MATHEMATIK-WETTBEWERB DES LANDES HESSEN 2021/2022 **3. RUNDE**

AUFGABENGRUPPE A **17.05.2022**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$. Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

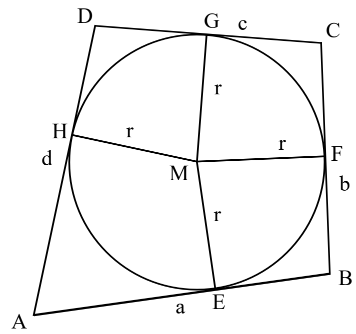
   a) $(x+32)^5 \cdot (x^5 - 32) = 0$

   b) $2x^5 = 8x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x - 16\right)^2$

   c) $(x+32)^5 \cdot (64x - 8) < (x+32)^7$

   d) $(x+5)^2 \cdot (x^5 + 32) \cdot (x+8) < 0$

2. Ein Viereck mit Inkreis heißt Tangentenviereck.

   a) Zeichne ein Tangentenviereck mit vier gleich langen Seiten und dem zugehörigen Inkreis.

   b) Zeichne ein Viereck, das kein Tangentenviereck ist.

   c) (1) Zeige anhand der nebenstehenden Figur:
   In einem Tangentenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Seitenlängen stets gleich.

      (2) Konstruiere ein Tangentenviereck $ABCD$, das ein symmetrisches Trapez mit $|CD| = 3$ cm und $|BC| = 7$ cm ist.

   d) Zeige, dass in jedem Tangentenviereck gilt: $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180°$

   e) Zeige: Der Flächeninhalt eines Tangentenvierecks lässt sich mit der Formel $A = r \cdot (a + c)$ berechnen.

3. Im Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0)$ und B(6|0) gegeben.

   a) (1) Zeichne drei Punkte, die jeweils von A und B die gleiche Entfernung haben.

      (2) Auf welcher Linie liegen diese drei Punkte aus a) (1)?

   b) Es sollen alle Punkte betrachtet werden, die von A die doppelte Entfernung haben wie von B.

      (1) Konstruiere mindestens fünf solcher Punkte.

      (2) Gib die geringste und die größtmögliche Entfernung solcher Punkte von A an.

      (3) Es zeigt sich, dass solche Punkte auf einem Kreis k_2 liegen. Zeichne k_2, gib seinen Mittelpunkt M_2 und seinen Radius r_2 an.

   c) Auch alle Punkte, die von A die dreifache Entfernung wie von B besitzen, liegen auf einem Kreis k_3. Gib den Mittelpunkt M_3 und Radius r_3 von k_3 an.

   d) Ein Kreis um $M_n(6{,}25|0)$ soll alle Punkte enthalten, die von A den n-fachen Abstand haben wie von B. Bestimme n und den Radius r_n dieses Kreises.

4. Wir betrachten vier natürliche Zahlen w, x, y, z, die alle jeweils aufeinander folgen (d. h. $x = w+1$; $y = x + 1$; $z = y + 1$).

   a) Vereinfache so, dass in dem Ergebnisterm als Buchstabe nur x vorkommt und fasse zusammen:

      (1) $w \cdot y \cdot (x^2 + 1) + 1$ (2) $1 + (x^2 + y) \cdot w$

   b) Setze in die Kästchen w, x, y oder z passend ein: $\square^2 - 4 = \square \cdot (\square - 1)$

   c) (1) Zeige:
   Eine Quadratzahl ist immer durch 3 teilbar oder hat beim Teilen durch 3 den Rest 1.

      (2) Zeige:
   Die Summe der Quadrate dreier aufeinander folgender Zahlen ist keine Quadratzahl.

5. Eine Farey-Folge F_n der n-ten Ordnung beschreibt die Menge aller gekürzten Brüche zwischen 0 und 1 (einschließlich), deren Nenner stets kleiner oder gleich n sind. Die ersten fünf Folgenmitglieder sind:

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right)$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}\right)$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1}\right)$$
$$F_4 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1}\right)$$
$$F_5 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}\right)$$

Beim Übergang von F_{n-1} zu F_n bleiben alle bisherigen Folgenglieder erhalten. Neue Folgenglieder werden so berechnet: Zu benachbarten Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ von F_{n-1} ist $\frac{a+c}{b+d}$ ein Folgenglied von F_n, wenn $b + d = n$ ist.

a) Gib F_6 und F_7 an.

b) Wie viele Folgenglieder kommen (1) von F_4 nach F_5 (2) von F_6 nach F_7 dazu?

c) Erkläre, warum beim Übergang von F_5 nach F_6 nur zwei Folgenglieder dazukommen.

d) Gib an, welche Folgenglieder beim Übergang von F_7 nach F_8 dazukommen.

e) Wir betrachten jetzt einen Übergang von F_{n-1} nach F_n, bei dem $n - 1$ Folgenglieder dazukommen.

(1) Welches ist nach $n = 7$ der nächste solche Übergang?

(2) Welche Eigenschaft haben alle diese Zahlen n?

(3) Erkläre, warum nur für die Zahlen mit dieser Eigenschaft $n-1$ Folgenglieder dazukommen!

(4) Zeige, dass für diese $n - 1$ Folgenglieder die Summe der Nenner doppelt so groß ist wie die Summe der Zähler. Verwende: $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$

6. Herr Krause hat in seiner Tasche fünf Schlüssel und möchte eine Tür aufschließen. Einer davon passt. Er greift zufällig einen Schlüssel nach dem anderen, ohne ihn in seine Tasche zurückzulegen.

a) Gib einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass er

(1) beim zweiten Griff den richtigen Schlüssel zieht,

(2) beim vierten Griff den richtigen Schlüssel zieht.

b) Begründe: Die Wahrscheinlichkeit, mit welchem Griff er den Schlüssel zieht, bleibt immer gleich.

Herr Müller hat ebenfalls fünf Schlüssel in seiner Hosentasche und zieht jeweils einen zufällig aus seiner Tasche. Sollte er nicht passen, steckt er den Schlüssel nach jedem Versuch zurück in seine Tasche. Einer der fünf Schlüssel passt.

c) Gib einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass er

(1) beim zweiten Griff den richtigen Schlüssel zieht,

(2) beim vierten Griff den richtigen Schlüssel zieht,

(3) beim ersten, zweiten oder dritten Griff den richtigen Schlüssel zieht.

d) Beschreibe, welches Ereignis E die Wahrscheinlichkeit $P(E) = \left(\frac{4}{5}\right)^6$ hat.

e) Wie oft muss Herr Müller mindestens in seine Tasche greifen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 40 % den richtigen Schlüssel zieht?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B 17.05.2022

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Die Grundmenge ist die Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

   a) Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an. $(2x+2)^2 \geq 16 \cdot (0{,}25x^2 - 0{,}5)$

   b) Löse die Gleichung. $(-4x-3) \cdot (-2x+2) = 2 \cdot (2x+2) \cdot (2x-2)$

   c) Verlängert man die Seite a eines Rechtecks um 5 cm und die Seite b um 1 cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks um 18 cm^2.

      (1) Gib zu dieser Aussage eine allgemeine Gleichung an.

      (2) Gib ein ganzzahliges Ergebnis für die Seitenlängen a und b des Rechtecks an.

2. Elektrischer Strom wurde im Jahr 2021 in Deutschland zu einem Teil aus erneuerbaren Energien (Wind/Solar/Wasser/Biomasse), aber auch aus Kernenergie, Kohle und Gas erzeugt.
   Die Windkraft produzierte 113,5 Terawattstunden (TWh) und war mit einem Anteil von 23 % die stärkste aller Energiequellen. Es wurden 79 % davon auf dem Land (onshore) und der Rest auf der Nord- und Ostsee (offshore) erzeugt. Witterungsbedingt wurden im Jahr 2021 aber 12 % weniger Strom aus Windkraft produziert als im Jahr zuvor.
   Durch Solarenergieanlagen (Photovoltaik) wurden 48,6 TWh Strom bereitgestellt. Mit Hilfe der Wasserkraft wurden 19,7 TWh und aus Biomasse 43,2 TWh produziert.

   a) Wie viele Terawattstunden wurden…

      (1) … durch Windkraft offshore produziert?

      (2) … 2021 in Deutschland insgesamt erzeugt? Runde auf ganze TWh.

      (3) … im Jahr 2020 aus Windkraft erzeugt? Runde auf ganze TWh.

   b) (1) Im Jahr 2020 lag der Wert des gewonnenen Stroms der erneuerbaren Energiequellen bei 240 TWh.
      Um wie viel Prozent lag der Wert aus dem Jahr 2021 unter diesem Wert von 2020?

      (2) Finn behauptet: „Wenn wir im nächsten Jahr den Anteil der erneuerbaren Energiequellen um den gleichen Prozentsatz erhöhen, dann haben wir den Wert von 2020 wieder erreicht.“ Hat er recht? Begründe deine Antwort.

3. a) Konstruiere folgende Vielecke, die jeweils einen Umfang von 18 cm haben sollen.

      (1) das gleichseitige Dreieck

      (2) ein achsensymmetrisches Trapez mit $a > c$

   b) Konstruiere ein Rechteck mit 6 cm langen Diagonalen.

   c) Konstruiere das regelmäßige Sechseck, dessen

      (1) längere Diagonalen 5 cm lang sind,

      (2) kürzere Diagonalen 5 cm lang sind.

4. a) (1) Übertrage die Tabelle und berechne. Gib auch x an.

Quadrat mit Seitenlänge ...	Umfang (in cm)	Flächeninhalt (in cm^2)
$a = 7$ cm		
2-fachem a		
x-fachem a	224	

(2) Malte behauptet: „Wenn sich die Seitenlänge a ver-x-facht, dann ver-x^2-facht sich der Flächeninhalt.“ Hat Malte recht? Begründe allgemein.

(3) Wie verändert sich

(3.1) der Umfang, wenn sich der Flächeninhalt ver-25-facht?

(3.2) der Flächeninhalt, wenn sich der Umfang halbiert?

Im Weiteren werden nur Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen betrachtet.

b) (1) Finde alle Seitenlängenpaare für ein Rechteck mit 24 cm^2 Flächeninhalt.

(2) Welches dieser Seitenlängenpaare aus b) (1) ergeben das Rechteck mit dem größtmöglichen Umfang? Gib diesen Umfang an.

c) (1) Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck, dessen größtmöglicher Umfang 194 cm beträgt?

(2) Wie groß ist der kleinstmögliche Umfang eines flächengleichen Rechtecks?

5. Die SV plant eine Talentshow, bei der Jugendliche nacheinander auf einer Bühne auftreten sollen. Es haben sich 2 Jungen (Alex und Ben) und 3 Mädchen (Celine, Dilara und Emma) zur Talentshow angemeldet. Dazu legt die SV zu Beginn die Reihenfolge der Auftritte fest.

a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Auftritte der Jugendlichen sind möglich?

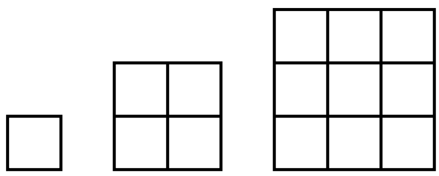
b) Bestimme, wie viele verschiedene Reihenfolgen möglich sind, wenn Celine am Schluss auftreten würde.

c) Die SV schlägt vor, dass die beiden Jungen zuerst auftreten sollen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind unter dieser Bedingung möglich?

d) Notiere alle möglichen Reihenfolgen der Auftritte, bei denen nie zwei Jungen oder zwei Mädchen nacheinander auftreten. Verwende dazu die Anfangsbuchstaben A, B, C, D und E.

e) Alex möchte auf keinen Fall direkt vor oder nach seiner Freundin Dilara auftreten. Bestimme die Anzahl der möglichen Reihenfolgen.

6. Bei einem Gewinnspiel sollen Kandidaten die größtmögliche Anzahl von Quadraten in einer Figur erkennen. In Figur 1 sieht man ein Quadrat. In Figur 2 sind fünf Quadrate zu sehen. In Figur 3 erkennt man somit 14 Quadrate (neun 1×1-Quadrate, vier 2×2-Quadrate und ein 3×3-Quadrat).



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Wie viele Quadrate sind bei entsprechender Fortführung des Musters in Figur 4 zu sehen?

b) Wie viele Quadrate erkennt man in Figur 6?

c) Wie viele verschieden große Quadrate gibt es in Figur 42?

d) In einer Figur sind 385 Quadrate zu sehen. Um welche Figur n handelt es sich?

e) Nun ändern sich die Spielregeln und man soll alle Rechtecke bestimmen. Beachte, dass Quadrate auch Rechtecke sind.

(1) Gib die Anzahl der Rechtecke in Figur 2 an.

(2) Gib die Anzahl der Rechtecke in Figur 3 an.

AUFGABENGRUPPE C **17.05.2022**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne x.

   (1) $6{,}5x + 2{,}4 = 3{,}6x + 8{,}2$

   (2) $3 \cdot (4x + 5) = -57$

   (3) $\frac{20}{x} = 5$

   b) Stelle zu dem folgenden Zahlenrätsel eine Gleichung auf und löse diese.
   „Multipliziert man eine unbekannte Zahl mit 8 und subtrahiert anschließend 24, so erhält man dasselbe, als wenn man zum Dreifachen der unbekannten Zahl 16 addiert."

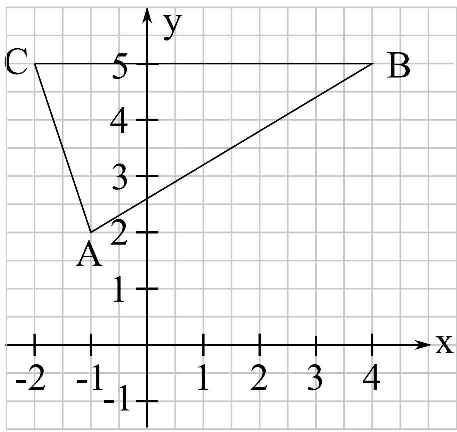
2. Tanjas Auto ist in der Werkstatt und wird repariert. Für die Dauer der Reparatur erhält Tanja einen Leihwagen von der Werkstatt. Der Tank des Leihwagens fasst 80,5 Liter Benzin. Bei Tanjas Fahrweise verbraucht der Leihwagen auf 100 km durchschnittlich 8 Liter.

   a) Berechne, wie viele Kilometer Tanja mit diesem Leihwagen mit einer vollen Tankfüllung fahren könnte.

   b) Bei Erhalt des Leihwagens ist der Tank zu 40 % gefüllt.
   Berechne, wie viele Liter Benzin noch in den Tank des Leihwagens passen.

   c) Tanja muss den Leihwagen nach zwei Tagen wieder zurückgeben. Davor muss sie die Menge an Benzin tanken, die das Auto verbraucht hat. Innerhalb der zwei Tage fährt Tanja insgesamt 61 km. An einer Tankstelle kostet ein Liter Benzin 1,90 €. Berechne, für wie viel Euro Tanja bei dieser Tankstelle dann tanken muss. Runde dein Ergebnis auf Cent.

3. a) Übertrage das abgebildete Koordinatensystem mit dem Dreieck ABC auf dein Reinschriftpapier.



   b) Zeichne die Gerade g, die parallel zur Strecke $\overline{BC}$ und durch den Punkt A verläuft.

   c) Spiegele das Dreieck ABC an der Geraden g und benenne die Bildpunkte mit A', B' und C'.

   d) Wir betrachten nun die gleichschenkligen Dreiecke ACC' (links) und $AB'B$ (rechts). Der Punkt A soll auf der Geraden g nach rechts verschoben werden.

   (1) Welche Koordinaten muss der verschobene Punkt haben, damit diese Dreiecke deckungsgleich sind? Notiere die Koordinaten des so verschobenen Punktes.

   (2) Welche Koordinaten muss der verschobene Punkt haben, damit der Flächeninhalt des linken Dreiecks nur halb so groß ist wie der Flächeninhalt des rechten Dreiecks? Notiere die Koordinaten des so verschobenen Punktes.

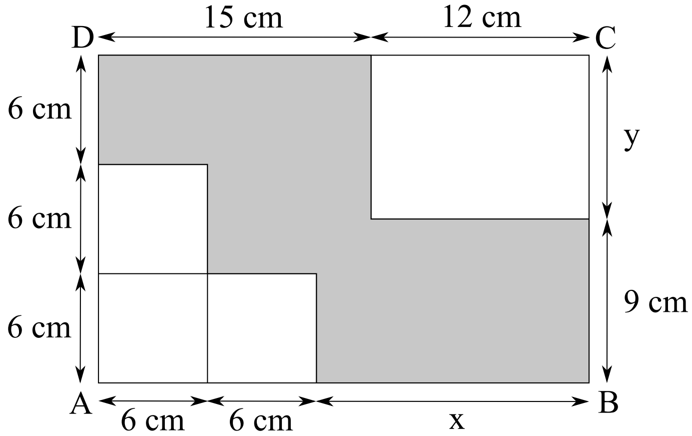
   (3) Bei der Verschiebung des Punktes A auf der Geraden g verändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht. Begründe, warum das so ist.

4. Aus dem abgebildeten Rechteck $ABCD$ werden ein weißes Rechteck und drei weiße Quadrate herausgeschnitten. Übrig bleibt die graue Restfläche.

   a) Berechne die Längen x und y.

   b) Berechne den Umfang der grauen Restfläche.

   c) Berechne den Flächeninhalt der grauen Restfläche.



(Abbildung nicht maßstabsgetreu)

5. Bei einem Quader sind nebenstehende Größen gegeben (siehe Abbildung 1).

   a) Berechne die Größe der Gesamtoberfläche des abgebildeten Quaders.

   b) Berechne die Länge der Kante c.

   c) Berechne das Volumen des abgebildeten Quaders.

   d) Der abgebildete Quader soll aus kleinen Würfeln mit der Kantenlänge von jeweils 1,5 cm zusammengesetzt werden (siehe Abbildung 2). Wie viele kleine Würfel benötigt man dafür?

   e) Ein anderer Quader hat ein Volumen von 130 cm^3. Eine Kante dieses Quaders ist 6,5 cm lang, eine andere Kante ist 4 cm lang. Berechne die Länge der dritten Kante dieses Quaders.

Abbildung 1 (nicht maßstabsgetreu)

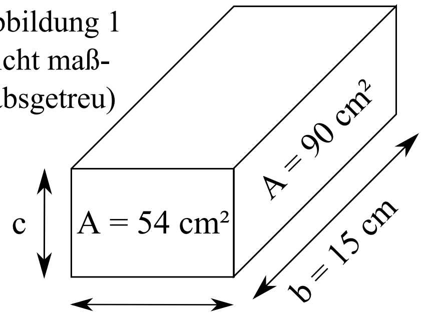
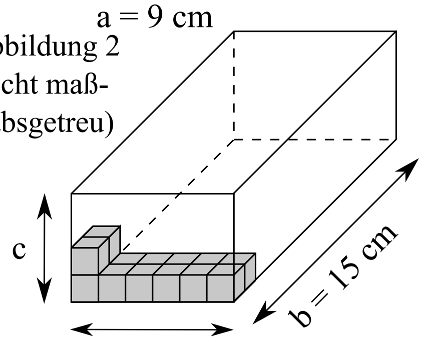
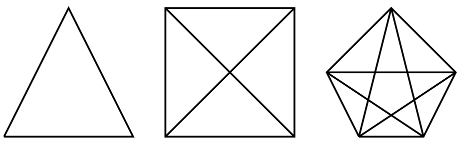


Abbildung 2 (nicht maßstabsgetreu)



6. Die Abbildungen zeigen Vielecke mit ihren Diagonalen. Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Diagonalen für einige Vielecke an.



Vieleck	Anzahl der Diagonalen
Dreieck	0
Viereck	2
Fünfeck	5
6-Eck	9
7-Eck	14
8-Eck	20
...	...

   a) (1) Zeichne ein beliebiges 6-Eck.
      (2) Zeichne in dein 6-Eck alle Diagonalen ein.

   b) Gib an, wie viele Diagonalen ein 10-Eck besitzt.

   c) Gib an, welches Vieleck genau 54 Diagonalen besitzt.

   d) Die Anzahl der Diagonalen in einem Vieleck kann man mit folgender Rechenanweisung bestimmen: „Multipliziere die Anzahl der Ecken des Vielecks mit der um 3 verminderten Anzahl der Ecken des Vielecks. Dividiere anschließend das Produkt durch 2.“

      Die Rechenanweisung dazu lautet: $\dfrac{\text{Anzahl der Ecken} \cdot (\text{Anzahl der Ecken} - 3)}{2}$

      (1) Berechne mit Hilfe dieser Rechenanweisung die Anzahl der Diagonalen in einem 35-Eck.
      (2) Ein Vieleck hat insgesamt 170 Diagonalen. Bestimme, um welches Vieleck es sich handelt.