der Mathematik vorzustoßen. Auch professionelle Mathematiker kennen diese Herangehensweise bei der Einarbeitung in ein neues Gebiet, eine Theorie oder einen Beweis. Imitatives Bewusstsein kann die Grundlage für darauf aufbauendes tieferes Bewusstsein sein.

(iii) Manipulatives Bewusstsein

Nun soll der Student die obige Gleichung selbstständig lösen. Bei in der Umformung zu treffenden Entscheidungen weiß der Schüler, was in den verschiedenen Fällen zu tun ist, z.B. wenn der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet, positiv oder negativ ist. Die Lösung wird erhalten durch die Anwendung bestimmter formaler (mechanischer) Regeln für die Manipulation algebraischer Ausdrücke. Auch Experten verlassen sich auf diese Art Bewusstsein: *„Mastery of algorithms is as crucial for individual process as it has been historically for that of mankind. Algorithms allow us to act automatically for long stretches of time, avoiding the perturbing or delaying interference of insightful thought. But algorithms are exacting; mastery means either complete mastery or none. Less than 100 % mastery can mean that everything is wrong. … Mastery includes the ability to identify and to correct ones mistakes, casual ones such as* *computational slips, and fundamental ones such as applying an algorithm where it does not fit.“*[19].

(iv) Instrumentelles Bewusstsein

Die beschriebene Gleichung kann auch mithilfe eines Computeralgebrasystems oder eines graphikfähigen Taschenrechners gelöst werden.[20] Es ist unglaubwürdig, wenn die Lehrerin so tut, als ob man dann die Lösung noch nicht kennen würde. Von den meisten Dingen im Leben haben wir auch kein tieferes Verständnis oder eine höhere Form des Bewusstseins, selbst wenn unsere Lebensplanung stark von ihnen abhängt (wie etwa von unseren Kontoauszügen). Das instrumentelle Bewusstsein ist nicht mehr und nicht weniger als das, was uns das CAS oder ein DGS offenbart: der Computer zeigt uns das Resultat als richtig an, womit der Schüler das Ergebnis sehr wohl begründen kann. Er stützt sich auf die Verlässlichkeit des Computers und jeder andere kann den Lösungsvorgang wiederholen. Auch diese Art Bewusstsein ist für professionelle Mathematiker von großer Bedeutung.

(v) Diagrammatisches Bewusstsein

In jedem Gebiet der Mathematik spielen Bilder eine große Rolle. So können wir z.B. arithmetische Beziehungen durch Punktmuster visualisieren, Funktionen durch Graphen, Nomogramme o.ä. repräsentieren, Polynome mit Newtondiagrammen angeben, homologische Algebra durch funktorielle Diagramme darstellen und Varietäten über endlichen Körpern mit mit Hilfe von Bildern von generischen und dicken Punkten abbilden. Es ist möglich zu argumentieren, zu definieren und und andere Denkaktivitäten mit hilfe bildlicher Darstellungen durchzuführen. So gibt es mehr und mehr Schulbücher, in denen Extremalpunkte von Funktionen und deren Beziehung zur Monotonie auf bildhafte Weise eingeführt und erklärt werden. Für die Entwicklung einer höheren Form von Bewusstsein, wie dem logischen oder theoretischen, birgt dies jedoch auch Gefahren und kann Fehlvorstellungen verursachen: In unserem Beispiel suggeriert das durch einen Blick auf den Graphen der Funktion im DGS erzeugte bildhafte Bewusstsein, dass die einzige Lösung 9 sein müsste. Trotz aller Begrenztheit des bildhaften Bewusstseins und ungeachtet der Warnung von Nicolas Bourbaki und anderen vor den Gefahren in bezug auf logische Fehlschlüsse bleibt diese Qualität des Bewusstseins unersetzlich.

---

[19] [Freudenthal91]

[20] [Drijvers05]

(vi) Experimentelles Bewusstsein

Die obige Gleichung kann gelöst werden, indem man zunächst eine Wertetabelle anfertigt oder den Graphen skizziert und dann errät, dass 9 eine Lösung sein könnte. Setzen wir dann $x = 9$ in die Gleichung ein, so haben wir gezeigt, dass 9 eine Lösung ist, obwohl wir noch nicht wissen, ob es die einzige ist. Angenommen, wir entdecken in der Wertetabelle, an Stellen, die den gleichen Abstand von $x = 9$ haben zweimal den gleichen Funktionswert. Mit unserem Hintergrundwissen zu Funktionen zweiten Grades liefert uns die experimentelle Wertetabelle alle Lösungen dieser konkreten Gleichung. Aber selbst wenn wir uns sicher sind, entsteht doch ein anderes Bewusstsein dieses Sachverhalts als wenn wir die Gleichung systematisch gelöst hätten. Es ist nicht mehr als: Ich habe es probiert und es hat geklappt. Mathematiker kennen auch die umgekehrte Erfahrung: Selbst wenn man etwas in einem allgemeinen Fall bewiesen hat, ist doch eine konkrete Berechnung mit dem vorhergesagten Resultat nicht notwendigerweise überflüssig und kann das mathematische Bewusstsein entscheidend vertiefen. Um es allgemeiner zu fassen: Experimentelles Bewusstsein kann durch die Untersuchung konkreter Beispiele zum Verständnis einer allgemeineren Situation beitragen. Beispiele für solche Experimente sind etwa grobe Berechnungen ohne Prüfung, inwieweit jeder Schritt gerechtfertigt wäre oder auf heuristischen Argumenten basierende Beobachtungen etc. Offensichtlich ist auch diese Qualität mathematischen Bewusstseins für die Mathematik auf jedem Niveau unersetzlich.

(vii) Strategisches Bewusstsein

Auf einer bestimmten Stufe der mathematischen Entwicklung könnte eine Schülerin es für sinnvoll und nützlich erachten, ein Quadrat in der Gleichung separieren zu wollen, obwohl sie nicht weiß wie. Da hilft die Erfahrung, dass es bei algebraischen Manipulationen nicht selten zum Ziel führt, wenn man einen Term hinzu addiert, der durch den nächsten Term gleich wieder subtrahiert wird. Das Lösen einer Gleichung besteht nicht nur in der Anwendung der Regeln, sondern verlangt zusätzlich eine geeignete Strategie, die über Faktenwissen und technische Fertigkeiten hinausgeht. Beim Problemlösen sind sich Mathematiker dieser Tatsache spätestens seit Poincaré, Hadamard, und Polya, explizit bewusst. Was gebraucht wird, ist das Verständnis der möglichen Wege die man einschlagen könnte – selbst wenn nicht klar ist, wie man erfolgreich zum Ergebnis kommen kann. Polya führte dafür den Begriff *Heuristik* ein. Dies gilt mutatis mutandis auch für alle anderen mathematischen Denkaktivitäten. Selbst das Erlernen der Mathematik erfordert strategische Fertigkeiten, wie z.B. das Bestimmen einer sinnvollen Balance zwischen dem Nachlesen in Büchern und den eigenen Versuchen, Regeln und Theorien selber zu entdecken oder zwischen der Beschäftigung mit zentralen Begriffen oder Beispielen. Auf dem höchsten Niveau der Ausarbeitung einer Theorie ist ebenfalls strategisches Bewusstsein notwendig: welche Fakten können besser den Platz von Axiomen einnehmen oder welche Sätze sind zentral. Wir sehen, dass strategisches Bewusstsein weit über den Rahmen des Problemlösens im engeren Sinne hinausgeht.

(viii) Kontextbezogenes Bewusstsein

Unsere Gleichung könnte auch aus dem folgenden (zum Zwecke der Darstellung etwas vereinfachten Kontext) stammen: „An welcher Stelle erreicht ein Feuerwerkskörper, der fast vertikal mit Steigung 54 und Geschwindigkeit $69,048$ m/s abgefeuert wird, seinen höchsten Stand? “

Unser Wissen aus der Physik sagt uns, dass die Bahn einer Kugel (unter Vernachlässigung der Reibung) eine Parabel ist und unsere Erfahrung sagt uns, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass der Feuerwerkskörper weiter als einen Kilometer entfernt herunterkommen wird. Es könnte auch sein, dass wir während des Feuerwerks beobachtet haben, dass entsprechende Raketen in einer Entfernung von ungefähr 18 m wieder landen. Dann sind wir uns darüber bewusst, das er in einem Abstand von ungefähr 9 Metern den höchsten Punkt erreicht haben muss. Wenn wir auch noch mitgezählt haben, dass es etwa 14 Sekunden gedauert hat bis der Feuerwerkskörper seinen höchsten Punkt erreichte, so können wir ermitteln, dass dies in einer Höhe von 248 Metern passiert ist. Diese Art von Beobachtungen und Überlegungen verändert unser Bewusstsein bzgl. einer möglichen Lösung des Anfangsproblems.

Wir können im allgemeinen von einem kontextuellen Bewusstsein sprechen, wenn mathematische Gegenstände, Denkaktivitäten und Techniken in einem Bedeutungskontext stehen oder wenn wir ein mathematisches Problem in Bezug zu einem Kontext sehen. Die damit entstehende Art von Bewusstsein spielt eine Schlüsselrolle im Mathematikunterricht. Nach Freudenthal[21] entstehen so *mentale Objekte*, die wiederum die Grundlage für mathematische Konzepte bilden. Mit dem Ziel der Bildung solcher mentalen Objekte formulierte Freudenthal das Prinzip

[21] [Freudenthal91, S. 19]

der *Beziehungshaltigkeit.*[22] Selbstverständlich benötigen auch professionelle Mathematiker auf jedem Niveau der Abstraktion diese Form des mathematischen Bewusstseins.

(ix) Intuitives Bewusstsein

Die quadratische Folge (d.h. das Bildungsgesetz ist quadratisch) 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83,... besteht aus lauter Primzahlen. Wenn Mathematiker einer solchen Aussage begegnen, haben sie sofort das Gefühl, dass dies nicht wahr sein kann, noch bevor sie Argumente für ihre Intuition gefunden haben. Manchmal existiert eine Überzeugung wie: Es muss irgendwie so sein. Weit über die klassische Schlussweise der Induktion hinaus, bei der man bestimmte an Beispielen beobachtete Eigenschaften für alle solche Beispiele verallgemeinert, kennen Mathematiker das Phänomen der *Abduktion* (Peirce) oder *Apprehension* (Freudenthal[23]), ein Prozess der es erlaubt, anhand von einigen wenigen paradigmatischen Beispielen viel größere allgemeinere Zusammenhänge zu erkennen. Betrachten wir z.B. ein Dreieck und den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Die sorgfältige Beschäftigung mit einem einzigen Dreieck, kann zu der Überzeugung führen, dass die Seitenhalbierenden in jedem Dreieck kopunktal sind. Im allgemeinen erfasst das intuitive Bewusstsein jedoch ein größeres Spektrum an Phänomenen als die bisher beschriebenen. Zum Beispiel gibt es ein intuitives Verständnis geometrischer Realitäten wie Krümmung oder topologischer Fakten wie Zusammenhang. Poincaré drückt dies wie folgt aus[24]: *„Das Hauptziel des Mathematikunterrichtes besteht darin, bestimmte geistige Fähigkeiten zu entwickeln, unter denen die Intuition nicht die geringste ist.“*

(x) Analogisches Bewusstsein

Als erster Mensch hat Euler erkannt, dass die unendliche Summe der reziproken Quadrate natürlicher Zahlen $\frac{\pi^2}{6}$ ergibt. Er konnte dies zunächst nur durch eine Analogie von Potenzreihen und Polynomen erklären. Polya[25] gibt dieses und viele andere Beispiele für Formen analogischen Bewusstseins. Im Fall der quadratischen Gleichung werden jedoch auch die Grenzen analogischen Bewusstseins deutlich, wenn man etwa versucht, Gleichungen höheren Grades mit analogen Methoden wie bei quadratischen Gleichungen zu lösen.

[22] [loc. cit., S. 73] und [Freudenthal73, S. 77]
[23] [Freudenthal78, S. 197]
[24] [Poincaré05, S. 128, Übers. der Verf.]
[25] [Polya54]

(xi) Argumentatives Bewusstsein

Bevor man an den Beweis einer Behauptung herangeht, kann man versuchen, Argumente zu finden, warum die Behauptung überhaupt richtig sein könnte. Z.B. begründen wir bei Berechnungen das Ergebnis mithilfe von Algorithmen, Abschätzungen etc., was uns hilft einem Ergebnis zu vertrauen. Wir können auch durch Gedankenexperimente, Analogien oder metaphorische Vergleiche argumentieren. Für die Denkaktivität des Theoriebildens z.B. ist Logik anderen Belangen untergeordnet: Manchmal gehen wir von bestimmten Fakten aus und halten die konstruierte Theorie nur dann für wertvoll, wenn diese Fakten mit ihr verträglich, d.h. auch in der neuen Theorie richtig, sind. So können Argumente für den Aufbau einer Theorie gefunden werden. In unserem Beispiel der quadratischen Gleichung könnten wir den Graph betrachten und argumentieren, dass er konvex und symmetrisch ausschaut. Folglich, sollten wir, falls wir zwei Punkte x_1 und x_2 mit $f(x_1) = f(x_2)$ kennen, auch das Minimum genau in der Mitte finden können. Auch, wenn man so argumentieren kann, würde doch der logisch korrekte Beweis eine genauere Analyse erfordern.

(xii) Logisches Bewusstsein

Das vorangegangene Beispiel zu argumentativem Bewusstsein zeigt ebenfalls, was man unter logischem Bewusstsein verstehen kann. Mathematiker sind sich einig, dass gegen Logik nicht verstoßen werden darf. Obwohl die Logik mit ihrer Wächterrolle eine sehr hohe Form des Bewusstseins darstellt, ist sie sicher nicht die höchste. Jeder Mathematiker kennt das Gefühl: Ich habe etwas bewiesen, aber wirklich verstehe ich es nicht. Viele Menschen sehen Mathematik als ein Spiel mit logischen Regeln. Und doch ist theoretisches Bewusstsein tiefer als logisches, da es Argumentationen erfordert, die sich der direkten Logik entziehen. Darüber hinaus ist es auch nicht möglich, logisch zu denken ohne über andere Formen mathematischen Bewusstseins zu verfügen. Beim Lösen der obigen Gleichung stoßen wir auf den Zwischenschritt $(x-9)^2 = 0$. Die logisch korrekte Herangehensweise an die Lösung der Gleichung wäre zu benutzen, dass ein Produkt nur Null sein kann, wenn einer der Faktoren Null ist: $(x-9)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-9) = 0 \Leftrightarrow (x-9) = 0 \vee (x-9) = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

(xiii) Theoretisches Bewusstsein

Im Vorangegangenen haben wir versucht, theoretisches Bewusstsein im Kontext der anderen Qualitäten mathematischen Bewusstseins zu bestimmen. Obwohl theoretisches Bewusstsein in einem bestimmten Sinn als höchste Form des Bewusstseins angesehen werden kann, wird es substanzlos, wenn es nicht eng mit den anderen Formen verknüpft ist.

In unserem Beispiel ist klar, dass 9 die einzige Lösung sein muss, da sie die x-Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel ist, die durch den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2 - 54x + 243$ gegeben ist. Es kann einem jedoch auch bewusst sein, dass f und f' eine gemeinsame Nullstelle haben. Oder es hätte auch sein können, dass man die kritischen Werte der reellen Funktion $F(x) = x^3 - 27x^2 + 243x$ untersuchen möchte, die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$ bestimmen will oder mit Captain Lill's Methode[26] die Nullstellen der Funktion f ermitteln will. Quadratische Gleichungen spielen in vielen mathematischen Theorien eine Rolle (z.B. bei der Definition komplexer Zahlen) und die Kenntnis ihrer Rolle dabei kann ein tieferes theoretisches Bewusstsein unterstützen und neue Fragen aufwerfen.

5 Diskussion und Ausblick

Für uns ist das höchste Ziel des Erlernens von Mathematik der Erwerb vielfältiger Qualitäten mathematischen Bewusstseins – jede mit der ihr eigenen Tiefe. Die hier entwickelte Sichtweise erlaubt uns, tiefe komplexe Qualitäten mathematischen Bewusstseins zu unterscheiden von eher schlichteren Arten und Weisen Mathematik zu betreiben. Die dreizehn Qualitäten mathematischen Bewusstseins, die wir in dieser Arbeit unterschieden haben, zeigen sich in den linguistischen Erscheinungsformen in der Kommunikation des Individuums, sei es schriftlich, mündlich, in Bildern, in Metaphern, in Argumentationen, in der Beschreibung mathematischer Handlungen, etc. Besonders spannend ist dabei die Entwicklung der linguistischen Möglichkeiten, die sich auf der Basis zuvor entwickelter Sprachen vollzieht: *„The activity on one level is subjected to analysis on the next, [and] the operational matter on one level becomes a subject matter on the next level.“*[27] Dies ist auch eines unter verschiedenen linguistischen Phänomenen, die sie bei der Entwicklung der Mathematik beobachtet werden können, wie im historischen Kontext von Kvasz[28] untersucht wurde. Es

[26] [Kalman08]
[27] [Freudenthal71, S. 417]
[28] [Kvasz08]

soll weiter untersucht werden, welche dieser Phänomene sich auch bei Schülern beobachten lassen und wie dies in Zusammenhang mit ihrem jeweiligen mathematischen Bewusstsein steht.

Das begriffliche System des mathematischen Bewusstseins vor dem Hintergrund bekannter Ansätze zur Beschreibung mathematischer Lernziele bleibt zu diskutieren. Waren dies zu Beginn der 70'er Jahre vorwiegend Formen der Lernziel-Taxonomie[29], so sind dies heute überwiegend Kompetenzmodelle: *Mathematical Literacy*[30]; *Grundvorstellungen*[31], *Strands of Mathematical Proficiency*[32] und die zuvor besprochene *Instrumentation*.

Da mathematisches Bewusstsein nur ein Modell für das Ergebnis eines Lernprozesses jedoch nicht für den Lernprozess selbst ist, ist es nicht zu vergleichen mit Modellen, die sich auf den Prozess des Lernens selbst beziehen, wie etwa *Realistic Mathematics Education*, verschiedene Varianten des *Konstruktivismus*, *dialogisches Lernen* etc. Aus der Perspektive des mathematischen Bewusstseins bedeutet Mathematik zu lehren, den Schülern die Gelegenheit zu geben, ihr mathematisches Bewusstsein zu erweitern. Didaktische Theorien und deren Umsetzung im Unterricht können danach bewertet werden, inwieweit es ihnen schlussendlich gelingt, ein adäquates und vielgestaltiges mathematisches Bewusstsein zustande zu bringen. Die Erweiterung des mathematischen Bewusstseins geschieht indirekt, indem Inhalte, Denkaktivitäten und Werkzeugkompetenz so vermittelt werden, dass sich bestimmte Qualitäten mathematischen Bewusstseins ausbilden können. Wie bei diesem Prozess bestimmte Qualitäten des mathematischen Bewusstseins die weitere Entstehung anderer höherer Qualitäten fördern oder eher blockieren, bleibt zu untersuchen.

Dank

Diese Arbeit wurde unterstützt durch die Universitätspartnerschaft der Karls-Universität Prag mit der Universität zu Köln. Die Autoren sind verschiedenen Kollegen – im besonderen Ysette Weiss-Pidstrygach sowie Jan van de Craats, Gilbert Greefrath, Katja Lengnink und Horst Struve – für nützliche Hinweise und Diskussionen zu Dank verpflichtet.

[29] [Freudenthal78, S. 144 ff]
[30] [Blum03, vergl. auch Jahnke07]
[31] [vomHofe95] und [Blum98]
[32] [Kilpatrick01, Kap. 4, S. 115 ff]

Literatur

[Arcavi94] A. Arcavi: Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35, 1994.

[Blum03] W. Blum, V. Burjan, S. Close, J. Dossey, J. de Lange, M. Lindquist, Z. Marciniak, M. Niss, K. Park, L. Rico, Y. Shimizu, (PISA Mathematics Expert Group): PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD, 2003.

[Blum98] W. Blum: On the Role of „Grundvorstellungen“ for Reality-Related Proofs - Examples and Reflections. In: Mathematical Modelling - Teaching and Assessment in a Technology-Rich World (Eds: P. Galbraith et al.), Horwood, Chichester, S. 63-74, 1998.

[Drijvers05] P. Drijvers: Learning algebra in a computer algebra environment. International Journal of Technology in Mathematics Education, 11(3), 77-89, 2005.

[Ernest91] P. Ernest: The Philosophy of Mathematics Education. Falmer Press, 1991.

[Freudenthal71] H. Freudenthal: Geometry between the devil and the deep sea, Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435, 1971.

[Freudenthal73] H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1, Klett Verlag, Stuttgart 1973.

[Freudenthal78] H. Freudenthal: Weeding and Sowing, Preface to a Science of Mathematical Education, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston 1978.

[Freudenthal83] H. Freudenthal: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Kluwer Academic Publishers, Doordrecht 1983.

[Freudenthal91] H. Freudenthal: Revisting Mathematics Education, China Lectures. Kluwer Academic Publishers, Doordrecht 1991.

[Gattegno87] C. Gattegno: The Science of Education Part 1: Theoretical Considerations. Educational Solutions, New York 1987.

[Henn04] H.-W. Henn: Computer-Algebra-Systeme - Junger Wein oder neue Schläuche? Journal für Mathematik-Didaktik, 25(4), 198-220, 2004.

[Hewitt01] D. Hewitt: Arbitary and Necessary: Part 3 Educating Awareness. For the Learning of Mathematics, 21 (2), 2001.

[vanHiele86] P.M. van Hiele: Structure and Insight. Academic Press, Orlando 1986.

[vomHofe95] R. vom Hofe: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum, Heidelberg 1995.

[Jahnke07] T. Jahnke, W. Meyerhöfer (Hrsg.): PISA & Co - Kritik eines Programms. Franzbecker, Hildesheim (2.Aufl.) 2007.

[Kaenders09] R. Kaenders: Von Wiskunde und Windmühlen - über den Mathematikunterricht in den Niederlanden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM Verlag, Münster 2009.

[Kalman08] D. Kalman: Polynomia and Related Realms, Mathematical Association of America, 2008.

[Kilpatrick01] J. Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell: Adding it up: Helping Children Learn Mathematics. National Academy Press, 2001.

[Kvasz08] L. Kvasz: Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2008.

[Poincaré05] H. Poincaré: La Science et l'Hypothèse, 1905, English translation: Science and Hypothesis, Dover abridged edition, 1952.

[Polya54] G. Polya: Induction and Analogy in Mathematics. Princeton University Press, Princeton 1954.

[Sowder89] J. Sowder, B.P. Schapelle (Hrsg.): Establishing foundations for research on number sense and related topics: report of a conference. Center for Research in Mathematics and Science Education, College of Sciences, San Diego State Univesity 1989.

[Zorn02] P. Zorn: Algebra, computer algebra and mathematical thinking. Contribution to the 2nd international conference on the teaching of mathematics, Hersonissos 2002.