

Algebraische Kurven

Algebraische Kurven 3.Ordnung

Kurve mit Funktionsgleichung $f(x,y)=0$ 3.Grades, d.h. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Anmerkung: Für die Parameterdarstellungen $x=x(t)$ bzw. $y=y(t)$ gilt, wenn nicht anders angegeben, $t \in \mathbb{R}$

Klassifizierung der Kurven nach ihrer Polargleichung

$\rho = \cos \theta$ Kreis	$\rho = 1/\cos \theta$ Gerade	$\rho = \cos^2 \theta$ Doppel-Ei	$\rho = 1/\cos^2 \theta$ Kampyle	$\rho = \sin^2 \theta / \cos \theta$ Zissoide des Diokles
$\rho^2 = \cos \theta$ Dipol-Kurve	$\rho^2 = 1/\cos \theta$ Külpische Quartik	$\rho = \cos^3 \theta$ einfaches Blatt	$\rho = 1/\cos^3 \theta$ Verdopplungskubik	$\rho = \sin^2 \theta / \cos^3 \theta$ Neilsche Parabel
$\rho = \tan \theta$ Kappa-Kurve	$\rho = \tan 2\theta$ Windmühlen-Kurve	$\rho^2 = \tan \theta$ Serpentine	$\rho = \sin \theta / \theta$ Schneckenlinie	$\rho = \theta / \sin \theta$ Quadratrix v.Dinostratus
$\rho = \cos 2\theta$ Quadrifolium	$\rho = 1/\cos 2\theta$ Kreuzkurve	$\rho^2 = \cos 2\theta$ Lemniscate Bernoulli	$\rho^2 = 1/\cos 2\theta$ Hyperbel	$\rho = \sin \theta \cos^2 \theta$ regelmäßiges Zweiblatt
$\rho = \cos 3\theta$ Trifolium	$\rho = 1/\cos 3\theta$ gleichseitiges Dreiblatt	$\rho^3 = \cos 3\theta$ Kiepert-Kurve	$\rho = \cos(\theta/2)$ Dürer-Blatt	$\rho = 1/\cos(\theta/2)$ Delangessche Trisektrix
$\rho = \cos^2(\theta/2)$ Kardioide	$\rho = 1/\cos^2(\theta/2)$ Parabel	$\rho = \cos(\theta/3)$ Trisektionsschnecke	$\rho = 1/\cos(\theta/3)$ MacLaurin Trisektrix	$\rho = \cos^3(\theta/3)$ Cayley Sextic
$\rho = 1/\cos^3(\theta/3)$ Tschirnhausen Kubik	$\rho = \cos(2\theta) / \cos(\theta)$ Strophoide	$\rho = \cos(\theta) / \cos(2\theta)$ Hyperbel	$\rho = \cos(2\theta) / \cos^3(\theta)$ parabolisches Blatt	$\rho = \cos(2\theta) \cos(\theta)$ Torpedo Kurve
$\rho = \sin(3\theta) / \sin(\theta)$ Ceva Trisektrix	$\rho = \sin(3\theta) / \sin(2\theta)$ MacLaurin Trisektrix	$\rho = \sin(4\theta) / \sin(\theta)$ Torpedo-Kurve		

Ebene Kurve

Parameterdarstellung: Eine ebene Kurve wird durch eine Gleichung der Form

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$$

in kartesischen (x,y) -Koordinaten definiert.

Bogenlänge s der Kurve $s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2} dt$

Gleichung der Tangente im Punkt (x_0, y_0)
 $x = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0)$
 $y = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0), -\infty < t < \infty$

Gleichung der Normalen im Punkt (x_0, y_0)
 $x = x(t_0) - (t - t_0)y'(t_0)$
 $y = y(t_0) + (t - t_0)x'(t_0), -\infty < t < \infty$

Ist die Kurve in einer Umgebung des Punktes $P(x_0, y_0)$ nicht linear, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Kreis vom Radius R mit dem Mittelpunkt $M(\xi, \eta)$.

Unter der Krümmung K versteht man $|K| = 1/R$.

Das Vorzeichen von K im Punkt P ist positiv (bzw. negativ), falls die Kurve im Punkt P oberhalb (bzw. unterhalb) der Tangente liegt.

$$K = (x'(t_0) y''(t_0) - y'(t_0) x''(t_0)) / (x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2)^{3/2}$$

mit dem Krümmungsmittelpunkt $M(\xi, \eta)$

$$\xi = x(t_0) - y'(t_0) (x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2) / (x'(t_0) y''(t_0) - y'(t_0) x''(t_0))$$

$$\eta = y(t_0) + x'(t_0) (x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2) / (x'(t_0) y''(t_0) - y'(t_0) x''(t_0))$$

Kurvengleichung in Polarkkoordinaten

$$r = r(\phi)$$

Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{(r^2 + r'^2)} d\phi$$

Krümmung im Punkt $P(x_0, y_0)$

$$K = (r^2 + 2r'^2 - rr'') / (r^2 + r'^2)^{3/2}$$

Krümmungsmittelpunkt

$$\xi = x_0 - (r^2 + r'^2)(x_0 + r' \sin \phi) / (r^2 + 2r'^2 - rr'')$$

$$\eta = y_0 - (r^2 + r'^2)(y_0 - r' \cos \phi) / (r^2 + 2r'^2 - rr'')$$

Kurvengleichung in impliziter Form

$$F(x,y) = 0$$

Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, y_0)$

$$F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) = 0$$

Normalengleichung im Punkt $P(x_0, y_0)$

$$F_x(P)(y - y_0) - F_y(P)(x - x_0) = 0$$

Krümmung K im Punkt P ($F_x = F_x(P)$ usw.)

$$K = (-F_y^2 F_{xx} + 2 F_x F_y F_{xy} - F_x^2 F_{yy}) / (F_x^2 + F_y^2)^{3/2}$$

Krümmungsmittelpunkt

$$\xi = x_0 - F_x (F_x^2 + F_y^2) / (F_y^2 F_{xx} - 2 F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy})$$

$$\eta = y_0 - F_y (F_x^2 + F_y^2) / (F_y^2 F_{xx} - 2 F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy})$$

Semikubische Parabel (Neilsche Parabel)

$$y^2 = a x^3$$

Parameterdarstellung

$$x = t^2 \quad y = a t^3$$

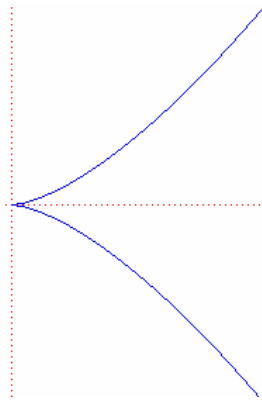
Polarkoordinaten

$$r = \tan^2 \theta \sec \theta / a$$

Krümmung

$$k = 6a / [\sqrt{x} * (4 + 9a^2x)^{3/2}]$$

Bogenlänge von O bis Punkt P $b = [(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8] / (27 a^2)$



Die Kurve wurde 1657 von William Neile entdeckt

Die semikubische Parabel ist ein Spezialfall der Legendreschen Normalformen

elliptischer Kurven: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$

Die Kurve ist isochron, d.h. ein sich auf ihr unter der Schwerkraft bewegendes Punkt legt in gleichen Zeiten stets gleiche Wege zurück.

Versiera der Agnesi

(nach Maria Gaëtana Agnesi 1718-1799)

$$(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$$

a ... Durchmesser des erzeugenden Kreises

Asymptote $y = 0$

Parameterdarstellung $x = at \quad y = a/(1+t^2)$

Fläche zwischen Kurve und Asymptote πa^2

Rotationsvolumen um x-Achse $\pi^2 a^3 / 2$

Wendepunkte $(\pm a/\sqrt{3}; 3a/4)$

Anstieg an den Wendepunkten $\pm 3/8 \sqrt{3} = \pm 0.649519...$

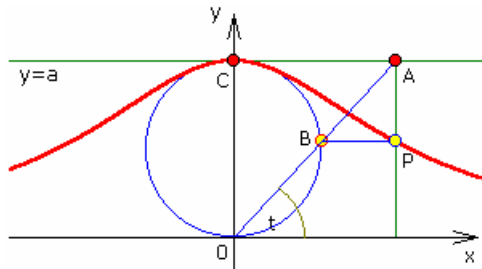
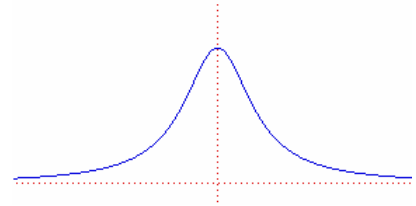
Tangente an Punkten mit Parameter p $(p^2 + 1)^2 y + 2px = a(3p^2 + 1)$

Die Kurve wurde erstmals von Maria Agnesi 1748 in "Istituzioni Analitiche" untersucht. Der Name 'versiera' (engl. witch) bedeutet eigentlich 'Hexe'.

Die richtige Entsprechung ergibt sich aber aus einem alten italienischen Begriff und bedeutet "freibeweglich". Diese Kurve wurde auch früher (1703) von Fermat und Guido Grandi angegeben.

Die Versiera der Agnesi ist ein Spezialfall der Lorentz- oder Breit-Wigner-Kurve mit der Gleichung

$$y = a / (b^2 + (x - c)^2); \quad a > 0$$



Konstruktion der Kurve der Agnesi

1. Konstruktion eines Kreises mit dem Durchmesser a und dem Mittelpunkt bei $(0; a/2)$
2. Wahl eines Punktes A auf der Geraden mit der Gleichung $y = a$
3. Konstruktion der Geraden g durch den Punkt A und den Koordinatenursprung O
4. Der Schnittpunkt von g und dem Kreis ist der Punkt B
5. Konstruktion des Lotes h von A auf die x-Achse
6. Konstruktion des Lotes von B auf das Lot h

7. Der Lotfußpunkt P(x;y) ist ein Punkt der Kurve der Agnesi

Flächenberechnung der Kurve der Agnesi

Ausehend von der Parameterdarstellung

$$x = 2 R \cos t \quad y = 2 R \sin^2 t$$

wobei R der Radius des erzeugenden Kreises ist, kann die Fläche zwischen Kurve und x-Achse mittels Leibnizscher Sektorenformel berechnet werden.

$$A = 1/2 \int (x dy/dt - dx/dt y) dt$$

Die Ableitungen dx/dt und dy/dt nach dem Parameter t lauten

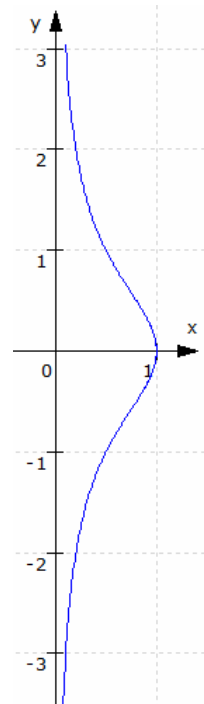
$$dx/dt = -2R/\sin^2 t \quad dy/dt = 4 R \sin t \cos t$$

Die Integrationsgrenzen für die ganze Kurve sind $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi$.

$$A = 1/2 \int_0^\pi (8 R^2 \cos^2 t + 4 R^2) dt = 2 R^2 \int_0^\pi (2 \cos^2 t + 1) dt$$

$$= 2 R^2 [t + \sin(2t) / 2 + t]_{0}^{\pi} = 4 \pi R^2$$

Das Ergebnis ist bemerkenswert. Der Flächeninhalt ist endlich obwohl die Kurve sich nur asymptotisch der x-Achse nähert. Die Maßzahl entspricht genau dem vierfachen Kreisflächeninhalt.



Wendekurve der Agnesi

Die Wendekurve der Agnesi (1718-1799) ist die um 90° gedrehte Kurve der Agnesi.

$$xy^2 = a^2 (a-x)$$

a ... Durchmesser des erzeugenden Kreises

Asymptote $x = 0$

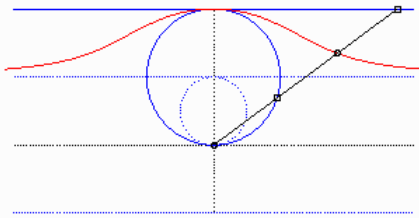
Parameterdarstellung $x = a \cos^2 t; \quad y = a \tan t$

$$DB: -\pi/2 < t < \pi/2$$

Fläche zwischen Kurve und Asymptote πa^2

Rotationsvolumen um y-Achse $\pi^2 a^3 / 2$

Wendepunkte $(3a/4; \pm a/\sqrt{3})$



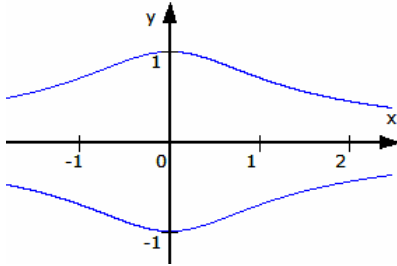
Visiera-Kurve

Eine zur Versiera der Agnesi ähnliche Kurve; mit ähnlichem Namen; ist die Visiera-Kurve. Sie wurde ebenfalls erstmals von Maria Agnesi untersucht. Ihren Namen erhielt sie 1887 von Peano. Visiera bedeutet in etwa Schild, Schirm.

Polargleichung $\rho = a (1/\sin \theta + \sin \theta)$

Kartesische Koordinaten $x (x^2 + y^2) = a (x^2 + 2 y^2)$

Diese Kurve entsteht mit folgendem Modell. Gegeben ist ein Kreis und auf diesem ein Punkt. An den Kreis wird diametral zum Punkt eine Tangente gezogen. Nun bewegt sich ein zweiter Punkt auf diesem Kreis. Vom festen Punkt zum sich bewegenden Punkt wird ein Strahl gezogen, der die Tangente schneidet. Die zur Visiera gehörenden Punkte sind dann die Mittelpunkte der Strecken rotierender Punkt – Tangentenschnittpunkt. Damit ist die Visiera-Kurve eine spezielle Zissoide. Die Kurve entsteht auch, wenn eine Ellipse mit der Exzentrizität $1/\sqrt{2}$, d.h. $2 x^2 + y^2 = ay$; deren einer Nebenscheitel sich in einem Kreismittelpunkt befindet, an diesem Kreis invertiert wird.



Külpische Quartik

Die Kurve wurde von Külp 1868 eingeführt. Da die Form der Kurve an eine Konchoide erinnert, wird sie auch Külpische Konchoide genannt. Der obere Teil der Kurve hat Ähnlichkeit mit der Kurve der Agnesi.

Gleichung: $y^2 = 1 / (1 + x^2)$

Die Külpische Quartik ist die hyperbolistische Kurve des Kreises. Ist ein Kreis K gegeben und eine Tangente l an den Kreis, so wird die hyperbolistische Kurve bezüglich des Mittelpunktes M des Kreises wie folgt konstruiert.

Q sei ein Punkt auf dem Kreis. Die Gerade m = MQ schneidet die Tangente in R. n ist eine Gerade parallel zur Tangente l durch Q. Dann ist die Külpische Quartik die Menge aller Punkte P, die Projektion von R auf m sind.

Descartes' Schleife, Kartesisches Blatt

Kartesische Koordinaten: $x^3 + y^3 = 3 a xy$

Parameterdarstellung: $x = 3 a t / (1+t^3)$

$y = 3 a t^2 / (1+t^3); t \neq -1$

Polarkoordinaten $r = (3a \sin \phi \cos \phi) / (\sin^3 \phi + \cos^3 \phi)$

Diese Kurve wurde 1638 von Descartes beschrieben, allerdings fand er nur für den 1. Quadranten den korrekten Kurvenverlauf

Die Kurve ist keine Kurve im Sinne des Foliums (Schleife) der Art

$$(x^2 + y^2) (y^2 + x (x + b)) = 4 a x y^2$$

Asymptote

$$x+y+a = 0$$

Scheitel

$$S (3/2 a; 3/2 a)$$

Tangentengleichung am Punkt t = p: $p (p^3 - 2) x + (1 - 2 p^3) y + 3a p^2 = 0$

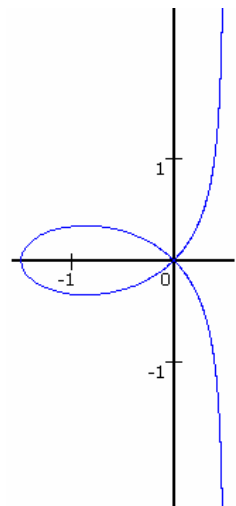
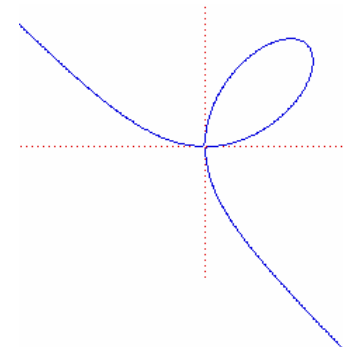
Für t = 0 verläuft die Kurve durch den Koordinatenursprung.

Fläche zwischen Kurve und Asymptote = $3/2 a^2$

Punkt (0;0) ist Knotenpunkt

Die Kurve ist auch unter dem Namen "Knotenband" bekannt. Sie wurde 1692 von Huygens Kartesisches Blatt genannt.

Durch Roberval wurde die Kurve "Jasminblüte" genannt. Heute wird darunter eine andere Kurve verstanden.



Achsenparalleles kartesisches Blatt

$$y^2 = x^2 (1 + x) / (1 - 3x)$$

Parameterdarstellung $x = l (t^2 - 1) / (3t^2 + 1)$

$$y = l t (t^2 - 1) / (3t^2 + 1)$$

Polarkoordinaten $r = l (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) / (2 \sin^3 \phi + \cos^3 \phi)$

Länge des Blattes $l = 3a/\sqrt{2}$

Krümmungsradius im Scheitel $l/8$

Krümmungsradius im Knotenpunkt $l/\sqrt{2}$

Flächeninhalt der Schleife = Flächeninhalt der unendlichen Zone zwischen den Zweigen und der Asymptote = $3/2 a^2 = l^3/27$

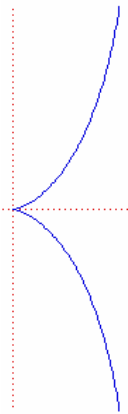
Größte Breite der Schleife $2 l/3 \sqrt{(2 \sqrt{3} - 3)}$

... im Abstand vom Knotenpunkt $l/3 \sqrt{3}$

Zissoide des Diokles

Die Kurve wurde erstmals durch Diokles (um 180 v.u.Z.) beschrieben. Diokles nutzte die Kurve zur Würfelverdopplung.

Der Name "Zissoide" (im Deutschen auch Kissoide) wurde von Geminus (um 80 v.u.Z.) gewählt.



1634 konstruierte Fermat die Tangenten an die Zissoide; 1658 fanden Huygens und Wallis, dass die Fläche zwischen Kurve und Asymptote endlich ist. 1689 beschrieb J.C. Sturm in "Mathesis Enucleata" eine mechanische Einrichtung zur Konstruktion der Zissoide.

Kartesische Gleichung $y^2 (a - x) = x^3; x > 0$

Parameterdarstellung $x = at^2 / (1 + t^2) \quad y = at^3 / (1 + t^2)$
 $x = a \sin^2 \theta \quad y = a \sin^3 \theta / \cos \theta$

Asymptote $x = a$

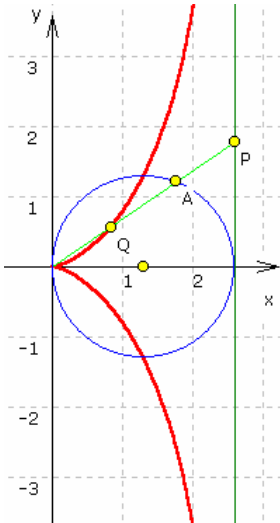
Polarkoordinaten $r = a \sin^2 \phi / \cos \phi$

Krümmung $\kappa(t) = 3/[a |t| (t^2+4)^{3/2}]$

Fläche zwischen Kurve und Asymptote $A = 3/4 \pi a^2$

Punkt (0;0) ist Umkehrpunkt

Der geometrische Ort aller Fußpunkte der Senkrechten vom Scheitel einer Parabel $y^2=2px$ auf ihre Tangenten ist eine Zissoide: $y^2 = -x^3 / (p/2 - x)$



Konstruktion einer Zissoide

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M der durch den Ursprung verläuft ($r = a$), sowie eine Parallele zur y-Achse durch den 2.Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse.

Ein Strahl, vom Ursprung O ausgehend, schneide den Kreis im Punkt A, die Parallele im Punkt P. Der Punkt Q ist so auf dem Strahl gewählt, dass gilt: $OA = PQ$.

Wandert A entlang des Kreises, so beschreibt der Punkt Q eine Zissoide.

Eine Zissoide kann auch wie folgt konstruiert werden. Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser d und eine Gerade außerhalb des Kreises im Abstand d. Bewegt sich ein Punkt P auf dem Kreis und ein Punkt Q auf der Geraden, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke PQ eine Zissoide.

Zissoide und Delisches Problem

Mit Hilfe der Zissoide ist es möglich das Delische Problem der Würfelverdoppelung zu lösen. Dabei ist

aber zu beachten, dass die Zissoide des Diokles nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

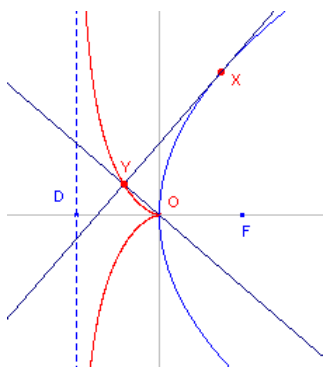
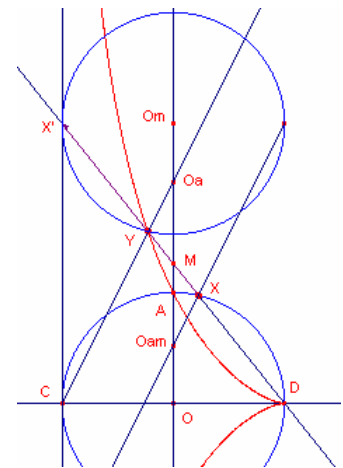
Gegeben ist ein Kreis um O mit dem Radius OD, die zugehörige Zissoide und die Strecke OA.

Der Punkt Oa sei das Spiegelbild von O am Punkt A. Die Gerade COa schneide die Zissoide im Punkt Y; dieser Schnittpunkt ist allein mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Die Gerade DY schneide weiterhin die Gerade OA im Punkt M. Dann gilt:

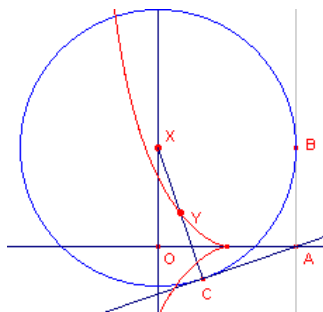
$$OM^3 = 2 OA^3$$

Damit wäre OM die Kantenlänge eines Würfels, der das doppelte Volumen eines Ausgangswürfels mit der Kantenlänge OA aufweist.



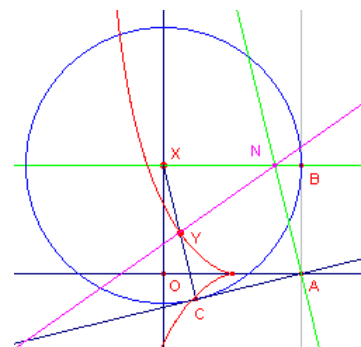
Zissoide als Fußpunktkurve einer Parabel

Gegeben ist eine Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie durch D. Durch einen Punkt X der Parabel wird eine Tangente gelegt. Der Lotfußpunkt von O auf diese Tangente ist dann ein Punkt der Zissoide des Diokles.



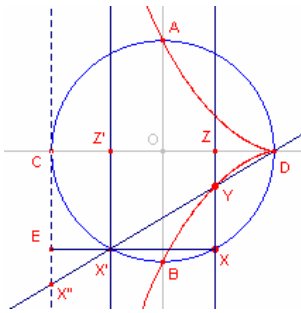
Newtonsche Konstruktion

Gegeben sind zwei Punkt O und A. Auf der Senkrechten zu OA durch O liegt ein beliebiger Punkt X. Dieser ist Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius OA. OB und OC sind die von A an den Kreis gelegten Tangenten. Der Mittelpunkt Y von OC ist dann ein Punkt der Zissoide.



Aus der Newtonschen Konstruktion folgt:

Die Senkrechte durch A zur Tangente AC schneidet die Senkrechte zu AB durch B in einem Punkt N. Die Strecke NY ist dann die Normale der Zissoide durch den konstruierten Punkt Y.



Zisoidengleichung

Aus der Definition der Zissoide kann deren Gleichung hergeleitet werden. Es sei $OZ = x$, $ZY = y$ und der Radius des Kreises gleich R . Dann wird

$$CZ : ZX = DZ : ZY$$

$$CZ \cdot ZY = ZX \cdot DZ$$

$$\text{und } (R + x) \cdot y = \sqrt{(R^2 - x^2)} \cdot (R - x)$$

$$(R + x)^2 y^2 = (R + x) \cdot (R - x)^3$$

$$(x - R)^3 + y^2 (x + R) = 0$$

Bei $x = R$, d.h. im Punkt D hat die Kurve einen Rückkehrpunkt. Die Gerade $x = -R$, die Senkrechte in C zu CD , ist die vertikale Asymptote der Zissoide. Die Gerade DX' schneidet die Asymptote der Kurve im Punkt X'' . Dann gilt

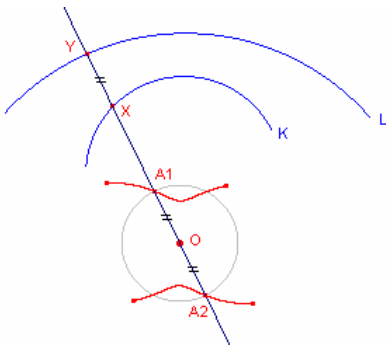
$$X'X'' = DY$$

Nachweis: Auf Grund der Symmetrie auf der Geraden AB ist $CZ' = ZD$, d.h. $X'E = DZ$. Aus der Kongruenz der Dreiecke DZY und $X'EX''$ folgt dann $X'X'' = DY$.

Zisoidenname

Zur Lösung des delischen Problems der Würfelverdoppelung wurde die Zissoide (Kissoide, Cissoide) von Diokles (ca. 200 v.u.Z.) erfunden.

Der Name beschreibt die Ähnlichkeit der Kurve mit der Spitze eines Efeublattes (cissos = Efeu). Im 17. Jahrhundert beschäftigten sich u.a. Newton, Roberval, Fermat, Huygens und Sluse (Domherr zu Lüttich) mit dieser Kurve. Huygens schlug vor, die Kurve Slusianische Kissoide zu nennen, in der Literatur hielt sich aber die Verbindung des Namens zu Diokles.



Allgemeine Zissoide

Der Begriff der Zissoide kann auf beliebige Kurven erweitert werden:

Gegeben seien zwei (gekrümmte) Linien K und L , sowie ein fester Punkt O . X sei weiterhin ein beliebiger Punkt auf K . m ist die Gerade durch O und X . Y sei der Schnittpunkt dieser Geraden m mit der Kurve L . Der geometrische Ort der Punkt A_1 und A_2 auf m mit $OA_1 = OA_2 = XY$

heißt dann die allgemeine Zissoide von K und L mit dem Pol O .

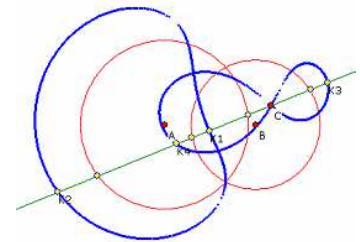
Eine derartige Zissoide zweier Kreise K und L kann unterschiedlichste Form annehmen. U.a. können Pascalsche Schnecke, Kardioiden, Epizykloiden usw. entstehen. Zissoiden eines Kreises K und einer

Geraden L können die Zissoide von Diokles, die Strophoide, die Trisektrix von MacLaurin, die Konchoide des Nikomedes und weitere interessante Kurven bilden.

Allgemeinen Zissoiden zweier Kreise

Fall 1: Berührt der eine Kreis den anderen von innen und liegt der feste Punkt C im Mittelpunkt, des kleineren, innen liegenden Kreises, so entsteht eine Pascalsche Schnecke.

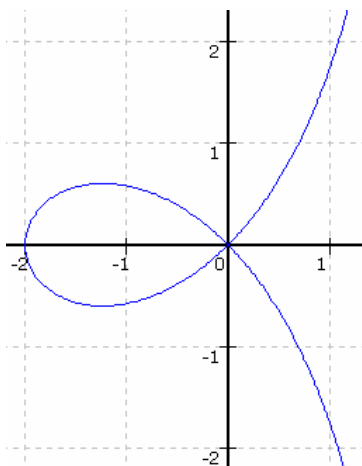
Fall 2: verläuft zusätzlich der innere Kreis durch den Mittelpunkt des äußeren, so entsteht eine Kardioiden



Allgemeine Zissoide von Gerade und Kreis

Fall 3: berührt der Kreis die Gerade und befindet sich der feste Punkt D auf der Kreisperipherie als Spiegelpunkt des Berührungspunktes, so entsteht die klassische Zissoide des Diokles

Fall 4: berührt der Kreis die Gerade und liegt der feste Punkt irgendwo auf dem Kreis ergibt sich eine schiefe Zissoide



Fall 5: verläuft die Gerade durch den Kreismittelpunkt und liegt der Punkt D erneut auf dem Kreis, erhalten Sie eine Strophoide

Fall 6: liegt D auf der Peripherie und bildet die Gerade die Mittelsenkrechte von D und dem Kreismittelpunkt, so bildet sich die Trisektrix von MacLaurin

Fall 7: verläuft die Gerade durch den Kreis und liegt D ebenfalls im Kreis ergeben sich Konchoiden

Strophoide

Parameterdarstellung

$$x = a \frac{(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)}$$

Polarkoordinaten

Asymptote

Flächeninhalt der Schleife

Volumen bei Rotation der Schleife um x -Achse

$$= 0.166 a^3$$

$$(a - x) y^2 = (a + x) x^2$$

$$y = at \frac{(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)}$$

$$r = -a \cos 2\phi / \cos \phi$$

$$x = a$$

$$A = 2a^2 - \pi a^2 / 2$$

$$V = \pi a^3 (2 \ln 2 - 4/3)$$

Fläche zwischen Kurve und Asymptote

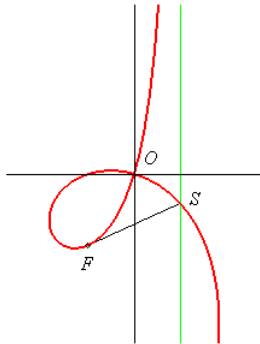
$$A = 2a^2 + \pi a^2 / 2$$

Besonderheiten: Punkt (0;0) ist Knotenpunkt; Tangenten in (0;0) sind senkrecht zueinander;

Krümmungsradius in (0;0) = $a\sqrt{2}$

Die Kurve wurde 1645 von Roberval eingeführt, der Kurvenname wurde 1846 von Montucci gegeben; nach griechisch στρωφος = Band, Gürtel.

Eine weiterer Name ist Pteroïde (griech. πτερον = Flügel).



Schiefe Strophoide

$$y^2(x - a) - 2x^2y \cos \alpha + x^2(a + x) = 0$$

α ... Schnittwinkel Asymptote-Abszisse

Polarkoordinaten

$$r = -a \cos(2\phi - \alpha) / \cos \phi \text{ mit } \alpha \in [0; \pi/2)$$

Für $\alpha = 0$ entsteht die oben angegebene Strophoide, für den Grenzfall $\alpha = \pi/2$ ein Kreis.

Brennpunkt

$$F(-a \cos \alpha; -a \sin \alpha)$$

Asymptote

$$x = a \cos \alpha$$

Schnittpunkt mit der Asymptote S ($a \cos \alpha; -a \cos \alpha \cot \alpha$)

Mit dem Brennpunkt als Koordinatenursprung wird die Gleichung zu

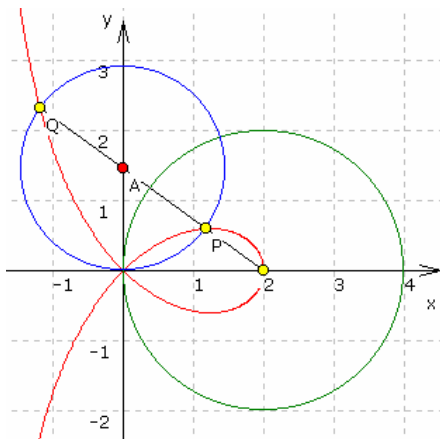
$$(x - 2a \cos \alpha)(x^2 + y^2) + a^2(x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha) = 0$$

Der Name Strophoide geht auf Montucci (1846) zurück und bedeutet sinngemäß

"Verdrehter Gürtel". Sie hat aber noch viele andere Namen: Ala, Pteroides torricellana, Fokale, Kukumaide, Logocyclica, harmonische Kurve.

In einem Briefwechsel zwischen F. de Verduſt und Torricelli von 1645 wird zuerst eine „Linie“ beschrieben, die „...in Frankreich Ala oder Pteroïde genannt wird...“.

Die Erfindung der Strophoide, wie die Kurve heute allgemein genannt wird, geht somit auf einen französischen Mathematiker, wahrscheinlich Roberval zurück. Allerdings soll schon Barrow (Lehrer von Newton) die Strophoide untersucht haben.



Konstruktion einer Strophoide

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M der durch den Ursprung verläuft ($r = a$). Ein Strahl, von M ausgehend, schneide die y-Achse im Punkt A; der Abstand von M zum Ursprung sei dann die Strecke der Länge c. Ein Kreis um den Punkt A mit dem Radius c schneide den Ausgangsstrahl in den zwei Punkten P und Q.

Wandert A entlang der y-Achse, so beschreiben die Punkte P und Q dann eine Strophoide.

Allerdings wird bei dieser Konstruktion der Mittelpunkt M nie erreicht.

Konstruktion II

Auf BC ist in B die Senkrechte errichtet, Q liegt auf der Senkrechten.

Der Kreis um B mit dem Radius BQ schneidet QC in P.

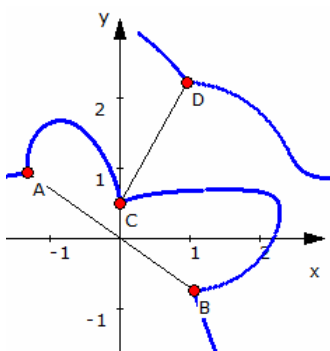
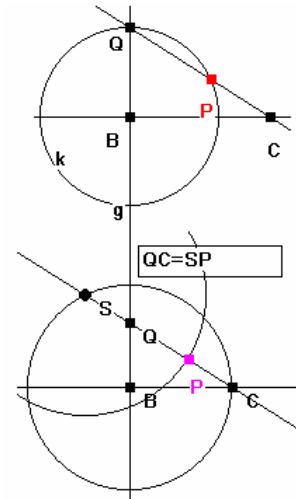
Der geometrische Ort von P, wenn Q auf h wandert, ist eine Strophoide.

Konstruktion III (nach Weth)

Auf BC ist in B die Senkrechte h errichtet und um B ein Kreis mit dem Radius BC geschlagen. Q liegt auf der Senkrechten. QC schneidet den Kreis in S.

Trägt man von S aus die Strecke QC auf der Geraden QC ab, so entsteht P.

Der geometrische Ort von P, wenn Q auf h wandert, ist eine Strophoide.



Apollonische Kubik

Gegeben sind zwei Strecken AB und CD. Die Apollonische Kurve ist dann die Menge aller Punkte P, von denen aus beide Strecken unter dem gleichen Winkel erscheinen.

Die Kurve ist damit die isoptische Kurve der zwei Strecken AB und CD und gleichzeitig eine Verallgemeinerung der Apollonischen Kreise.

1829 beschrieb van Rees die Kurve erstmals, 1852 gab Steiner die Konstruktionsmöglichkeit an. Erst 1915 konnte Gomes Teixeira die Äquivalenz nachweisen. Weitere wichtige Untersuchungen stammen von Brocard, Chasles, Dandelin, Darboux und Salmon.

Die Apollonische Kubik kann aus zwei Teilen bestehen.

$$(x - a)(x^2 + y^2) + bx + cy = 0$$

Die allgemeine Gleichung ist

Kreiskubik

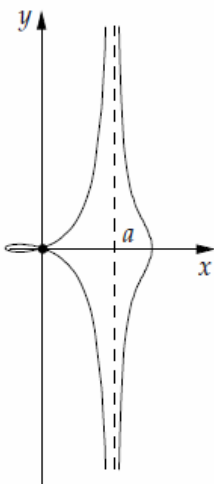
Eine Verallgemeinerung bildet die Kreiskubik mit der Gleichung

$$(x - a)(x^2 + y^2) + by^2 + cx + dy = e$$

Für $b = e = 0$ geht sie in die Apollonische Kubik über, für $b = 1+a, c = d = e = 0$, erhält man die Konchoide von Sluze.

Kurven 4.Ordnung

Kurven 4.Ordnung sind mathematische Kurven, die mit einer algebraischen Gleichung 4.Grades beschreibbar sind. Diese Kurven können im Allgemeinen aufgelöst werden, da es für Polynome 4.Grades eine vollständige Lösungsformel gibt.



Konchoide des Nikomedes (Muschellinie)

Die Konchoide (deutsch: Strahlkurve) des Nikomedes ist der geometrischer Ort aller Punkte M für die mit P als Schnittpunkt der Verbindungslinie zwischen OM_1 und OM_2 mit der Asymptote $x = a$ die Bedingung $OM = OP \pm l$ erfüllt ist.

Nikomedes (250-150 v.u.Z.) verwendete diese Kurve zur grafischen Lösung der Dreiteilung eines Winkels.

Gleichung $(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2$

Parameterdarstellung $x = a + b \cos t, a, b > 0$
 $y = a \tan t + b \sin t$

Polarkoordinaten $r = a / \cos \phi \pm b$

Asymptote $x = a$

Scheitel $S_1(a+b;0)$ und $S_2(a-b;0)$

Ursprung für $b < a$ isolierter Punkt

$b > a$ Doppelpunkt $b = a$ Rückkehrpunkt

Fläche zwischen äußerem Zweig und Asymptote ist unbegrenzt $= \infty$

Ist eine Kurve C in Polarkoordinaten $r = f(\phi)$ gegeben, so ist die allgemeine

Konchoide (Strahlkurve) von C durch $r = f(\phi) + b$ gegeben, wobei b eine

beliebige Konstante ist.

Die Konchoide des Nikomedes ist damit die allgemeine Konchoide einer Geraden.

Wendepunkte liegen im äußeren Zweig P,Q und im inneren Zweig P', Q' nur bei Existenz eines isolierten Punktes.

Abszisse der Wendepunkte $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - b^2) = 0$

Die Fläche zwischen beide Kurventeilen und der Asymptote $x = a$ hat keinen endlichen Flächeninhalt. Für die evtl. Schleife ergibt sich: $A = a\sqrt{(b^2-a^2)} - 2ab \ln((b+\sqrt{(b^2-a^2)})/a) + b^2 \arccos(a/b)$

Cochloide

Die Konchoide des Nikomedes wird auch Cochloide genannt. Schon Nikomedes erkannte 200 v.Chr. die drei möglichen Formen der nach ihm benannten Kurve. Insbesondere im 17.Jahrhundert war die Kurve unter Mathematikern sehr beliebt, da mit ihrer Hilfe geometrische Konstruktionsprobleme gelöst werden können, die unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal unlösbar sind.

Dazu gehören die Würfelverdopplung, die Dreiteilung des Winkels und die Konstruktion eines regelmäßigen 7-Ecks. Dies bedeutet aber, dass die Konchoide nicht durch Verwendung von Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

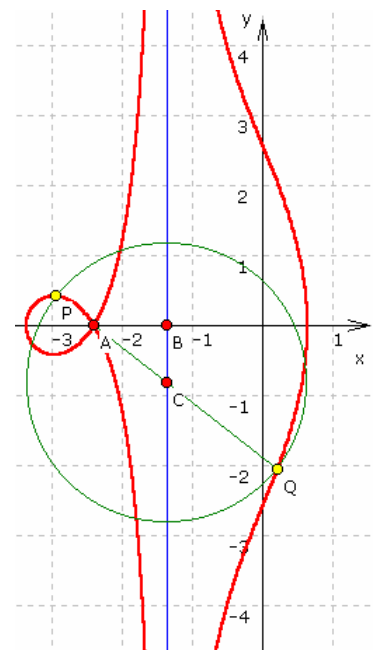
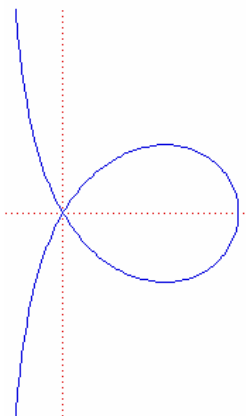
Konstruktion der Konchoide

Auf einer zur x-Achse senkrechten Geraden g durch einen Punkt B liege ein weiterer Punkt C. Auf der Abszissenachse wird ein Punkt A gewählt und mit C verbunden.

Um den freien Punkt C wird ein Kreis mit einem festgelegten Radius (Länge l) gezeichnet. Dieser Kreis schneidet die Strecke AC und ihre Verlängerung in den zwei Punkten P und Q.

Bewegt sich nun C frei auf der Geraden durch P, so beschreiben die Punkte P und Q die Konchoide des Nikomedes.

Durch Veränderung der Radiusgröße und unterschiedliche Lagen von A und B erhält man verschiedene Formen der Konchoide.



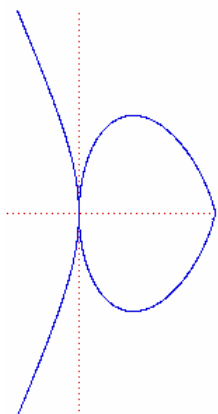
Konchoide von Sluze

erstmalig konstruiert von René de Sluze (1662)

Kartesische Koordinaten: $a(x-a)(x^2+y^2) = k^2 x^2$

Polarkoordinaten $r = k^2 / a \cos \theta + a \sec \theta$

Parameter der dargestellten Kurve $k^2 / a = 1$ und $a = -0.5$



Perle von Sluze

Eine weitere interessante Kurve ist die ebenfalls von Sluze (1657) untersuchte Kurve mit der Gleichung $y^n = k(a-x)^p x^m$, wobei n , p und m ganze Zahlen sind. Ihren Namen erhielt die Kurve von Blaise Pascal.
In der Abbildung ist der Fall $n = 4$, $k = 2$, $p = 3$ und $m = 2$ zu sehen.

Pascalsche Schnecke

(nach Etienne Pascal 1588-1651)

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2 (x^2 + y^2)$$

Polarkoordinaten $\rho = a \cos \phi + l$
Parameterdarstellung $x = a \cos^2 \phi + l \cos \phi$
 $y = a \sin \phi \cos \phi + l \sin \phi$

rationale Parameterdarstellung

$$x = [(l+a) + u^2(l-a)] * (1-u^2) / (1+u^2)^2$$

$$y = [(l+a) + u^2(l-a)] * (2u) / (1+u^2)^2$$

mit $u = \tan \phi$

Originalname: Limacon von Pascal

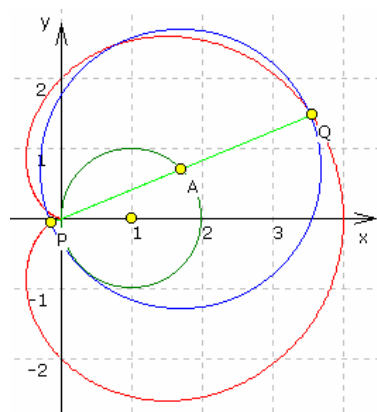
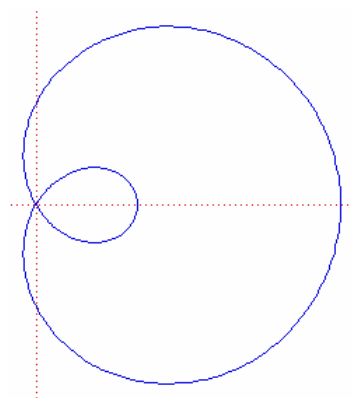
Die Kurve wurde von Étienne Pascal, dem Vater von Blaise Pascal, gefunden und erhielt von dem französischen Mathematiker Gilles-Peronne Roberval ihren Namen, als dieser 1650 die Kurve zur Konstruktion von Tangenten benutzte.

Die Pascalsche Schnecke ist die allgemeine Konchoide des Kreises.

Streng genommen entdeckte Albrecht Dürer die Kurve, da er 1525 in seinem Werk "Underweysung der Messung" eine Konstruktionsbeschreibung angab. Die Kreisinverson einer Pascalschen Schnecke ergibt einen Kegelschnitt.

Für $l = a/2$ entsteht der Spezialfall der Trisektionsschnecke, die, wie der Name sagt, zur Winkeldreiteilung genutzt werden kann.

Die Pascalsche Schnecke kann auch als Epitrochoide erzeugt werden



Konstruktion einer Pascalschen Schnecke

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M der durch den Ursprung verläuft ($r = a$), sowie eine Ursprungsgerade. Die Ursprungsgerade schneide den Kreis im Punkt A. Von A ausgehend trägt man auf der Ursprungsgeraden nach beiden Seiten eine Strecke der Länge l ab und erhält die Punkte P und Q. Die Kurve, die von den Punkten P und Q beschrieben wird wenn A den Kreis durchläuft, heißt Pascalsche Schnecke.

Trisektionsschnecke

Spezialfall einer Pascalschen Schnecke
Polargleichung $\rho = a(1 + 2 \cos \theta)$
Polargleichung mit Koordinatenursprung bei $A(a,0)$ $\rho = 2a \cos \theta/3$
Flächeninhalt $A = (\pi + 3/4 \sqrt{3}) a^2$

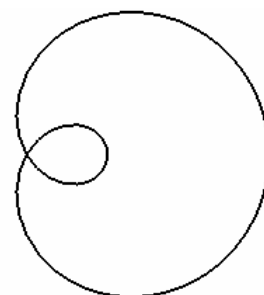
Flächeninhalt der inneren Schleife $A = (\pi/2 - 3/4 \sqrt{3}) a^2$

Die Kurve wurde erstmals von Archimedes untersucht und um 1630 von Etienne Pascal.

Die Kurve kann zur Konstruktion einer Winkeldreiteilung verwendet werden.

Liegt der Koordinatenursprung O am Schnittpunkt der Kurve mit sich selbst und der Punkt A am weitesten rechts liegenden Punkt der kleinen Schleife, so gilt für die zur x-Achse gebildeten Winkel eines beliebigen Punktes P auf der Schnecke: $\angle(x\text{-Achse}, OM) = 2/3 \angle(x\text{-Achse}, AM)$

Die Trisektionsschnecke kann als der Ort der Schnittpunkte zweier rotierender Geraden angesehen werden. Dabei muss die eine Gerade die 1,5fache Geschwindigkeit haben.



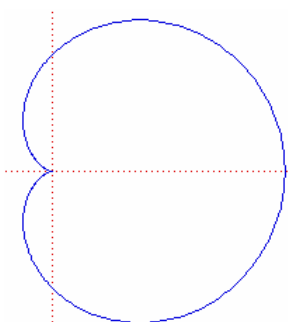
Kardioide (Herzkurve)

Kartesische Koordinaten $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax) - a^2y^2 = 0$
Polarkoordinaten $r = a(1 + \cos \phi)$
Parameterdarstellung $x = a \cos t(1 + \cos t)$
 $y = a \sin t(1 + \cos t)$ $0 \leq t < 2\pi, a > 0$

Die Herzkurve ist eine Epizykloide mit $r = R$ und gleichzeitig die Kautistik, welche durch Lichtstrahlen ausgehend von einem Punkt auf einer Kreisperipherie und reflektiert vom Kreis erzeugt wird. Der Name Kardioide wurde von de Castillon in "Philosophical Transactions of the Royal Society" 1741 geprägt.

Kurvenlänge $s = 8a$

Die Kurve wurde erstmals 1674 von Rømer und 1678 von Vaumesle



untersucht. 1708 gab La Hire die Kurvenlänge erstmals an.

Jede Sehne der Kardioide durch den Koordinatenursprung hat die Länge $2a$. Für jeden Anstieg m existieren genau drei parallele Tangenten an die Herzkurve.

Fläche der Kurve	$A = 3\pi a^2/2$	Bogenlänge	$s = 4a \sin(\phi/2)$
Krümmung	$k = 3 \sec(\phi/2) / (4a)$	Tangentialwinkel	$\alpha = 3/2 \phi$

Flächeninhalt und Umfang der Kardioide

Man verwendet zur Berechnung der beiden Größen A und U am besten die einfachste Darstellung der Kardioide, nämlich die Polarform $r = 2a [1 + \cos \varphi]$. Für diese einfache Gleichung liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems in der Spitze der Kardioide.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \dots = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = 6\pi a^2$$

$$u = 2 \int_0^\pi \sqrt{(dr/d\varphi)^2 + r^2} d\varphi = 16 a$$

Der Umfang ist rational und so groß wie der Umfang eines Quadrats mit der Seite $4a$.

Konstruktion einer Kardioide

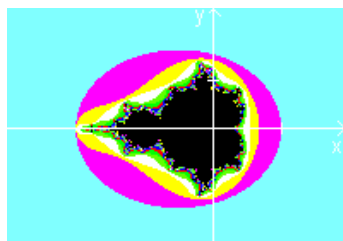
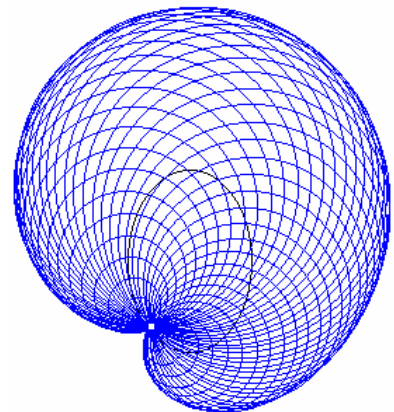
Die Kardioide ist allein mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten nicht konstruierbar. Interessant ist, dass es ein einfaches Verfahren gibt, welches die prinzipielle Form dieser Kurven konstruieren lässt.

Ausgangspunkt der Konstruktion ist eine Ellipse, im Spezialfall ein Kreis. Auf der Peripherie der Ellipse werden in gleichen Abständen eine gewisse Anzahl von Punkten markiert. Weiterhin wird ein Zielpunkt entweder auf der Ellipse oder aber auch innerhalb oder außerhalb der Ellipse festgelegt.

Die eigentliche Konstruktion geschieht nun, indem um jeden Punkt auf der Ellipse ein Kreis derart gezeichnet wird, dass dieser durch den Zielpunkt verläuft. D.h., je weiter der Ellipsenpunkt vom Zielpunkt entfernt ist desto größer ist der Radius des konstruierten Kreises.

Je größer die Anzahl der Konstruktionpunkte und der damit zu zeichnenden Kreise ist, desto besser beschreibt die äußere Begrenzung der gezeichneten Kreise die gesuchte mathematische Kurve.

Theoretisch müssten unendlich viele Hilfspunkte genutzt werden um die Kurve exakt zu beschreiben, allerdings genügen oft schon 50 - 100 Punkte zur eindeutigen Darstellung. Zum Beispiel können folgende Kurven konstruiert werden: Kardioide, Epizykloiden (verlängert oder verkürzt), Cassini-Kurven



Kardioide und Mandelbrotmenge

Der "Hauptkörper" der Mandelbrotmenge hat die Form einer Kardioide. Der zweite Name Apfelmännchen greift diese Form auf.

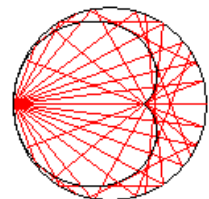
Der Hauptkörper hat nicht nur die Form, er ist eine Kardioide. Die Punkte der Mandelbrotmenge, denen eine konvergente Folge zuzuordnen ist, bilden das Innere einer Kardioide.

Katakaustik und Kardioide

Fällt Licht auf einen sphärischen Spiegel (Trauring im Sonnenlicht), so bildet das reflektierte Licht eine Brennfläche, die Katakaustik. Das ist aber keine Kardioide, sondern eine sogenannte Nephroide.



Eine Kardioide entsteht als Einhüllende, wenn Lichtstrahlen von einem Punkt eines Kreises ausgehen und dann innen an der Kreislinie reflektiert werden (rechts).

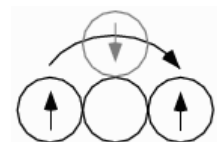


Münzenparadoxon

Gegeben sind zwei gleich große Münzen. Die eine Münze, die zentrale Münze, wird festgehalten, während die zwei Münze reibungsfrei auf der zentralen abrollt, d.h. sie beschreibt eine Kardioide.

Nach einer halben Drehung der Münze auf der linken Seite rund um die zentrale Münze durchläuft die Münze eine komplette Drehung. D.h. eine Münze macht zwei komplette Umdrehungen, wenn diese vollständig auf einer Münze gleichen Radius abrollt.

Diese Tatsache steht im Widerspruch zum "gesunden" menschlichen Verstand, der nur von einer Umdrehung ausgeht.



Rationale Doppelkreisquartik

Polargleichung $(\rho - c \cos \theta - d \sin \theta)^2 = a^2 \cos^2 \theta + \varepsilon b^2 \sin^2 \theta$

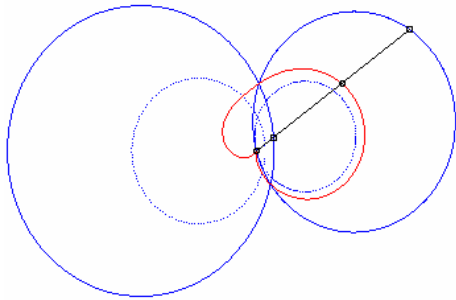
Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2 - cx - dy)^2 = a^2 x^2 + \varepsilon b^2 y^2$

Diese Kurven entstehen bei folgender Konstruktion:

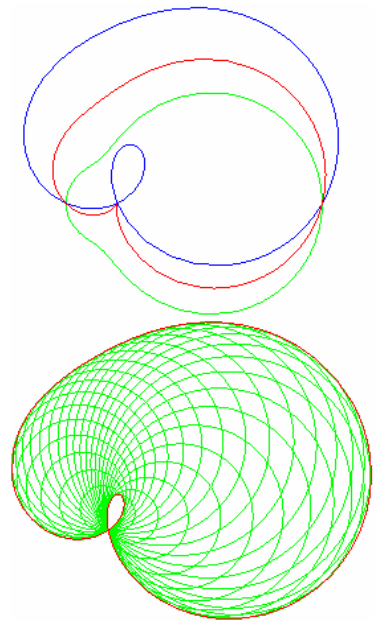
Ausgangspunkt der Konstruktion ist eine Ellipse. Auf der Peripherie der Ellipse werden in gleichen Abständen eine gewisse Anzahl von Punkten markiert. Weiterhin wird ein Zielpunkt entweder auf der Ellipse oder aber auch innerhalb oder außerhalb der Ellipse festgelegt.

Um jeden Punkt auf der Ellipse wird ein Kreis derart gezeichnet, dass dieser durch den Zielpunkt verläuft. Die äußere Begrenzung der gezeichneten Kreise beschreibt dann für immer mehr Punkte auf der Ellipse die gesuchte mathematische Kurve besser. Man unterscheidet drei Fälle: acnodal ... der Zielpunkt liegt in der Ellipse, cuspidal ... auf der Ellipse, crunodal ... außerhalb der Ellipse. Es ist $c^2/a^2 + \varepsilon d^2/b^2 > 1$ für crunodal; $= 1$ für cuspidal und < 1 für acnodal.

Rationale Doppelkreisquadranten können auch durch Drehung einer Strecke erzeugt werden. Gegeben sind zwei Kreise und auf einem der Kreise ein Zentrum Z. Um Z rotiert eine Gerade, die beide Kreise in zwei Punkten schneidet. Der Mittelpunkt der von den Schnittpunkten gebildeten Strecken beschreibt dann eine Doppelkreisquadrant.



Für die Mittelpunkte der Kreise gilt:
Kreis 1 $((c - \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2})/2 ; d/2)$
der Kreis 1 muss durch O verlaufen
Kreis 2 $(\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2} ; 0)$

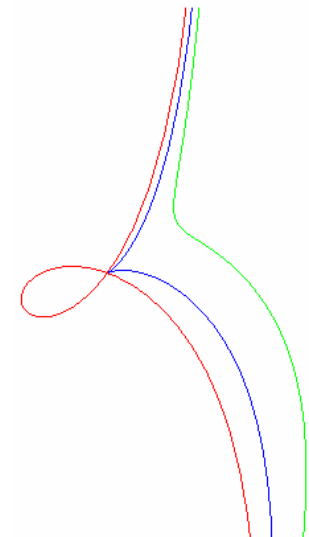


Rationale Kreiskubik

Die rationale Kreiskubik ist eine Kurve 3. Grades.

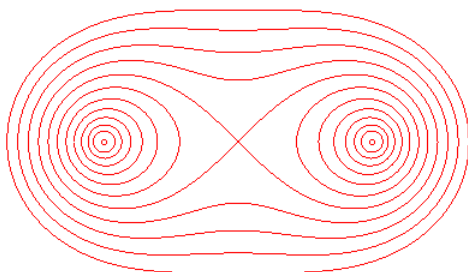
Polarkoordinaten $\rho = d / \cos \theta + 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$
Kartesische Koordinaten $x(x^2 + y^2) = (d + 2a)x^2 + 2bxy + dy^2$
 $y = \pm x \sqrt{(x - (2a + d)) / (d - x)}$
Kartesische Parameterequation
 $x = (dt^2 + 2bt + 2a + d) / (1 + t^2)$
 $y = tx$

Für $d = -a$ ergibt sich eine Strophoide.
Für $a = -2d, b = 0$ ergibt sich die Trisektris von Maclaurin.



Cassinische Kurven

Die Kurven wurden 1690 von Cassini zur Erklärung der Bewegung der Sonne im geozentrischen Weltbild eingeführt. Menge aller Punkte, deren Abstände zu F_1, F_2 konstantes Produkt a^2 haben



$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4, e > 0, a > 0$$

$$r^2 = e^2 \cos 2\phi \pm \sqrt{e^4 \cos^2 2\phi + a^4 e^4}$$

Kartesische Koordinaten mit $e = b/a$

$$x = a + (b^4 - 4a^2t^2 - t^4) / (4at^2)$$

$$y = \pm t \sqrt{(1 - ((b^4 - 4a^2t^2 - t^4) / (4at^3)))}$$

Krümmungsradius

$$R = 2b^2\rho^3 / (a^4 - b^4 3\rho^4)$$

Fläche für $e \geq 1$

$$A = 2b^2 E(e^{-2}), \text{ elliptisches Integral 2. Art}$$

Abstand

$$F_1F_2 = 2e$$

Für $a^2 \geq 2e^2$ ellipsenähnliche Gestalt

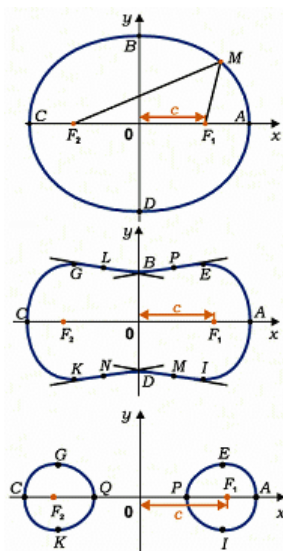
... die Nullstellen liegen bei $\pm \sqrt{a^2 + e^2}$, die Schnittpunkte mit der y-Achse bei $(0 ; \pm \sqrt{a^2 - e^2})$

Für $a^2 = 2e^2$ ellipsenähnliche Gestalt

... die Krümmung an den Schnittpunkten mit der y-Achse ist 0. Die Kurve berührt die Geraden $y = \pm e x$.

Für $e^2 < a^2 < 2e^2$ Einbuchtungen (eingedrücktes Oval)

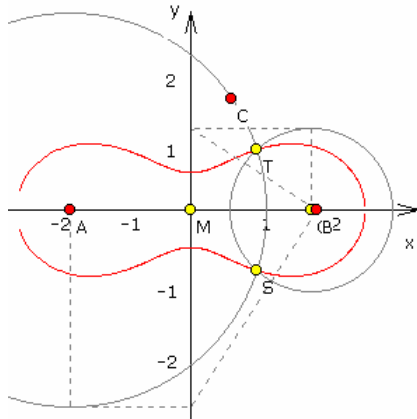
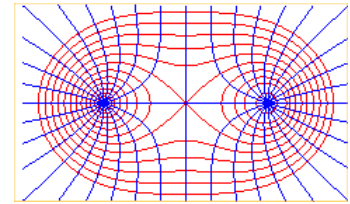
... es treten zusätzliche Extrema bei $(\pm \sqrt{(4e^4 - a^4)} / (2e) ; \pm a^2 / (2e))$ und Wendepunkte bei $(\pm \sqrt{(m/2 - n/2)} ; \pm \sqrt{(m/2 + n/2)})$ auf. $n = (a^4 - c^4) / (3e^2) ; m = \sqrt{(a^4 - c^4) / 3e^2}$



Für $a^2=e^2$ Lemniskate
 Für $a^2<e^2$ zwei getrennte eiförmige Teile
 ... die Punkte A, C liegen bei $(\pm \sqrt{a^2+c^2}; 0)$, die Punkte P und Q bei $(\pm \sqrt{c^2-a^2}; 0)$ sowie die Maxima und Minima bei $(\pm \sqrt{4e^4 - a^4} / (2e); \pm a^2 / (2e))$
 Die senkrechten Trajektorien, Feldlinien, der Cassini-Kurven sind gleichseitige Hyperbeln mit den Polargleichungen

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta_0) / \cos(2\theta - 2\theta_0)$$

Cassinische Kurven treten z.B. als Äquipotentiallinien auf. Dabei ist $2e$ die Entfernung der beiden festen Punkte, a^2 das konstante Produkt.
 Cassinische Kurven können als ebene Schnitte eines Torus parallel zur Achse erzeugt werden.



Konstruktion der Cassinischen Kurven

Beschreibung

1. Zeichne eine Gerade mit zwei Punkten A und G und deren Mittelpunkt M.
2. Setze einen Punkt B auf die Gerade und miss die Strecke MB.
3. Wähle einen beliebigen freien Punkt C, und miss die Strecke AC.
4. Zeichne um A einen Kreis durch C.
5. Zeichne um G einen Kreis mit dem Radius $MB \cdot MB / AC$.
6. Die Schnittpunkte der Kreise sind T und S.
6. Die Cassinische Kurve ist dann die Ortskurve von T bzw. von S, wenn der Kreis um A durch Ziehen an C verändert wird.
7. Durch Veränderung des Abstandes MB erhält man weitere mögliche Cassinische Kurven.

Zieht man B auf G, entsteht die Lemniskate von Bernoulli, eine der

berühmtesten Kurven der Mathematik. A und G heißen Brennpunkte. Ihr Abstand von M heißt Brennweite e . Vergrößert man MB gegenüber e , so geht die Lemniskate in "ellipsenähnliche" Ovale über.

Verkleinert man MB gegenüber e , so zerfällt die Lemniskate in zwei Teile.

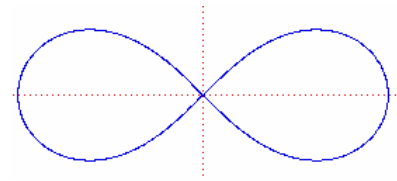
Der Radius $MB \cdot MB / AC$ kann konstruktiv als 3. Proportionale mittels Höhensatz am rechtwinkligen Dreieck ermittelt werden.

Bernoullische Lemniskate

Spezialfall der Cassinischen Kurven mit $a^2=e^2$

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2 (x^2-y^2)$$

Polarkoordinaten $r = a \sqrt{2 \cos 2\phi}$
 Parameterdarstellung $x = \sqrt{2} c (t + t^3) / (t^4 + 1)$
 $y = \sqrt{2} c (t - t^3) / (t^4 + 1)$



Ursprung ist Doppelpunkt und Wendepunkt

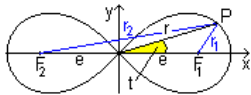
Krümmungsradius $\rho = 2a^2 / (3r)$

Fläche einer Schleife $A = a^2$ Wendetangenten im Ursprung $y = \pm x$

Größte Ordinatenausdehnung $= a$

Die Kurve wurde erstmals 1694 von Jacob Bernoulli in Acta Eruditorum veröffentlicht. Er benannte die Kurve nach dem lateinischen Wort "lemniscus" (hängendes Band). Allerdings erkannte er nicht, dass ein Spezialfall der Cassini-Kurven (1680 veröffentlicht) vorlag.

Die speziellen Kurvenigenschaften wurden von Giovanni Fagnano 1750 entdeckt. Eulers Untersuchungen zur Kurvenlänge (1751) führte später zu einer Arbeit über elliptische Funktionen.



Für die Lemniskate gilt $r_1 r_2 = e^2$.

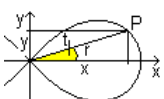
Die Punkte, deren Produkt der Entfernungen von den festen Punkten F_1 und F_2 gleich dem Quadrat der halben Entfernung der Punkte ist, liegen auf einer Kurve, der Lemniskate.

Nach dem Kosinussatz ist $r_1^2 = r^2 + e^2 - 2re \cos(t)$ und $r_2^2 = r^2 + e^2 - 2re \cos(180^\circ - t)$ oder $r_2^2 = r^2 + e^2 + 2re \cos(t)$.

Daraus folgt $r_1^2 r_2^2 = (r^2 + e^2)^2 - 4r^2 e^2 \cos^2(t)$.

Wegen $r_1 r_2 = e^2$ ist $(r^2 + e^2)^2 - 4r^2 e^2 \cos^2(t) = e^4$ oder mit e ungleich 0 ist $r^2 = 4e^2 \cos^2(t) - 2e^2$.

Mit $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ ist $r^2 = 2e^2 \cos(2t)$ qed.



Herleitung der Koordinatengleichung

Es gilt allgemein $r^2 = x^2 + y^2$ und $\cos(t) = x/r$. Setzt man diese Terme in $r^2 = a^2 \cos^2(t) - a^2$ ein, ergibt sich

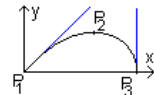
$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Erste Ableitung: $y' = dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt) = y'(t) / x'(t)$.

$x(t) = a \sqrt{[\cos(2t)]} \cos(t) \rightarrow x'(t) = -a \sin(2t) \cos(t) / \sqrt{[\cos(2t)]} - a \sin(t) \sqrt{[\cos(2t)]}$
 $= -a \sin(3t) / \sqrt{[\cos(2t)]}$

$y(t) = a \sqrt{[\cos(2t)]} \sin(t) \rightarrow y'(t) = -a \sin(2t) \sin(t) / \sqrt{[\cos(2t)]} + a \cos(t) \sqrt{[\cos(2t)]}$

$$y' = y'(t)/x'(t) = -\cot(3t)$$

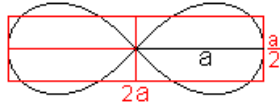


Besondere Punkte: Auf Grund der Punktsymmetrie der Lemniskate kann man sich auf den ersten Quadranten beschränken.

In P₁ ist ein Wende- und Knotenpunkt mit der Steigung 1 bzw. -1.

P₂ ist ein Hochpunkt mit $r = 30^\circ$ und den Koordinaten $x_2 = \sqrt{6}/4$ und $y_2 = \sqrt{2}/4$.

P₃ ist ein Punkt mit $x_3 = a$ und einer vertikalen Tangente.



Flächeninhalt

Die Lemniskate schließt zwei Flächenstücke ein. Für den Flächeninhalt im 1. Quadranten gilt

$$A' = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{4} [\sin(2t)]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}$$

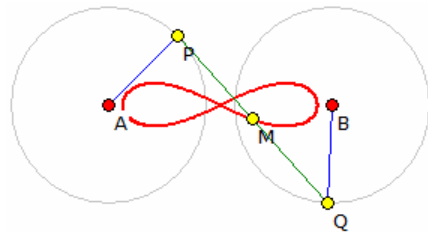
Da die Lemniskate punktsymmetrisch ist, gilt für die gesamte Fläche $A = a^2$.

Länge

Bei der Bestimmung der Länge der Lemniskate gelangt man zur Formel $u = 4 \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{1-(r/a)^2}}$. Diese Integral ist als elliptisches Integral nur näherungsweise zu lösen. Für $a = 1$ ergibt sich $u = 5,244...$

Auch die Lemniskate wird für esoterischen Blödsinn missbraucht. Dort steht sie als das "Symbol der Vollendung", des "ewigen Auf und Ab".

Auch auf zwei Tarotkarten ("Der Magier" und "Die Kraft") ist eine Lemniskate abgebildet. Hier soll sie als Sinnbild des ständigen Austauschs zwischen den zwei esoterischen Welten, des Makrokosmos und Mikrokosmos, stehen. In der Symbolik der Freimaurer ist sie ein Zeichen für die weltweite Bruderkette.



Erzeugung einer Lemniskate

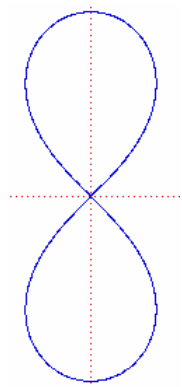
Eine Lemniskate entsteht, wenn die Endpunkte einer Strecke sich auf zwei Kreisen bewegen. Die Lemniskate wird dann von dem Mittelpunkt der Strecke beschrieben.

Diese Eigenschaft wird auch zur mechanischen Konstruktion der Lemniskate genutzt.

Der mittlere Teil einer so erzeugten Kurve ist fast gerade. Daher benutzte James Watt (1736-1819) bei seiner Dampfmaschine ein

solches Gestänge, um eine Drehung in eine geradlinige Bewegung zu verwandeln.

Noch heute wird es in manchen PKWs bei der Aufhängung der Hinterachse eingesetzt, damit die Achse beim Federn nur auf und ab, aber nicht seitwärts schwingt.



Lemniskaten-Konstante

Ist $s = 1/\sqrt{(2\pi)} [\Gamma(1/4)]^2 = 5,244115108584239620929679179782...$

die Bogenlänge einer Lemniskate mit $a = 1$, so versteht man unter der Lemniskaten-Konstante

$$L = \frac{1}{2} s = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} = 2,6220575542921198...$$

1937 bewies T. Schneider, dass L eine transzendente Zahl ist.

Mitunter werden

$$L_1 = \frac{1}{2} L = 1,311028777...$$

als erste Lemniskaten-Konstante und $L_2 = \frac{1}{2} M = 1/(2G) = 0,5990701173...$

als zweite Lemniskaten-Konstante bezeichnet. Dabei ist M die reziproke Gauß-Konstante G.

1964 veröffentlichte D.H. Lehmer in "The Lemniscate Constant" mehrere Dezimalstellen von L:

2,62205 75542 92119 81046 48395 89891 11941 36827 54951 43162 31628 16821 70380 07905
87070 41425 02302 95532 96142 90934 46135 75267 17832 18055 60895 69013 93935 69470 11194
34775 23584 04226 41497 16490 69519 36899 97993 21460 72383 12139 08102 06221 89742 96008
56554 53977 23053 69549 71028 88883 25525 ...

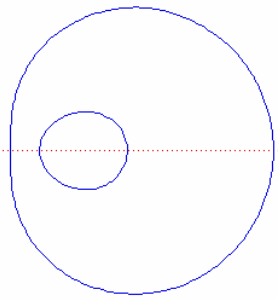
Die ersten 400 Ziffern der Lemniskaten-Bogenlänge s sind

5,24411 51085 84239 62092 96791 79782 23882 73655 09902 86324 63256 33643 40760 15811
74140 82850 04605 91065 92285 81868 92271 50534 35664 36111 21791 38027 87871 38940 22388
69550 47168 08452 82994 32981 39038 73799 95986 42921 44766 24278 16204 12443 79485 92017
13109 07954 46107 39099 42057 77766 51052 97404 26580 24195 08166 62571 37023 45950 44584
28593 38486 10279 36912 91107 88657 62830 76266 34702 16818 45262 42649 53335 26682 90199
77206 85884 29584 49428 97592 78157 ...

Cartesisches Oval, Kartesianisches Oval

Kartesische Koordinaten: $((1-m^2)(x^2+y^2) + 2m^2 cx + a^2 - m^2c^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

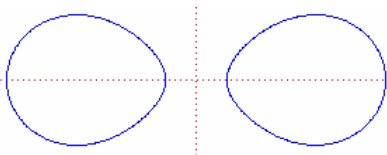
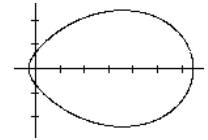
Die Kurve besteht aus zwei getrennten "Ovalen". Diese Kurve entsteht aus den Punkten P, deren Abstände s und t von zwei festen Punkten S und T die Beziehung $s + mt = a$ erfüllen. Ist c die Entfernung der Punkte S und T gilt obige Gleichung.



Eine weitere mechanische Konstruktionsmöglichkeit der Kurve stammt von J.Hammond (1878). Dabei werden zwei Räder unterschiedlicher Radien aufeinander drehbar befestigt. Über diese wird ein Faden mit einem Bleistift straff gespannt. Wird der Bleistift nun verschoben ändert sich die Fadenlänge zu einem Rad. Durch die Drehung dieses Rades wird das andere ebenfalls bewegt und dessen Fadenlänge verändert. Das Verhältnis der zwei Radien beeinflusst dann die Form des Ovals.

Erstmals wurde die Kurve 1637 von Descartes diskutiert und somit "Oval von Decartes" genannt. In seiner Klassifikation kubischer Kurven schreibt Newton über das Cartesische Oval.

Ist $m = a/c$ wird die Kurve zur Pascalschen Schnecke. Ersetzt man $m = 2.2$ und $c = 5, a = 12$, so ergibt sich eine Eiform.



Cassini-Oval

Kartesische Koordinaten: $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) - a^4 + c^4 = 0$

Das Cassini-Oval ist der geometrische Ort aller Punkte P, derart dass das Produkt der Entfernung von zwei festen Punkten S und T gleich der Konstante c^2 ist.

Ist $c > a$, so besteht die Kurve aus zwei getrennten Ovalen. Für $c < a$ ergibt sich eine einzelne Schleife, für $c = a$ die Lemniskate von Bernoulli.

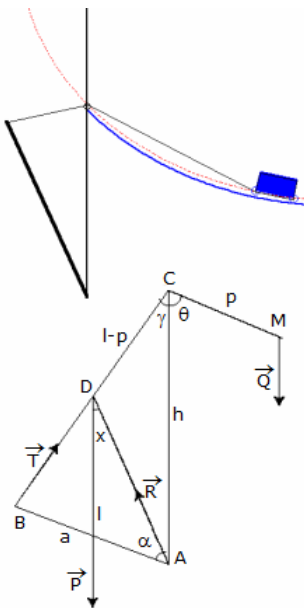
Cassini gab diese Kurve 1680 als erster an (14 Jahre bevor Bernoulli die Lemniskate studierte), als er die relative Bewegung von Erde und Sonne untersuchte.

Nach der Vorstellung Cassinis bewegt sich die Sonne auf einem dieser Ovale um die Erde. Das Kopernikanische Weltmodell akzeptierte Cassini trotz der Entdeckungen Galileis und Keplers nicht.

Ist $a < c$ so wird für die eingeschlossene Fläche

$$A = a^2 + c^2 E(a^4 / c^4)$$

wobei $E(x)$ das vollständige elliptische Integral 2.Art ist. Für $a = c$ wird $A = 2a^2$ (Fläche der Lemniskate).



Zugbrückenkurve

franz. courbe du pont-levis, engl. drawbridge curve
Die Kurve wurde von Bernard Forest de Bélidor erstmals intensiv untersucht. Eine Zugbrücke wird über ein Seil mit einem Gegengewicht verbunden. Dieses Gegengewicht soll sich auf der gesuchten Kurve so bewegen, dass sich Zugbrücke und Gegengewicht im ständigen Gleichgewicht befinden. Diese Kurve kann nicht linear sein, da sich bei Hochklappen der Zugbrücke, deren wirksame Gewichtskraft geringer wird. Es zeigt sich, dass die Kurve ein Teil eines Cartesischen Ovals ist.

Größen: $a = AB$... Länge der Zugbrücke, $l = BC+CM$... Länge des Seils, P ... Gewichtskraft der Zugbrücke, Q ... Gewichtskraft des Gegengewichtes
Die potentielle Energie des Systems muss konstant sein, d.h.

$$P/2 a \cos \alpha - Q \rho \cos \theta = E$$

über den Kosinussatz ergibt sich

$$(l - \rho)^2 + 4h Q/P \rho \cos \theta = a^2 + h^2 - 4h E/P$$

Vereinfacht erhält man eine Cartesisches Oval, konkret die Pascalsche Schnecke $\rho = 2l - 4h Q/P \cos \theta$ mit $l^2 = a^2 + h^2 - 4h E/P$

Perseus-Kurve

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2Ax^2$

$- 2By^2 + C = 0$, wobei $A > B$ sein muss.

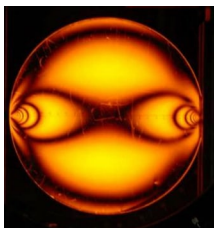
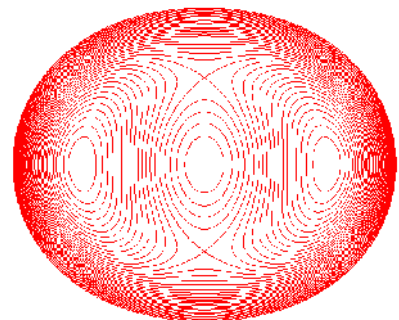
Polargleichung

$$\rho^2 = A \cos^2\theta + B \sin^2\theta \pm \sqrt{(A \cos^2\theta + B \sin^2\theta)^2 - C}$$

Für $B = -A$ wird die Kurve zu einem Cassinischen Oval, für $C = 0$ zur

Bernoullischen Lemniskate.

Eine diametral geladenen Metallscheibe liefert unter monochromatischen, polarisierten Licht ein Bild, das einer Perseus-Kurve entspricht.



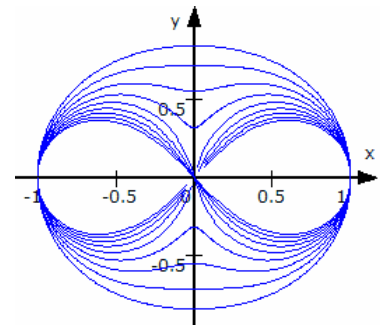
Lemniskate von Booth

Durch J.Booth (1810-1878) wurde diese Kurve intensiv studiert, und daher nach ihm benannt. Mitunter wird die Kurve auch griechisch Hippopede genannt, was "Pferdefuß" bedeutet. Dieser Name geht auf Proclus (75 v.u.Z.) und Eudoxus zurück, die als erste über die Kurve schrieben.

Die Kurve hat drei verschiedene Formen. Für verschiedene Parameter a entsteht

- $a < 1/2$ ein Oval
- $1/2 < a < 1$ ein eingebuchtetes Oval
- $a > 1$ eine Acht-Kurve

Für $a < 1$ wird die Kurve Oval von Booth genannt, für $a > 1$ Lemniskate von Booth. Für $a = 2$ entsteht die Lemniskate von Bernoulli.
 Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = b x^2 + y^2$ mit $b = 1 - a$
 Die Kurve ist eine rationale Kreisquartik.



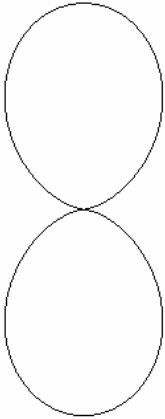
Doppel-Ei

Die Doppel-Ei-Kurve wurde 1894 von Münger eingeführt.

Polargleichung $\rho = a \cos^2 \theta = a/2 \cos 2\theta + a/2$

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4$

Die Doppel-Ei-Kurve kann durch Abrollen einer Ellipse auf einem Vierblatt erzeugt werden.



Die Doppel-Ei-Kurve entsteht bei der Inversion der Kampyle des Eudoxos am Kreis. Die magnetische Feldlinien eines magnetischen Dipols bilden sich in der Form eines Doppel-Eis aus.

Ein Fahrzeug mit Rädern in Form eines Doppel-Eis kann auf einer Straße mit Zykloidenbögen fahren. (Animation von Alain Esculier)

Eine zweite Gleichung zur Erzeugung eines Doppel-Eis ist $r(t) = e^{\cos(2t)} \cos^2(t)$; Hortsch 1990. Die Gleichung $x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4 - x^3 - 6x^2 - xy^2 = 0$ ergibt ebenfalls ein Doppel-Ei.

Dipol-Kurve

Polargleichung $\rho^2 = a^2 \cos \theta$

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^3 = a^4 x^2$

Die Dipol-Kurve beschreibt die Äquipotentiallinien eines elektrostatischen Dipolfeldes.

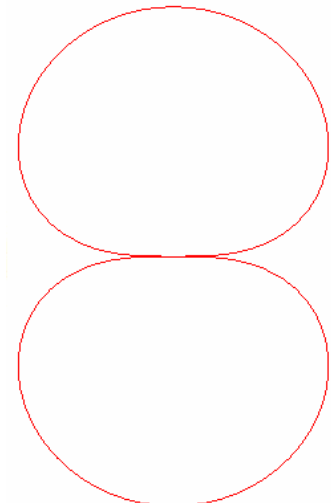
Sind A und B die elektrischen Ladungen auf der x-Achse, so gilt für

Äquipotentiallinien $1/MA - 1/MB = \text{konstant}$
 $1/MA - 1/MB = (MB^2 - MA^2) / (MA MB (MA + MB))$

Dies entspricht $AB \cdot OM / \rho^3 = AB/\rho^2 \cos \theta$

und somit der Kurvengleichung.

Die Dipolkurve kann als Gleitkurve einer Bernoullischen Lemniskate auf einer Geraden erzeugt werden.



Clairaut-Kurven

Als Clairaut-Kurven wird eine Gruppe von mathematischen Kurven bezeichnet, die durch die Gleichung

$r = a \sin^n \theta$

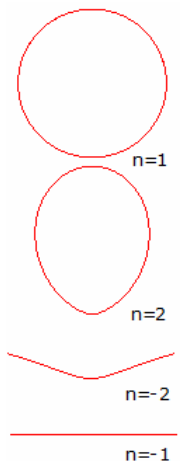
erklärt werden können, wobei n eine reelle Zahl ist. Ist n rational, so sind die Kurven algebraisch.

Diese Kurven wurden erstmals 1726 von Alexis-Claude Clairaut untersucht.

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^{(n+1)/2} = a y^n$

Für verschiedene n entstehen bekannte Kurven.

- $n = 1$... Kreis ; $n = 2$... Doppel-Ei ; $n = 3$... Folium ; $n = 1/2$... Dipolkurve ; $n = -1$... Gerade $y=a$; $n = -2$... Kampyle des Eudoxos ; $n = -3$... Verdopplungskubik ; $n = -1/2$... Kùlpsche Quartik ; $n = -1/3$... Kurve der Agnesi ; $n = -2/3$... Roche-Kurve ; ...



Cayley's Sextic

Kartesische Koordinaten

$4(x^2 + y^2 - ax)^3 = 27 a^2 (x^2 + y^2)^2$

Polarkoordinaten $r = 4a \cos^3(\theta/3)$

Parameterdarstellung $x(t) = 4a \cos^4(t/2) (2 \cos t - 1)$

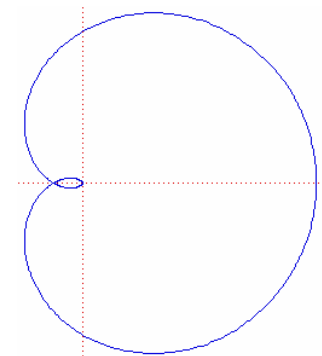
$y(t) = 4a \cos^3(t/2) \sin(3/2 t)$

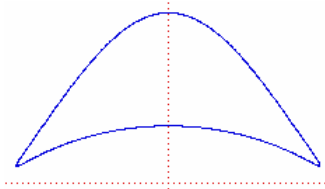
Diese Kurve wurde von MacLaurin 1718 entdeckt und von Cayley intensiv untersucht. Die Evolute der Kurve ist die Nephroide.

Der Name wurde erstmals von R.C.Archibald 1900 in einer Klassifizierung von Kurven genutzt.

Für den Parameter $a = 1$ ergibt sich

- Bogenlänge $3(t + \sin t)$
- Krümmung $1/3 \sec^2(t/2)$
- Tangentialwinkel $2t$





Doppelhorn-Kurve, Bicorn-Kurve

Kartesische Koordinaten:

$$y^2 (a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a)^2$$

Parameterdarstellung

$$x = a \sin t$$

$$y = a \cos^2 t (2 + \cos t) / (3 + \sin^2 t)$$

Die Kurve gehört zu einer Gruppe von algebraischen Kurven 4. Grades, welche 1864 von Sylvester untersucht wurde. Weitere Veröffentlichungen

finden sich 1867 bei Cayley.

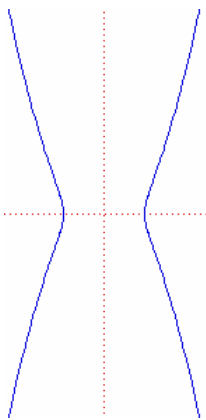
Krümmung der Kurve $\kappa = 6 \sqrt{2} (\cos t - 2)^3 (3 \cos t - 2) \sec t / [a (73 - 80 \cos t + 9 \cos (2t))^{3/2}]$

Konstruktionsmöglichkeit:

Gegeben sind zwei sich tangential berührenden Kreise C1 und C2 gleichen Radius. Q sei ein Punkt auf C1 und R dessen Projektion auf die y-Achse.

m ist die inverse Polare von C1 bezüglich Q. Dann ist die Doppelhornkurve die Menge der Punkte P, die Schnittpunkte von m und QR sind.

Die Doppelhorn-Kurve kann auch als Ortsmenge aller Höhenschnittpunkte eines Dreiecks konstruiert werden. Das Dreieck hat eine feste Seite AB = c, während der dritte Punkt auf einem Kreis mit dem Radius c/2 abläuft.



Kampyle des Eudoxos

Kartesische Koordinaten: $a^2 x^4 = b^4 (x^2 + y^2)$

Polarkoordinaten $r = b^2 / (a \cos^2(\theta))$

Eudoxos (406-355 v.u.Z.), ein Schüler Platons, untersuchte diese Kurve während seiner Studien zur Quadratur des Kreises. Die Kurve wird auch Clairauts Kurve genannt.

Ein "Rad", das seitlich von Kampylen abgeschlossen wird, kann auf einem Weg, der durch Parabelbögen gebildet wird, gleitend abrollen.

Hat die Kampyle die Gleichung $r = 1/(a \cos^2(\theta))$, so gilt für die Parabeln

$$ay = -(a^2 + x^2).$$

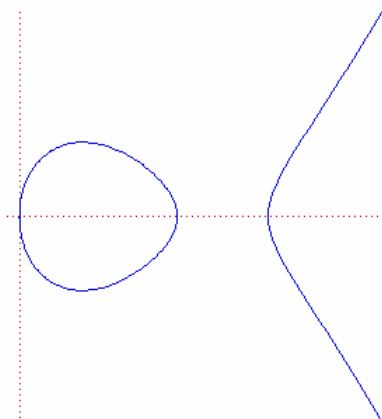
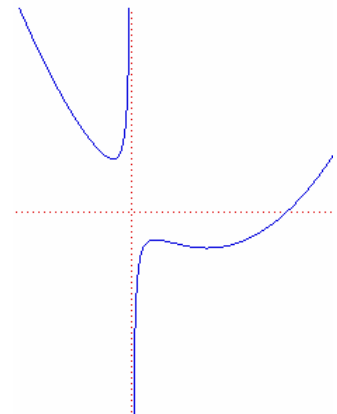
Newtons Dreizackkurve

Kartesische Koordinaten:

$$x y = c x^3 + d x^2 + e x + f$$

Diese Kurve wurde zuerst von Newton und Descartes untersucht. Mitunter spricht man der "Parabel von Descartes"; allerdings ist die Kurve keine Parabel. Der Name "Dreizack" wurde von Isaac Newton gegeben. Erstmals veröffentlicht wurden Newtons Ergebnisse 1710 im "Lexicon Technicum" von John Harris.

Auf Grund der Parameter c, d, e und f existieren 72 verschiedene Grundtypen der Kurve.



Newtonsche Parabel

Kartesische Koordinaten:

$$a y^2 = x (x^2 - 2bx + c); a > 0$$

Newtons Klassifizierung kubischer Kurven wurde 1710 durch John Harris in London veröffentlicht. Dabei gab Newton vier Klassen an:

- (1) Alle Wurzeln sind reell und verschieden. Dann sind die Kurven "glockenförmige" Parabeln mit einem Oval (siehe Abbildung)
- (2) Zwei Wurzeln sind gleich. Die Parabel berührt das Oval.
- (3) Drei Wurzeln sind gleich. Es entsteht die Neilsche Parabel.
- (4) Es existiert nur eine reelle Wurzel. Es entsteht eine einzelne "glockenförmige" Parabel.

Über den dritten Fall sagt Newton selbst:

"In the third Case the Equation was $yy =$

$ax^3 + bxx + cx + d$ and defines a Parabola whose Legs diverge from one another, and run out infinitely contrary ways."

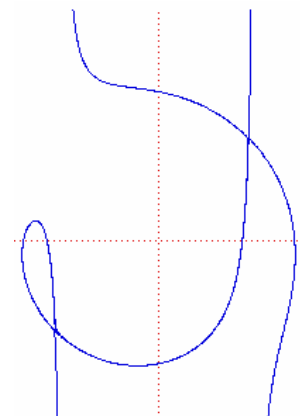
Dürers Muschelkurve

Kartesische Koordinaten:

$$(x^2 + xy + ax - b^2)^2 = (b^2 - x^2) (x - y + a)^2$$

Die Kurve wird von Dürer 1525 erstmals in seinem Werk "Vnderweysung der messung mit dem zirckel vnd richtscheyt" beschrieben.

Dürer nannte die Kurve "ein muschellini", in Anlehnung an eine Konchoide. Der zweite Kurvenast wurde von Dürer nicht entdeckt.

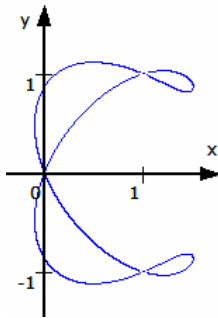


Spezialfälle

$a = 0$: zwei Geraden $x = b/\sqrt{2}$ und der Kreis $x^2 + y^2 = b^2$

$a = b/2$: Kurve hat Spitze bei $(-2a ; a)$

$b = 0$: zwei Geraden



Ampersand-Kurve

Die Ampersand-Kurve ist eine ebene Kurve 4. Grades mit der Gleichung

$$(y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(x^2 + y^2 - 2x)^2$$

Sie besitzt drei gewöhnliche Doppelpunkte bei $(1, -1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Die duale Kurve ist vom 6. Grade.

Polargleichung

$$r^2(2 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 9) - r(37 \cos \theta + 5 \cos 3\theta) + (22 \cos 2\theta + 16) = 0$$

Die eingeschlossene Fläche A beträgt etwa 1,06656, der Umfang 9,19756.

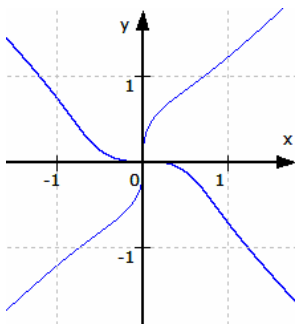
Die horizontalen Asymptoten liegen bei

$$\left[\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{5} \right],$$

$$\left[\frac{1}{120}(159 - \sqrt{201}), \pm \frac{1}{40} \sqrt{(1389 + 67 \sqrt{(67/3)})} \right]$$

$$\left[\frac{1}{120}(159 + \sqrt{201}), \pm \frac{1}{40} \sqrt{(1389 - 67 \sqrt{(67/3)})} \right]$$

die vertikalen Asymptoten bei $\left[-\frac{1}{10}, \pm \frac{1}{10} \sqrt{23} \right]$ and $\left[\frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} \right]$



Cundy-Rollett-Kurve, Swastika-Kurve

Durch die englischen Mathematiker H.Cundy und A.P.Rollett wurde eine Kurve 4. Ordnung mit der Gleichung $y^4 - x^4 = xy$

1989 als Swastika-Kurve bezeichnet.

Polargleichung

$$r^2 = \tan(2\phi)/2$$

$$r^2 = \sin \phi \cos \phi / (\sin^4 \phi - \cos^4 \phi)$$

Mit der Namensvergabe wird dabei auf die Ähnlichkeit des Kurvenbildes mit dem bekannten Kreuzsymbol mit abgewinkelten oder gebogenen Armen angespielt.

Derartige Symbole wurden seit 6000 Jahren in Europa und Asien verwendet.

Zum Beispiel findet man in Indien an vielen Tempeln die Darstellung der

Swastika. Im Hinduismus wird dieses Zeichen, rechtsdrehend, als Symbol für glückbringende Dinge genutzt.

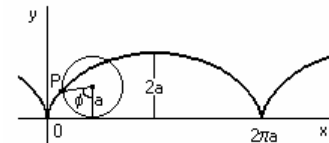
Die deutschen Faschisten übernahmen 1920 ein auf der Spitze stehendes, nach rechts gewinkelt Hakenkreuz als Symbol. Auf Grund der unmenschlichen Verbrechen der Nazis und ihrer Helfer aus Militär, Politik, Industrie und Adel ist die Verwendung hakenkreuzförmiger Symbole in Deutschland, Österreich und anderen Staaten verboten.

Nach § 86 Abs. 3 StGB dürfen derartige Symbole nur gezeigt werden, wenn es "der staatsbürgerlichen Aufklärung, der Abwehr verfassungswidriger Bestrebungen, der Kunst oder der Wissenschaft, der Forschung oder der Lehre, der Berichterstattung über Vorgänge des Zeitgeschehens oder der Geschichte oder ähnlichen Zwecken dient".

In diesem Programm wird die Swastika-Kurve als mathematische Kurve 4. Grades erwähnt und mit Cundy-Rollett-Kurve bezeichnet.

Gewöhnliche Zykloide

Ein Punkt eines Kreises, der auf einer Geraden, ohne zu gleiten, abrollt, beschreibt eine gewöhnliche Zykloide.



Geschichte

- auch Rollkurve oder Radkurve genannt

- 1599 von Galilei untersucht und benannt; er versuchte an Hand von Metallstücken in der Form einer Zykloide die Fläche unter der Kurve zu bestimmen; erste Studien gehen schon auf Charles Bouvelles 1501 zurück, der Name stammt vom griechischen „kuklos“ = „Kreis“

- der Wert der Fläche wurde erstmals von Torricelli und später von Fermat und Descartes angegeben

- Roberval (1634) und Wren (1658) ermittelten die Länge eines Zykloidenbogens

- 1692 zeigte Jakob Bernoulli, dass die Zykloide die Kataustik eines Kreises ausgehend von einem Punkt auf der Kreisperipherie ist

- 1696 wies Johann Bernoulli nach, dass die Zykloide das Brachistochron-Problem löst

- Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli und l'Hospital bewiesen, dass auch das Tautochron-Problem durch Zykloiden lösbar wird

Parameterdarstellung $x = a(t - \sin t)$

$$y = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2(t/2)$$

Explizite Darstellung $x = a \arccos[(a-y)/a] - \sqrt{y(2a-y)}$, $a > 0$

Komplexe Gleichung $z = a(t + i - i e^{-it})$

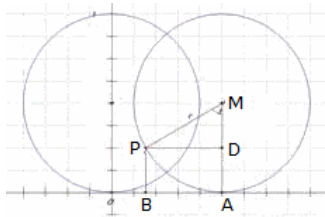
Differentialgleichung $y' = \pm \sqrt{(2a-y)/y}$

Periode $= 2\pi a$

Länge eines vollen Bogens $= 8a$

Fläche unter einem vollen Bogen = $3\pi a^2$
 Krümmungsradius $\rho = 4a \sin t/2$
 Bogenlänge $s = 8a \sin^2(t/4)$
 Krümmung $\kappa = -a/4 \csc(t/2)$

Evolute und Involute einer Zykloide sind eine kongruente, aber um einen halben Bogen verschobene Zykloide.



Zykloidengleichung

Zur Herleitung der Zykloidengleichung beachtet man, dass bei jeder vollen Umdrehung sich die Länge des Kreisumfanges auf der x-Achse abträgt. Für den Drehwinkel $t = 2\pi$ erhält man damit die Länge $2\pi r$. Für ein allgemeines t also $t \cdot r$.

Bekannt sind t und r . Benötigt wird ein Punkt mit x- und y-Koordinate für die Parameterform. Dazu wird der Punkt P in der Abbildung betrachtet.

Der x-Wert von P ist OB. Dieser kann mit der Differenz $OB = OA - BA$ ausgedrückt werden. OA und BA sind bekannt und können folgendermaßen berechnet werden:

OA ist die Strecke, die der Kreis auf der x-Achse abrollt und berechnet sich, wie oben gezeigt, mit $t \cdot r$.

BA ist gleich PD und kann über das rechtwinklige Dreieck mit $\sin t = BA/r$ berechnet werden.

Daraus ergibt sich für den x-Wert die Gleichung: $x = r \cdot t - r \sin t$

Ähnlich wird bei der Berechnung des y-Wertes vorgegangen. Gesucht wird die Strecke BP. Diese ist gleich der Strecke AD und berechnet sich aus der Differenz von AM und DM.

AM ist der Radius r . DM ergibt sich im rechtwinkligen Dreieck aus $\cos t = DM/r$ und somit

$$y = r - r \cos t$$

Zykloidenfläche

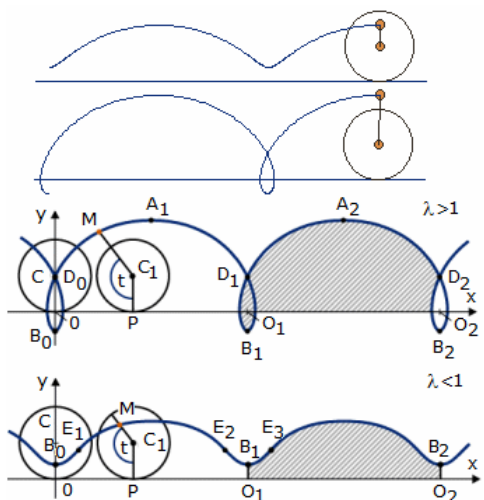
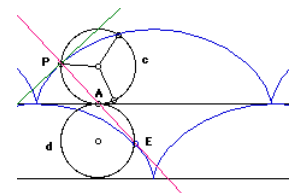
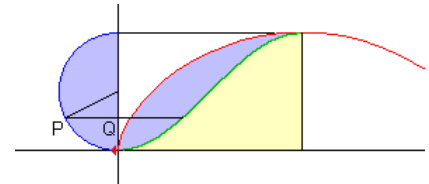
Die Fläche unter einem Kurvenbogen ergibt sich durch Integration:

$$A = \int y \, dx = \int y \, dx/dt \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = 3a^2\pi.$$

Das ist das Dreifache der Fläche des erzeugenden Kreises.

Dieses Ergebnis erhielt Roberval (1602 - 1675) ohne Integralrechnung, indem er die Bewegung des Punktes P in zwei Bewegungen zerlegte: die Drehung von P um den Kreismittelpunkt und die Bewegung von Q, der Projektion von P auf den senkrechten Kreisdurchmesser. Bei einer halben Umdrehung des Rades beschreibt der Punkt P einen Halbkreis mit der Fläche $a^2\pi/2$, der Punkt Q eine Sinuskurve. Die Fläche unter dieser Kurve ist aus Symmetriegründen halb so groß wie das umschriebene Rechteck, also $2a \cdot a\pi/2 = a^2\pi$.

Roberval zerlegt die Halbkreisfläche in schmale, horizontale Streifen (Indivisiblen), die er nach rechts bis zur Sinuskurve verschiebt. Die beiden blauen Flächen sind somit gleich groß. Die gesamte Fläche unter der Zykloide beträgt daher $A = 3a^2\pi/2$. Die Indivisiblenmethode ist eine Vorläuferin der Integralrechnung. Sie stammt von Cavalieri, wurde aber auch von Roberval selbständig entdeckt.



Verkürzte oder verlängerte Zykloide (Trochoide)

Der erzeugende Punkt liegt innerhalb bzw. außerhalb des abrollenden Kreises im Abstand c vom Kreismittelpunkt $c < a$... verkürzte, $c > a$ verlängerte Zykloide

Die Gleichung der Trochoiden in Parameterform lautet mit a als Radius des Kreises
 Parameterdarstellung

$$x = at - c \sin t ; y = a - c \cos t$$

wobei t der Winkel $\angle MC_1P$ ist. Wegen $c = C_1M$ bestimmt $c > a$ die verlängerte Zykloide und $c < a$ die verkürzte.

Die Periode der Kurven ist $OO_1 = 2\pi a$. Die Maxima liegen bei $A_1, A_2, \dots, A_k = [(2k + 1)\pi a, (1 + c)a]$, die Minima bei $B_0, B_1, \dots, B_k = [2k\pi a, (1 - c)a]$.

Die verlängerte Zykloide besitzt bei $D_0, D_1, \dots, D_k = [2k\pi a, a(1 - \sqrt{c^2 - t_0^2})]$ Doppelpunkte, wobei t_0 die kleinste positive Wurzel der Gleichung $t = c \sin t$ ist.

Die verkürzte Zykloide besitzt Wendepunkte bei $E_1, E_2, \dots, E_k = [a(\arccos c - c\sqrt{1-c^2}), a(1-c^2)]$.

Die Länge eines Zyklus berechnet sich zu

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + c^2 - 2c \cos t} \, dt$$

Die in der Abbildung schraffiert gezeichnete Fläche beträgt

$$A = \pi a^2 (2 + c^2)$$

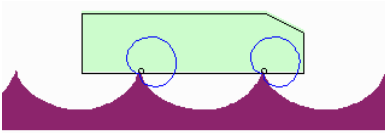
Für den Krümmungsradius erhält man

$$r = a(1 + c^2 - 2c \cos t)^{3/2} / (c(\cos t - c))$$

in den Maxima $r_A = -a(1+c)^2/c$

und in den Minima

$$r_B = a(1-c)^2/c.$$

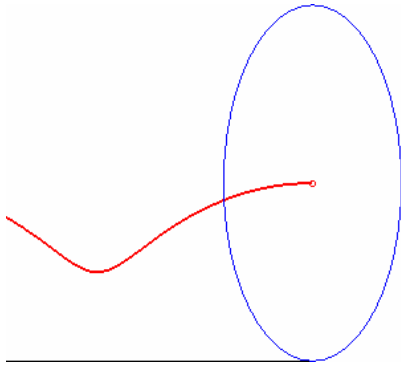


Ein Fahrzeug könnte sich auf einer Straße in Zykloidenform völlig waagrecht bewegen. Allerdings müssten die Räder Kardioiden sein. Eine Bahnkurve in Form einer Zykloide ergibt sich, wenn ein Teilchen der Masse m und der elektrischen Ladung Q ohne Anfangsgeschwindigkeit in einem elektrischen Feld zu dem ein

magnetisches Feld senkrecht ausgerichtet ist, bewegt. Diese Zykloide steht senkrecht zum magnetischen Feld und besitzt die Gleichungen

$$x = v/\omega (\omega t - \sin(\omega t)) \quad y = v/\omega (1 - \cos(\omega t))$$

wobei $v = E/B$ die Durchschnittsgeschwindigkeit und $\omega = QB/m$ sind. E und B sind die Feldstärken der zwei Felder.



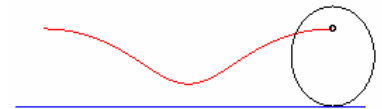
Sturmsche Rollkurve

Rollt eine Ellipse auf einer Geraden ab, so beschreibt der Mittelpunkt der Ellipse eine Sturmsche Rollkurve. Diese Kurve wurde erstmals 1841 von dem französischen Mathematiker Charles-François Sturm untersucht.

Differenzialgleichung $(dy/dx)^2 = (a^2 - y^2)(y^2 - \varepsilon b^2) / y^4$
für $\varepsilon = 1$ ergibt sich die Rollkurve der Ellipse, für $\varepsilon = -1$ die analoge Kurve für den Mittelpunkt einer Hyperbel.
Kartesische Gleichung $x = \pm \int_0^y u^2 / \sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - \varepsilon b^2)} du$

Allgemeine Rollkurve

Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so beschreibt ein Punkt auf der Kreisperipherie eine Zykloide. Auch andere Kurven, außer dem Kreis, können auf einer Geraden abrollen.



Erstmals wurde dies 1869 durch Besant untersucht.

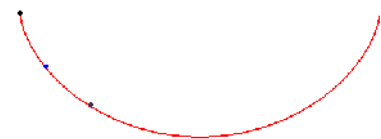
Zum Beispiel beschreibt der Brennpunkt einer Ellipse während des Abrollens eine Rollkurve nach Delaunay.

Beschreibt $p_0 = f(\theta_0)$ die abrollende Kurve, so ergibt sich die Rollkurve zu

$$x = \int f(t)/f'(t) dy/dt dt \quad y = f(t) / \sqrt{(f^2(t) + f'^2(t))}$$

Für verschiedene rollende Kurven ergibt sich:

- Punkt im Inneren eines Kreises → Trochoide
- Brennpunkt einer Ellipse → Rollkurve von Delaunay
- Brennpunkt einer Parabel → Kettenlinie
- Mittelpunkt einer Ellipse → Sturmsche Rollkurve
- Brennpunkt einer Tschirnhausen-Kurve → Parabel
- Mittelpunkt einer hyperbolischen Spirale → Traktrix
- Mittelpunkt eines Tricuspoide → Ellipse
- Mittelpunkt einer logarithmischen Spirale → ansteigende Gerade

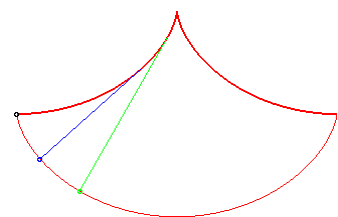


Tautochrone

Diese Kurve wurde erstmals 1673 von Huygens und 1687 von Newton untersucht. Der Name ergibt sich aus „tauto“ = „gleich“ und „chronos“ = Zeit, und drückt aus, dass ein Massenpunkt, der sich auf dieser Kurve reibungsfrei bewegt, unabhängig in welcher Höhe er startet,

stets die gleiche Zeit benötigt um wieder an den Ausgangsort zurückzukommen. Diese Kurve ist ein Teil einer Zykloide.

Skisprungschanzen werden in Form einer halben Tautochrone gebaut. Damit wird gewährleistet, dass die Skispringer, gleichgültig aus welcher Höhe sie starten, nach der gleichen Zeit zum Absprung kommen. Die Geschwindigkeit ist allerdings nicht die gleiche.



Isochrone

Schwingt ein Fadenpendel, so führt es nur dann eine durch die Sinusfunktion beschreibbare periodische Bewegung aus, wenn der Auslenkwinkel relativ klein ist. Für die Schwingungsdauer gilt dann

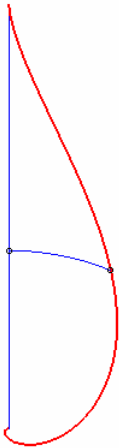
$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

Wird der Auslenkwinkel größer, so muss der Pendelfaden gekrümmt werden. er muss sich an eine Kurve anschmiegen. Diese Kurve nennt man

Isochrone.

Erstmals wurde diese Kurve von Huygens zur Konstruktion der Pendeluhr untersucht. In der Darstellung haben alle drei Pendel (rot, blau und grün) die gleiche Schwingungsdauer. Durch die wesentliche größere Auslenkung muss aber der rote Faden die Form der Isochrone annehmen. Die Isochrone ist Teil einer Zykloide.

Isochrone von Varignon



Unter der Isochrone von Varignon versteht man folgende Kurve:

Ein Massenpunkt soll sich unter dem Einfluss der Schwerkraft mit konstanter(!) vertikaler Geschwindigkeit zum Gravitationszentrum bewegen. Die zugehörige Bahnkurve, bei der die Geschwindigkeit konstant bleibt ist diese Isochrone.

Befindet sich der "Erdmittelpunkt" im Koordinatenursprung O, der Startpunkt bei $(\rho_0, 0)$ und hat der Massepunkt eine Anfangshorizontalgeschwindigkeit von Null, so wird nach

Energieerhaltung: $v^2 = 2g (\rho - \rho_0) + v_0^2$

Als Bewegungsgleichungen ergeben sich $\rho = \rho_0 - v_0 t$

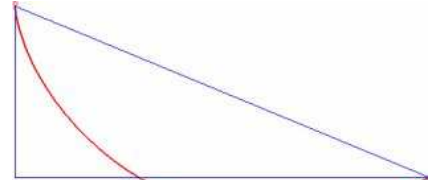
$d\theta/dt = \sqrt{2g v_0 t} / (\rho_0 - v_0 t)$ und somit

$\theta = \sqrt{2g/v_0} (-\sqrt{t} + \sqrt{(\rho_0/v_0) + \text{artanh}(\sqrt{v_0 t} / \rho_0)})$

Erstaunlich ist, dass Varignon 1699, trotz fehlerhafter Interpretation des Newtonschen Gravitationsgesetzes (1687), diese Kurve bestimmen konnte.

Brachistochrone

Durch Johann Bernoulli wurde das Problem gelöst, auf welcher Bahnkurve sich ein Massenpunkt reibungsfrei von einem oberen zu einem unteren Punkt in kürzester Zeit bewegen kann. Der Name der Kurve ergibt sich aus dem griechischen „brakhisto“ = „am kürzesten“ und „chronos“ = „Zeit“. Erstaunlicherweise muss sich der Punkt auf einer Kurve bewegen, die sogar unterhalb des Zielpunktes verläuft.



Differenzialgleichung $ds/dx = C/\sqrt{|y|}$
 Bewegungsgleichung $x = R (\theta - \sin \theta)$
 $y = R (\cos \theta - 1)$

mit $\theta = \sqrt{g/R} t$. $R = C^2/2$ ist definiert durch $a = R (\theta - \sin \theta)$, $b = R (1 - \cos \theta)$, wobei a der horizontale und b der vertikale Abstand von Start- und Zielpunkt sind. Der Körper benötigt dann die Zeit

$T = \sqrt{R/g} \theta = \sqrt{2/g} (\sqrt{a + b/(2\sqrt{a})})$

Würde sich der Punkt auf der Verbindungsgeraden bewegen, wäre die Zeit

$T_2 = \sqrt{2/g} \sqrt{(a^2 + b^2)/b}$

Die Brachistochrone ist ein Stück einer Zyklode und besitzt am Zielpunkt einen Winkel von rund 32° zur Horizontalen.

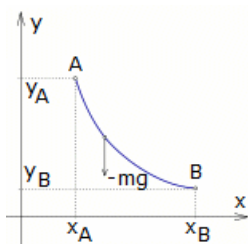
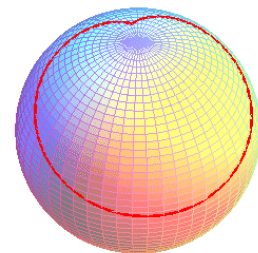
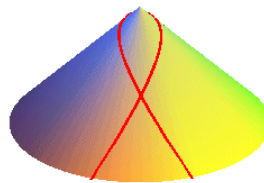
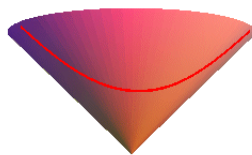
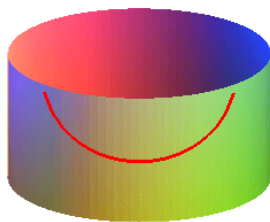
Für $a = b = 1$ m ergeben sich folgende Zeiten: $T = 0,58$ s auf der Brachistochrone, $T = 0,59$ s für eine Bewegung auf einem Kreisbogen, $T = 0,64$ s für die geneigte Ebene und $T = 0,68$ s für einen freien Fall und anschließend waagerechter Bewegung.

untere Abbildung: Modell auf der Elementa Mannheim 2005



Brachistochrone auf einer Fläche

Das Problem der Brachistochrone kann auch auf beliebige Flächen verallgemeinert werden. Die Tabelle zeigt einige derartige Kurven.



Brachistochrone (2)

Von einem Punkt $A(x_A, y_A)$ soll ein Körper sich in kürzester Zeit zu einem Punkt $B(x_B, y_B)$ bewegen. Dabei sei $y_A > y_B$ und $x_A < x_B$ vorausgesetzt. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt

$1/2 mv^2 = mg (y_A - y)$ und $v^2 = 2g (y_A - y)$

$v = ds/dt = \sqrt{1 + y'^2} dx/dt$

$dt = ds / v = \sqrt{(1 + y'^2) / (2g (y_A - y))} dx$

Die Zeit, die der Körper von A nach B benötigt, ergibt sich dann zu

$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{(1 + y'^2) / (2g (y_A - y))} dx$

Die Ermittlung der Kurve der kürzesten Zeit wird dann zu einem Problem der Variationsrechnung mit dem Funktional

$F(y, y') = \sqrt{(1 + y'^2) / (2g (y_A - y))}$

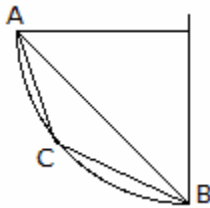
Dazu muss die Eulersche Differenzialgleichung 1.Art

$\sqrt{(1 + y'^2) / (2g (y_A - y))} - y' y' / \sqrt{2g (y_A - y)} \cdot 1/\sqrt{1 + y'^2} = C$

gelöst werden.

Mit $1 = C \sqrt{2g (y_A - y)} \sqrt{1 + y'^2}$

$K = 1 / (2g C^2)$, d.h. $K/(1 + y'^2) = y_A - y$
 und dem Ansatz $y' = \tan \phi$ ergibt sich (nach sehr anspruchsvollen Rechnungen) als Lösung
 $x = K/2 (2\phi + \sin 2\phi)$ $y = y_A - K/2 (1 + \cos 2\phi)$
 Dies sind die Gleichungen eines Zykloidenstücks.



Geschichte des Brachistochronen-Problems

Das Brachistochronen-Problem wurde im Juni 1696 von Johann Bernoulli in "Acta Eruditorum" gestellt und gelöst. Dies gilt als Geburtsstunde der Variationsrechnung.

Schon 1638 hatte sich Galilei mit dieser Aufgabe beschäftigt. Er suchte nach dem Kurvenzug um von einem Punkt A zu einem Punkt B in kürzester Zeit zu gelangen. Als Ausgangslösung fand er, dass sich ein Körper zuerst auf einer Geraden, die mit der Senkrechten in B einen Winkel von 45° bildet, bewegen muss und anschließend senkrecht weiter nach B. Danach ermittelte er, dass die Bewegung auf zwei Kreissegmenten (Abbildung) eine kürzere Zeit benötigt und schlussfolgerte (fehlerhaft), dass folglich der Kreisbogen die kürzeste Zeit liefert.

Nach Bernoulli fanden weitere bedeutende Mathematiker die korrekte Lösung, darunter Leibniz, Jacob Bernoulli, Newton, l'Hospital und Lagrange. Auch diese Aufgabe wurde von Leibniz und Newton in ihren langjährigen, unfruchtbaren Streit mit einbezogen.

In der heutigen Zeit wurde das Brachistochronen-Problem auf besondere Weise gewürdigt. Im Film "Spider Man 2" findet sich folgender Dialog:

Rosalie Octavius: You need to sleep soundly tonight.

Dr. Otto Octavius: Did Edison sleep before he turned on the light bulb? Did Marconi sleep before he turned on the radio? Did Beethoven sleep before he wrote the fifth?

Peter Parker: Did Bernoulli sleep before he found the curves of quickest descent?

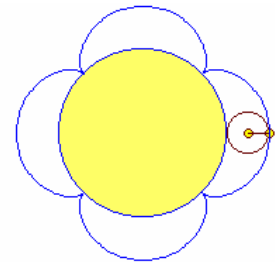
Dr. Otto Octavius: Ahhh, Rosie, I love this boy.

Allerdings muss man davon ausgehen, dass nahezu alle Kinobesucher nicht verstanden, welche besondere Aussage in diesem Dialog gemacht wurde.

Gewöhnliche Epizykloide

Die gewöhnliche Epizykloide wurde erstmals von Hipparch untersucht. Wichtige Beiträge gaben auch 1525 Dürer, 1674 Rømer und 1725 Daniel Bernoulli. Der Name ergibt sich aus "Zykloide" = "Rollkurve" und der griechischen Vorsilbe $\varepsilon\pi\iota$ = "nahe", "auf".

Der Kreis rollt auf der Peripherie eines festen Kreises ab
 a ... Radius des festen Kreises, b ... Radius des rollenden Kreises



Gleichungen

$$x = (a+b) \cos (bt/a) - b \cos [(a+b) t/a]$$

$$y = (a+b) \sin (bt/a) - b \sin [(a+b) t/a]$$

$$x = (a+b) \cos \phi - b \cos [(a+b) \phi/b]$$

$$y = (a+b) \sin \phi - b \sin [(a+b) \phi/b]$$

Komplexe Parametergleichung $mz = a ((q+t) e^{it} - e^{i(q+1)t})$

Länge eines Bogens $= 8b (a+b)/a$

Fläche zwischen einem vollen Bogen und Kreis $A = \pi b^2 (3a + 2b) / a$

Krümmungsradius $m (m+2) R_C = 4a (m+1) \sin (m/2 t)$

Länge der ganzen Kurve $l = 8(a + b)$

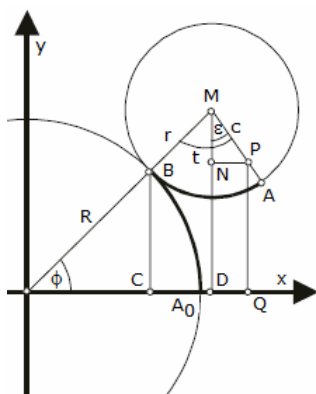
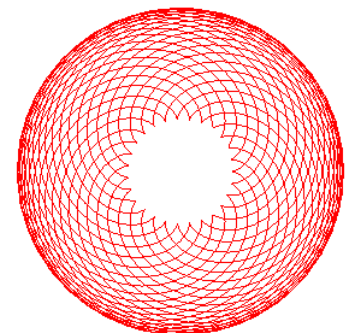
Verhältnis der Radien $m = a/b$ ist .

ganzzahlig \Rightarrow Kurve besteht aus m zusammenhängenden Bögen

rational \Rightarrow Kurve schließt sich nach einer Anzahl von Umdrehungen; sind p und q positive, zueinander relativ prime Zahlen, so schließt sich die Kurve nach q zueinander kongruenten Bögen

Epizykloiden mit einer "Spitze" sind Kardioiden, mit zwei Spitzen Nephroiden, mit 5 Spitzen Ranunculoiden.

Für $a=b$ wird die gewöhnliche Zykloide zur Herzkurve (Kardioiden).



Epizykloidegleichung

Rollt ein Kreis in der Ebene außen auf einem festen Kreis ab, so beschreibt ein fest mit dem abrollenden Kreis verbundener Punkt P eine Epizykloide. Das Abrollen soll so erfolgen, das der Mittelpunkt des abrollenden Kreises sowie der Punkt P zu Beginn der Bewegung auf der x-Achse liegt.

Größen: R ... Radius des festen Kreises, t ... Wälzwinkel (Winkel BMP), ϕ ... Drehwinkel (Winkel B0C), ε ... Winkel NMP, c ... Abstand des die Epizykloide

erzeugenden Punktes vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises

Für die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ erhält man:

$$x = OQ = OD + DQ = OD + NP = (R + r) \cos \phi + c \cdot \sin \varepsilon$$

$$y = QP = DN = DM - NM = (R + r) \sin \phi - c \cdot \cos \varepsilon$$

ϕ und ε lassen sich noch durch den Wälzwinkel t ausdrücken, denn da beide Kreise ohne zu gleiten aufeinander abrollen, muss hier gelten:

$$A_0B = BA \text{ mit: } A_0B, AB = \text{Kreisbogen}$$

$$R \cdot \phi = r \cdot t \text{ aus Bogenlänge} = \text{Radius} \cdot \text{Winkel im Bogenmaß}$$

Hieraus folgt $\phi = r/R t$

Weiterhin $t - \varepsilon = \pi/2 - \phi$; nach dem Innenwinkelsatz

$$\varepsilon = t + \phi - \pi/2 = t + r/R t - \pi/2 = (R+r)/R t - \pi/2$$

daraus kann man mit $\sin(x - \pi/2) = -\cos x$ und $\cos(x - \pi/2) = \sin x$

zu der Parameterdarstellung der Epizykloide gelangen

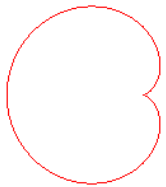
$$x = (R + r) \cos (r/R t) - c \cos ((R+r)/R t)$$

$$y = (R + r) \sin (r/R t) - c \sin ((R+r)/R t)$$

Ergibt das Verhältnis r/R der beiden Kreisradien eine rationale Zahl, so ergibt sich eine Kurve, die sich nach einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen des beweglichen Kreises schließt.

Epizykloiden

Darstellung verschiedener Epizykloiden $x = p \cos t - \cos(pt)$, $y = p \sin t - \sin(pt)$ für verschiedene Parameter p und $m = a/b$



$p = 2$



$p = 3$



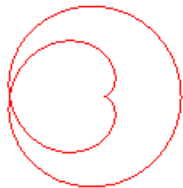
$p = 4$



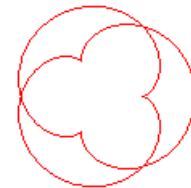
$p = 5$



$p = 6$



$m = 1/2$



$m = 3/2$



$m = 5/2$



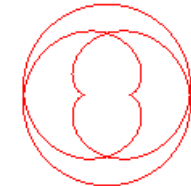
$m = 7/2$



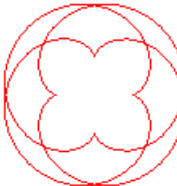
$m = 9/2$



$m = 1/3$



$m = 2/3$



$m = 4/3$



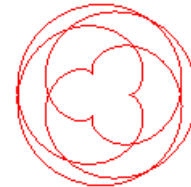
$m = 5/3$



$m = 7/3$



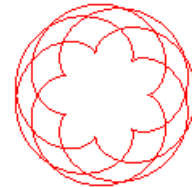
$m = 1/4$



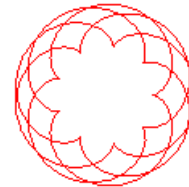
$m = 3/4$



$m = 5/4$



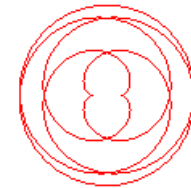
$m = 7/4$



$m = 9/4$



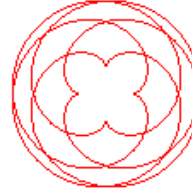
$m = 1/5$



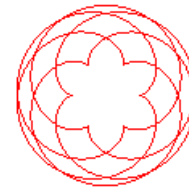
$m = 2/5$



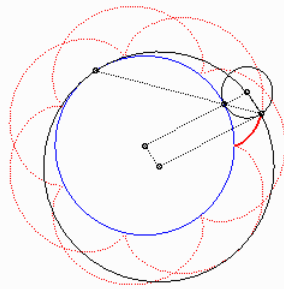
$m = 3/5$



$m = 4/5$



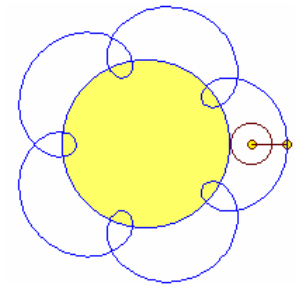
$m = 6/5$



Rollt der Kreis auf dem inneren Kreis ab, so kann man einen weiteren Kreis angeben, der zum einen den inneren Kreis berührt, zum anderen durch den Mittelpunkt des äußeren Kreises und den die Epizykloide beschreibenden Punkt verläuft.

Verkürzte und verlängerte Epizykloide

Der Punkt liegt innerhalb bzw. außerhalb der Peripherie des abrollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt



$c < b$ verkürzt, gestreckt, $c > b$ verlängert, verschlungen

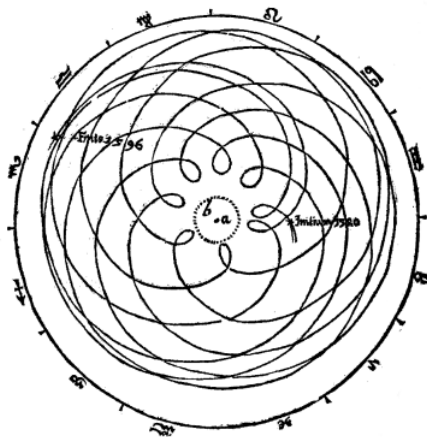
$$x = (a+b) \cos(bt/a) - c \cos[(a+b)t/a]$$

$$y = (a+b) \sin(bt/a) - c \sin[(a+b)t/a]$$

$$x = (a+b) \cos \phi - c \cos[(a+b)\phi/b]$$

$$y = (a+b) \sin \phi - c \sin[(a+b)\phi/b]$$

Ist $b=c$ liegt eine gewöhnliche Epizykloide vor. Für $a=0$ ergibt sich ein Kreis.



Diese Kurve wurde von Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), L'Hospital (1690), Jakob Bernoulli (1690), la Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725) und Euler (1745, 1781) untersucht.

In Dürers Werk "Vnderweysung der messung mit dem zirkel vnd dem richtscheyt" von 1525 nennt er die Epitrochoide "Spinnenlinie".

In dem Werk „Astronomia nova“ nutzte Johannes Kepler Epitrochoide zur Erklärung der Entwicklung der Bahn des Planeten Mars.

Die Eckpunkte des Kreisbogendreiecks in einem Drehkolbenmotor beschreiben eine Epitrochoide, welche die Form des Motorinnenraums angibt.

Epizykel des Hipparchos

Durch die antiken, griechischen Astronomen Hipparchos (180–125 v.u.Z.) und Ptolemäus (ca. 150 u.Z.) wurden spezielle Epizykloiden benutzt, um die komplizierte Bewegung der Planeten am Himmel im angenommenen geozentrischen Weltbild angenähert zu beschreiben.

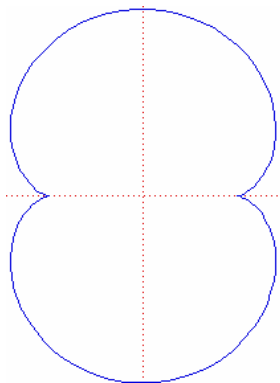
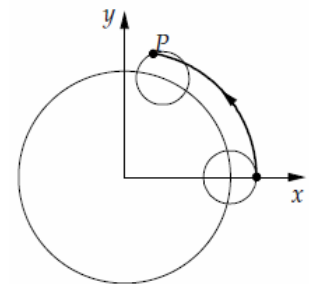
Insbesondere konnte mit diesen Konstruktionen die rückläufige Bewegung der Planeten beschrieben werden.

Parameterdarstellung in kartesischen Koordinaten

$$x = A \cos \omega t + a \cos \omega' t \quad y = A \sin \omega t + a \sin \omega' t$$

In diesen Gleichungen wird t als Zeit interpretiert. Dann beschreiben die

Gleichungen die Bewegung eines Punktes P auf einem Kreis K_2 vom Radius a . Dabei bewegt sich der Mittelpunkt von K_2 auf einem Kreis K_1 vom Radius A mit der Winkelgeschwindigkeit ω , während sich K_2 mit der Winkelgeschwindigkeit ω' dreht.



Nepfroide

Kartesische Koordinaten

$$x = a(3 \cos t - \cos(3t)) \quad y = a(3 \sin t - \sin(3t))$$

$$\text{Kartesische Gleichung} \quad 4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27 a^4 y^2$$

$$\text{Komplexe Gleichung} \quad 2z = a(3 e^{it} - e^{3it})$$

$$\text{Krümmungsradius} \quad R = \frac{3}{2} a \sin t$$

$$\text{Kurvnlänge} \quad = 24a$$

$$\text{eingeschlossene Fläche} \quad = 12 \pi a^2$$

Der Name Nephroide ("Nierenförmig") wurde 1878 in "The geometry of cycloids" von R.A.Proctor (1837-1888) für Epizykloiden mit zwei Spitzen eingeführt.

Die Nephroide ist eine algebraische Kurve 6.Grades.

Die Kurve entsteht, wenn ein Kreis mit dem Radius a außen auf einem festen

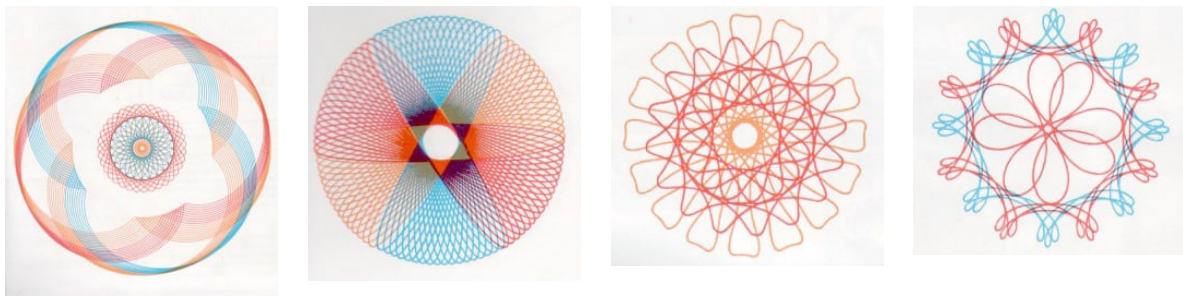
Kreis mit dem Radius $2a$ abrollt, d.h. die Nephroide ist ein Spezialfall der Epizykloide.

1678 zeigte Huygens ("Traité de la lumière"), dass die Kurve die Catacaustic eines Kreises darstellt, wenn die Lichtquelle im Unendlichen liegt.

Die Nephroide ist an ihrer breitesten Stelle doppelt so breit wie an ihrer schmalsten.

Der Flächeninhalt der Nephroide beträgt dreiviertel des Flächeninhaltes ihres Umkreises und das Dreifache des Flächeninhaltes ihres Inkreises. Der Umfang der Nephroide beträgt das Sechsfache des Radius ihres Umkreises und das Zwölfwache des Radius ihres Inkreises.

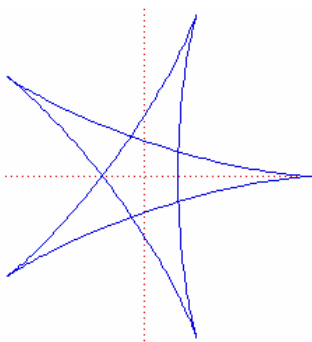
Die Involute (Evolvente) der Nephroide ist wieder eine Nephroide.
 Weitere schöne Epitrochoiden



Hypozykloide

Der Kreis rollt innerhalb der Peripherie eines festen Kreises ab; a ... Radius des festen Kreises ; b ... Radius des rollenden Kreises.

Der Name ergibt sich aus "Zykloide" = "Rollkurve" und der griechischen Vorsilbe $\upsilon\pi\tau\omicron$ = "darunter", "unten".



Gewöhnliche Hypozykloide

$$x = (a-b) \cos (bt/a) + b \cos [(a-b) t/a]$$

$$y = (a-b) \sin (bt/a) - b \sin [(a-b) t/a]$$

$$x = (a-b) \cos \phi + b \cos [(a-b) \phi/b]$$

$$y = (a-b) \sin \phi - b \sin [(a-b) \phi/b]$$

Länge eines Bogens

$$s = 8b (a-b)/a$$

Fläche zwischen einem vollen Bogen und Kreis $A = \pi b^2 (3a - 2b) / a$

Eine Hypozykloide mit drei Spitzen heißt Deltoid oder Tricuspid, mit 4 Spitzen Astroide.

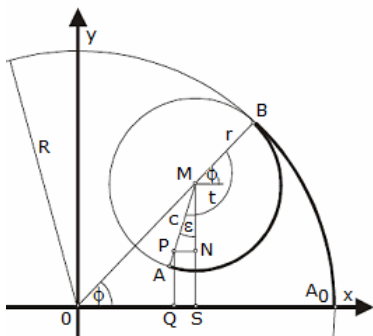
Verhältnis $m = a/b$ ist ...

ganzzahlig \Rightarrow Kurve besteht aus m zusammenhängenden Bogen; Länge der

ganzen Kurve $l = 8(a - b)$

rational \Rightarrow Kurve schließt sich nach einer Anzahl von Umdrehungen; sind p und q positive, zueinander relativ prime Zahlen, so schließt sich die Kurve nach q zueinander kongruenten Bögen

Die Hypozykloide wurde zuerst von Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), de L'Hospital (1690), Jacob Bernoulli (1690), la Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725), Euler (1745, 1781).



Hypozykloidengleichung

Rollt ein Kreis in der Ebene ohne zu gleiten innen auf einem festen Kreis ab, so beschreibt ein fest mit dem abrollenden Kreis verbundener Punkt P eine Hypozykloide.

Größen: R ... Radius des festen Kreises, t ... Wälzwinkel (Winkel BMP), ϕ ... Drehwinkel (Winkel B_0C), ϵ ... Winkel NMP , c ... Abstand des die Epizykloide erzeugenden Punktes vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises

Verwendet man die gleichen Bezeichnungen wie bei der Epizykloide, so gilt auch hier: $A_0B = BA$ mit: $A_0B, AB =$ Kreisbogen

$$R \cdot \phi = r \cdot t \text{ aus Bogenlänge} = \text{Radius} \cdot \text{Winkel im Bogenmaß}$$

$$x = OQ = OS - NP = (R - r) \cos \phi + c \cdot \sin \epsilon$$

$$y = QP = SM - NM = (R - r) \sin \phi - c \cdot \cos \epsilon$$

Aus obigem Bild erkennt man:

und $t - \epsilon = \pi/2 - \phi$; nach dem Innenwinkelsatz

$$\epsilon = (R-r)/R t - \pi/2$$

Folglich erhält man als Parameterdarstellung für die Hypozykloiden:

$$x = (R - r) \cos (r/R t) + c \cos ((R-r)/R t)$$

$$y = (R - r) \sin (r/R t) - c \sin ((R-r)/R t)$$

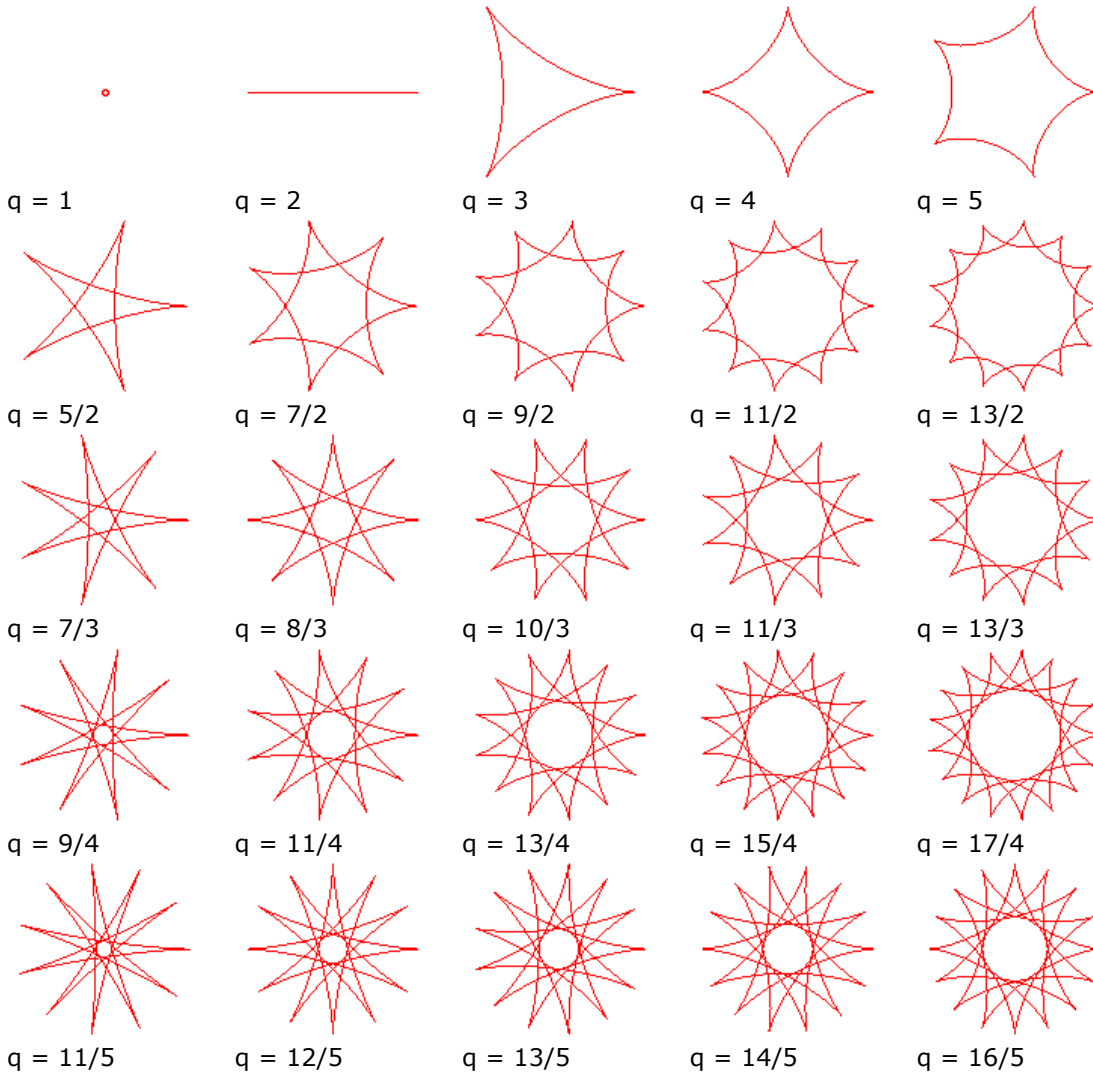
Ergibt das Verhältnis r/R der beiden Kreisradien eine rationale Zahl, so ergibt sich eine Kurve, die sich nach einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen des beweglichen Kreises schließt.

Verbindung Hypozykloide-Epizykloide

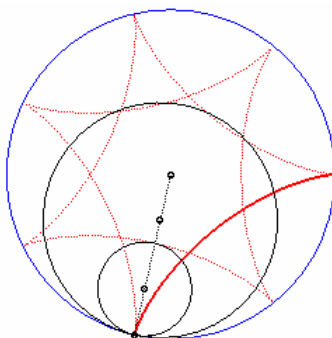
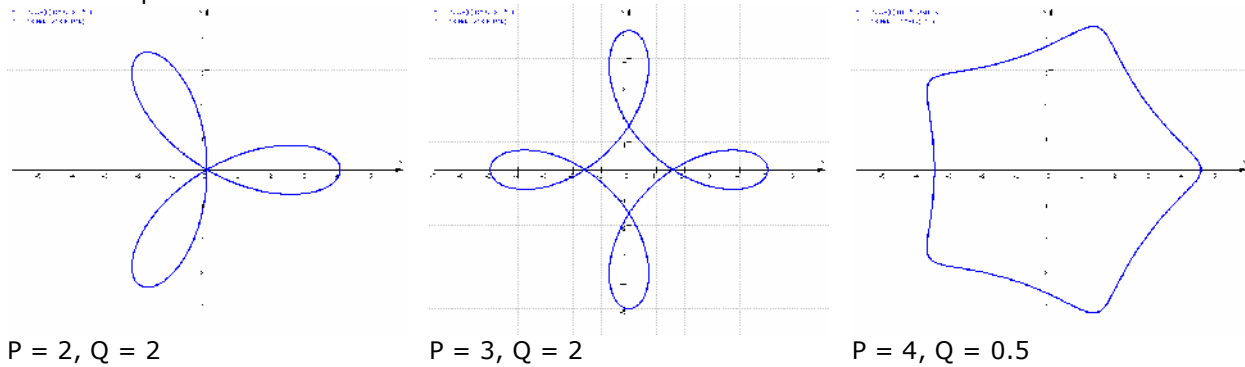
Rollt ein Kreis im Inneren eines anderen Kreises ab (Hypozykloide), so kann man einen weiteren, dritten Kreis betrachten, für den der rollende Kreis eine Epizykloide beschreibt.

Diese Tatsache wird durch Vincent Viton mit zwei sehr schönen Animationen bestätigt. Hier rollen mehrer Zahnräder ineinander ab.

Darstellung verschiedener Hypozykloiden $q = a/b$



Darstellung verschiedener Hypozykloiden $x = p \cos t + q \cos(pt)$, $y = p \sin t - q \sin(pt)$ für verschiedene Parameter p



Hypozykloide

Rollt der Kreis in dem inneren Kreis ab, so kann man einen weiteren Kreis angeben, der zum einen den inneren Kreis berührt, zum anderen durch den Mittelpunkt des äußeren Kreises und den die Hypozykloide beschreibenden Punkt verläuft.

Sonderfälle der Hypozykloide

Parameterdarstellung:

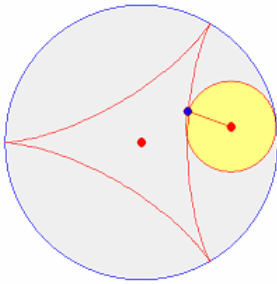
$$x = (R - r) \cos (r/R t) - c \cos ((R-r)/R t)$$

$$y = (R - r) \sin (r/R t) - c \sin ((R-r)/R t)$$

Wichtige Sonderfälle sind

$$r = R/2 ; \text{ Ellipse} \quad \begin{aligned} x &= (R/2 + c) \cos t/2 \\ y &= (R/2 - c) \sin t/2 \end{aligned}$$

$c = r = R/4$; Astroide $x = R \cos^3 t/4$ $y = R \sin^3 t/4$
 $c = r = R/2$; eine periodische Hin- und Herbewegung des Punktes P auf der x-Achse
 $x = R \cos t/2$; $y = 0$



Deltoid-Kurve

Die Kurve mit der Form eines griechischen Deltas wird auch Steiners Hypozykloide, nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1856) oder Tricuspid, da sie 3 Spitzen besitzt, genannt. Sie ist eine Kurve 4. Grades, die eine spezielle Hypozykloide darstellt. Sie entsteht wenn ein Kreis in einem anderen Kreis dreifachen Radius abrollt. Die Kurve wurde von Leonhard Euler 1745 bei der Untersuchung optischer Probleme eingeführt.

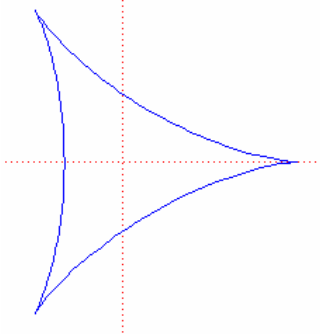
Gleichung $x = 2 \cos t + \cos 2t$ $y = 2 \sin t - \sin 2t$
 Koordinatenform kartesische Koordinaten:
 $(x^2+y^2)^2 - 8x(x^2-3y^2) + 18(x^2+y^2) = 27$

Die Radialkurve der Deltoid-Kurve ist das Trifolium, die Katakaustik ist die Astroide und die Deltoid-Kurve ist die Envelope der Simson-Gerade.

Die Kurvenlänge des Deltoids ist 16, die eingeschlossene Fläche hat den Wert 2π .

Ist eine Tangente l an die Kurve gegeben, so schneidet l die Kurve in den Punkten P und Q. Die Strecke PQ hat dann die Länge 4.

Außerdem stehen die Tangenten in P und Q senkrecht zueinander.



Allgemeines Tricuspid

Die Deltoid-Kurve kann durch Einführung eines Streckungsfaktors a verallgemeinert werden:

Koordinatenform kartesische Koordinaten:
 $(x^2 + y^2 + 12ax + 9a^2)^2 = 4a(2x + 3a)^3$

Parameterdarstellung:

$x = a(2 \cos t + \cos 2t)$ $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$

Das allgemeine Tricuspid ist ein Sonderfall der Hypozykloide. Es wurde von Euler zur Lösung eines Optimierungsproblems eingeführt.

Dann gilt für die Kurvenlänge $16a$ und den eingeschlossenen Flächeninhalt $= 2\pi a^2$

Kopernikus-Theorem

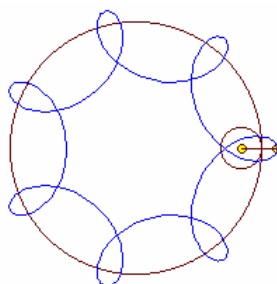
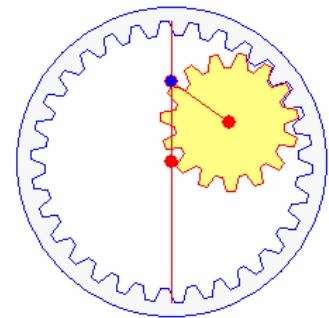
Rollt ein Kreis K_1 mit dem Radius b in einem Kreis K_2 mit dem Radius a ab, so entsteht eine Hypozykloide, die im Allgemeinen eine gekrümmte Kurve ist.

Hat der innere Kreis allerdings den halben Radius des äußeren Kreises, d.h. $a = 2b$, so entartet die Hypozykloide zu einer Geraden. Dieser Sachverhalt wird Kopernikus-Theorem genannt.

Aus den allgemeinen Gleichungen

$x = (a-b) \cos (bt/a) + b \cos [(a-b) t/a]$
 $y = (a-b) \sin (bt/a) - b \sin [(a-b) t/a]$

wird $x = a \cos t/2$ $y = 0$ d.h. eine Geradengleichung.



Verkürzte und verlängerte Hypozykloide (Hypotrochoide)

Der Punkt liegt innerhalb bzw. außerhalb der Peripherie des abrollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt

$c < b$ verkürzt, gestreckt
 $c > b$ verlängert, verschlungen

$x = (a-b) \cos (bt/a) + c \cos [(a-b) t/a]$
 $y = (a-b) \sin (bt/a) - c \sin [(a-b) t/a]$
 $x = (a-b) \cos \phi + c \cos [(a-b) \phi/b]$
 $y = (a-b) \sin \phi - c \sin [(a-b) \phi/b]$

Die Kurve wurde zuerst von la Hire, Desargues, Leibniz und Newton.

Spezialfall Ellipse: Für $R = 2r$ und c beliebige Zahl, wird die Hypozykloide mit der Gleichung zur Ellipse. R großer Kreisradius, r rollender Kreisradius

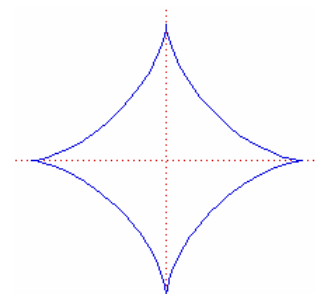
Spezialfall Pascalsche Schnecke: Für $R = r$ wird die Hypozykloide zur Pascalschen Schnecke.

Sonderfälle der Hypozykloiden

Für $a/b = 4$ wird die gewöhnliche Hypozykloide zur

Astroide (Sternlinie)

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
 $(x^2 + y^2 + a^2)^3 + 27 a^2 x^2 y^2 = 0$



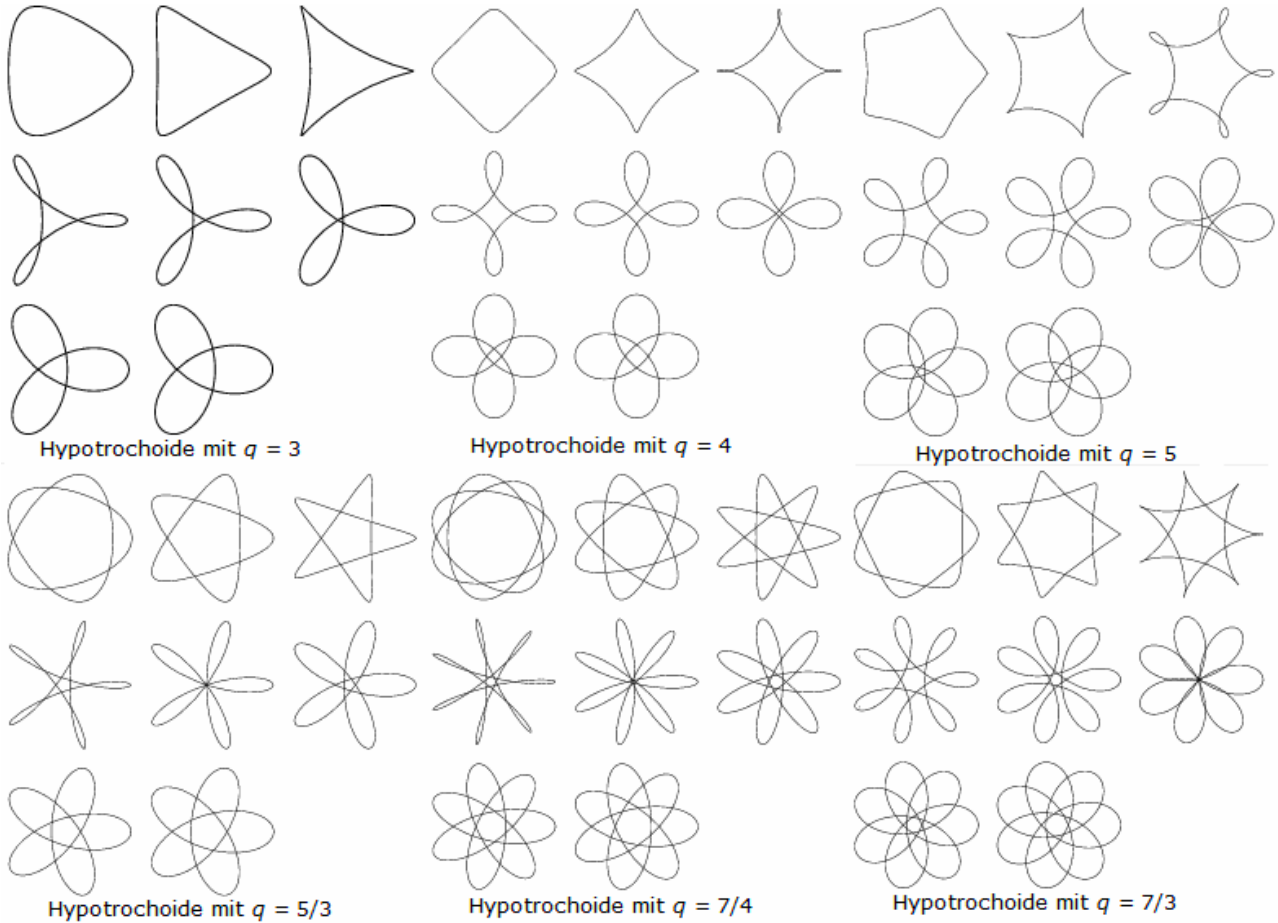
Parameterdarstellung $x = a \cos^3 t/4 \quad y = a \sin^3 t/4$
 Polarkoordinaten $x = a \cos^3 \phi \quad y = a \sin^3 \phi$
 begrenzte Fläche $A = 3/8 \pi a^2$
 Bogenlänge $s = 6a$

- die gewöhnliche Hypozykloide wird für $a/b=2$ zu einer Geraden
- die verkürzte / verlängerte Hypozykloide wird für $a/b=2$ zu Ellipsen mit der Gleichung

$$x = (a/2 + c) \cos t/2 \quad y = (a/2 - c) \sin t/2$$

Die Astroide wurde 1691 zuerst von Johann Bernoulli untersucht. In einem 1836 in Wien erschienenen Buch wurde die Kurve erstmals Astroide genannt. andere Namen: Kubozykloide, Parazykl, H_4 (Hypozykloide mit vier Ecken)

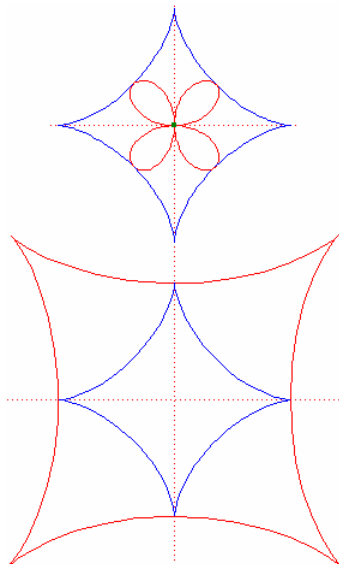
Eine Astroide kann auch als einhüllende Kurve (Envelope) konstruiert werden. Dazu wird ein Stab konstanter Länge mit einem Ende verschiebbar auf der x-Achse, mit dem anderen Ende auf der y-Achse platziert. Bewegt sich das Ende auf der Abszissenachse periodisch nach links bzw. rechts so beschreibt der Stab gerade eine Astroide.



Kurven an der Astroide

Pedalkurve, Fußpunktkurve

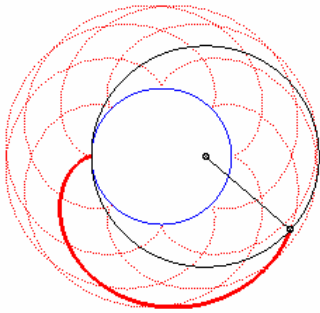
Allgemeine Pedalkurve: Ort aller Lotfußpunkte von einem festen Punkt O auf die Tangenten einer Kurve



Evolute

Die Evolute einer Astroide ist ebenfalls eine Astroide, die um den Faktor $1/2$ verkürzt und zusätzlich um 45° gedreht wurde.

Die entsprechende Involute (Evolvente) wird um den Faktor 2 gestreckt und ebenfalls um einen halben Quadranten gedreht.



Perizykloide

Eine spezielle Form der Epizykloide stellt die Perizykloide dar. Dabei rollt ein größerer Kreis derart auf einem kleineren wie in der Abbildung zu sehen.

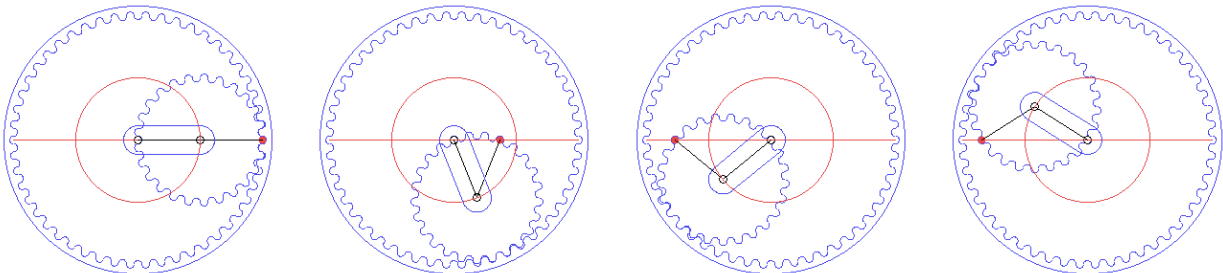
Komplexe Parametergleichung $z = a (q e^{i(q-1)t} - (q-1) e^{iqt})$
wobei a der Radius des inneren Kreises ist. Der Parameter q muss größer als Eins sein. Eine Perizykloide mit dem Parameter q kann auch als Epizykloide mit dem Parameter $q' = 1/(q-1)$ erzeugt werden.

Peritrochoide

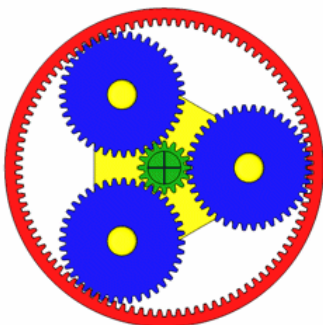
Eine weitere spezielle Form der Epizykloide stellt die Peritrochoide dar. Dabei rollt erneut ein größerer Kreis auf einem kleineren wie in der

Abbildung zu sehen, allerdings befindet sich der die Kurve beschreibende Punkt nicht auf der Peripherie des rotierenden Kreises, sondern ist verschoben.

Innenzahnrad



In einem Zahnrad mit den Zähnen nach innen läuft ein gewöhnliches Zahnrad mit genau dem halben Radius, so dass dessen Mitte auf einem Kreis um die Mitte des äußeren läuft. Die dabei sinusförmig mit der Zeit durchlaufene Gerade ist ein Sonderfall einer Ellipse und diese einer der Hypozykloide! Bei Dampfmaschinen wurde das gelegentlich zur exakten Überführung einer Kreisbewegung in eine geradlinige Schwingung genutzt.



Planetengetriebe

Ein Planetengetriebe besteht aus 4 Komponenten, dem Sonnenrad, dem Hohlrads, den Planetenrädern und dem Planetenträger. Daher kommt auch der Name Planetengetriebe, die Planetenräder umkreisen das Sonnenrad wie Planeten die Sonne.

Für die Berechnung des Planetengetriebes wird festgesetzt:

i ... Übersetzungsverhältnis, f_{nS} ... Drehfrequenz des Sonnenrades, f_{nT} ... Drehfrequenz des Planetenträger, f_{nP} ... Drehfrequenz der Planetenräder

$$i = 1 + z_H / z_S \quad i = f_{nS} / f_{nT}$$

$$f_{nT} = z_S / (z_S + z_H) f_{nS}$$

$$f_{nP} = z_H / z_P f_{nT} = z_S z_H / ((z_S + z_H) z_P) f_{nS}$$

Kugelzykloiden

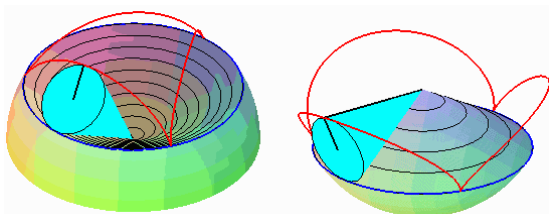
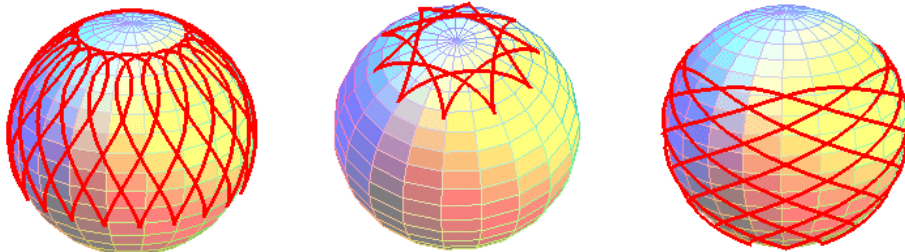
Zykloiden, d.h. Rollkurven kann man auch auf räumlichen Gebilden betrachten. Mit den Parametergleichungen

$$qx = a ((q - \cos \omega) \cos t + \cos \omega \cot t \cos qt + \sin t \sin qt)$$

$$qy = a ((q - \cos \omega) \sin t + \cos \omega \sin t \cos qt - \cos t \sin qt)$$

$$qz = a \sin \omega (1 - \cos qt)$$

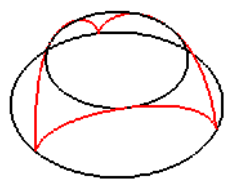
werden Zykloiden auf einer Kugeloberfläche beschrieben:



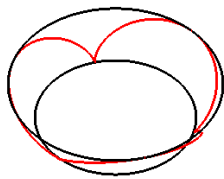
Die entsprechenden algebraischen Kurven sind sphärisch und von der Ordnung $2 \cdot (\text{Zähler} + \text{Nenner von } q)$. Kugelzykloiden entstehen, wenn ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises liegt, dieser auf einem zweiten Kreis reibungsfrei abrollt und beide Kreise mit einem Winkel von ω zueinander geneigt sind. Für $\omega = 0$ gehen die Kugelzykloiden in Hypozykloiden, für $\omega = \pi$ in Epizykloiden über.

Kugelzykloiden können auch durch ein anderes Modell beschrieben werden. Rollt ein Kreiskegel innerhalb oder auf der Oberfläche eines zweiten Kegels mit gleich langer Randlinie ab, so ergeben sich ebenfalls die Kugelzykloiden.

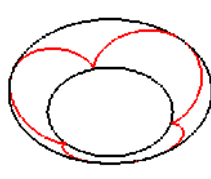
Die Form dieser Zykloiden hängt entscheidend vom Winkel ω und dem Parameter q ab. Die Tabelle enthält einige Beispiele:



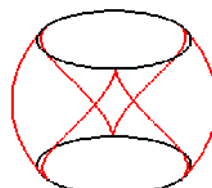
Hypozykloide
 $q = 3, \omega = 60^\circ$



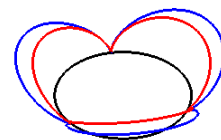
Epizykloide
 $q = 3, \omega = 120^\circ$



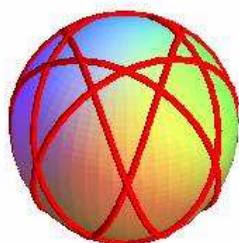
Epizykloide
 $q = 3/4, \omega = 10^\circ$



Kugelhelix
 $q = 3/4, \omega = \arccos 3/4$



rot: $q = 3, \omega = 60^\circ$
blau: $q = 3/4, \omega = \arcsin(\sin 60^\circ / 4)$



Capareda-Kurve

Capareda-Kurven sind räumliche Kurven auf der Oberfläche einer Kugel. Sie wurden 2010 von Levi Capareda untersucht. Der Verlauf der Kurven entspricht der Projektion von Bahnkurven von Satelliten auf die Erdoberfläche. Es werden zwei Fälle unterschieden.

Hypotrochoide

$$\begin{aligned} x &= a((q-1) \cos t + k \cos((q-1)t)) \\ y &= a((q-1) \sin t - k \sin((q-1)t)) \\ z &= 2a \sqrt{k(q-1)} \sin(q/2 t) \end{aligned}$$

mit $q > 1$ und $(q - 1 + k) a$ als Kugelradius.

Für $q = 4$ und $k = 3$ entsteht eine Clelia-Kurve, für $q = 4$ und $k = 1$ die Tennisballkurve.

Epitrochoide

$$\begin{aligned} x &= a((q+1) \cos t - k \cos((q+1)t)) \\ y &= a((q+1) \sin t - k \sin((q+1)t)) \\ z &= 2a \sqrt{k(q+1)} \cos(q/2 t) \end{aligned}$$

mit $q > 0$ und $(q - 1 + k) a$ als Kugelradius.

Für $q = 4$ und $k = 1$ ergibt sich eine Kugelschraube, für $q = 4, k = 5$ eine Clelia.

Klein-Zykloide

Die Klein-Zykloide ist eine Raumfläche die durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$\begin{aligned} x &= \cos(u/c) \cdot \cos(u/b) \cdot (a + \cos v) + \sin(u/b) \cdot \sin v \cdot \cos v \\ y &= \sin(u/c) \cdot \cos(u/b) \cdot (a + \cos v) + \sin(u/b) \cdot \sin v \cdot \cos v \\ z &= -\sin(u/b) \cdot (a + \cos v) + \cos(u/b) \cdot \sin v \cdot \cos v \end{aligned}$$

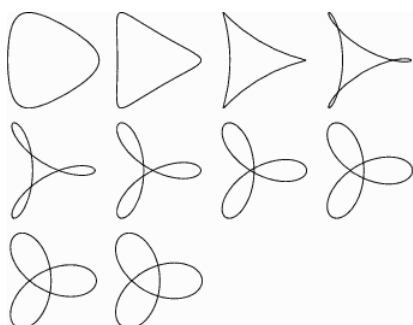
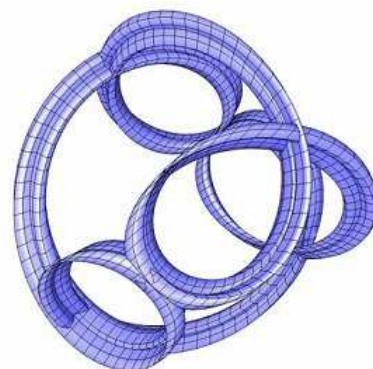
Die Konstanten a, b und c bestimmen das Aussehen der Figur.

Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v folgende Werte annehmen

u ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 2 b c \pi]$
 v ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 4 \pi]$

Die Abbildung zeigt die Fläche für $a = 10, b = 3$ und $c = 2$.

Quelle: <http://www.3d-meier.de/tut3/Seite111.html>



Spirograph

Ein fester Punkt eines Kreises, der innerhalb eines zweiten festen Kreises rollt, beschreibt eine Hypozykloide. Sind die Radien der Kreise r und R sowie der Abstand ρ des Punktes von dem Kreismittelpunkt rational, so ist die entstehende Kurve geschlossen und wird Spirograph genannt.

Parametergleichung

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \phi - (r + \rho) \cos((R+r)/r \phi) \\ y &= (R + r) \sin \phi - (r + \rho) \sin((R+r)/r \phi) \end{aligned}$$

Für einen äußeren Kreis mit dem Radius 1, einem inneren Kreis mit

dem Radius p/q und einem Abstand a des Punktes vom Zentrum wird

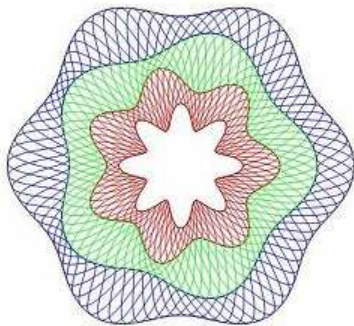
$$x = x_0 [m \cos t + a \cos (nt)] - y_0 [m \sin t - a \sin(nt)]$$

$$y = y_0 [m \cos t + a \cos (nt)] + x_0 [m \sin t - a \sin(nt)]$$

$$m = (q - p)/q \quad n = (q - p)/p$$

$$x_0 = \cos \phi \quad y_0 = \sin \phi$$

Die Abbildung zeigt die Spirographen für $p = 1, q = 3$ und $a = i/10$ ($i=1, 2, \dots, 10$).



Guilloché-Muster

Guilloché-Muster entstehen durch Spirograph-ähnliche Kurven. Eine Guilloché-Kurve berührt dabei zwei geschlossene Kurven sowohl von innen als auch von außen.

Die Einzelkurven haben eine Gleichung in Polarkoordinaten

$$r = (c + \sin(ax+d)) + ((b + \sin(bx+e)) - (c + \sin(ax+d))) (f + \sin(ax + n/\pi))/2$$

mit entsprechenden Parametern a bis f . n ist ein Parameter der die Größenänderung der Einzelkurven beschreibt.

Die große Bedeutung dieser Muster bestand in ihrer Verwendung auf Banknoten, Personendokumenten, Urkunden, Briefmarken, usw. ..., da durch die Muster die Fälschung der Dokumente deutlich erschwert wird. Mit der Entwicklung moderner Fälschungsmethoden geht die Bedeutung dieser Muster zurück. In der Episode "Counterfeit Reality" (2005) der 1. Staffel von NUMB3RS spielten Guilloché-Muster eine besondere Rolle.

Abbildung: norwegische Banknote 1944, 20 Mark-Schein der DDR



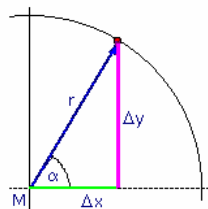
Freeths Nephroide

Polarkoordinaten

$$r = a(1 + 2\sin(\theta/2))$$

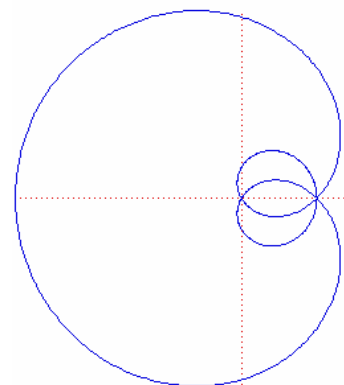
Freeths Strophoide ist eine Strophoide eines Kreises mit dem Pol O im Mittelpunkte des Kreises und dem Fixpunkt P auf der Kreisperipherie.

In der Abbildung liegt O im Koordinatenursprung und P auf der x -Achse, wo sich die Kurve dreimal schneidet.



Schneidet eine Gerade durch P parallel zur y -Achse die Nephroide in A , so gilt für den Winkel $AOP = 3\pi/7$.

Die Kurve wurde nach T.J. Freeth (1819-1904) einem englischen Mathematiker benannt.



Sternkurven, Rhodonea-Kurven

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes eines Kreises können in Abhängigkeit von Radius und Winkel berechnet werden:

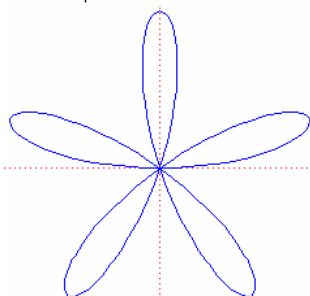
$$x = x(m) + r \cos \alpha \quad y = y(m) - r \sin \alpha$$

Durchläuft der Winkel α das Intervall $[0; 2\pi]$, so ergibt sich der ganze Kreis. Unterwirft man nun zusätzlich den Radius einer vom Winkel abhängigen, periodischen Schwankung, so entstehen die sogenannten Sternkurven. Diese sind ein Spezialfall der Epizykloiden.

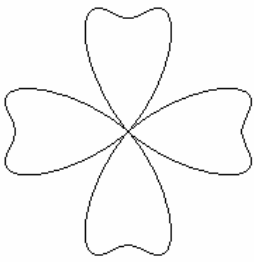
Polarkoordinaten $r = a \sin k\theta$

... die Kurve erhielt 1723 ihren Namen Rhodonea von dem italienischen Mathematiker Guido Grandi, da die Form einer Rose gleicht

... ist der Parameter k der Polarkoordinatenform ungerade, so entstehen k



Schleifen; ist k gerade ... 2k Schleifen
 ... ist k irrational, so entsteht eine unendliche, nicht geschlossene Kurve



Habernicht-Kurve, Habernicht-Klee

Diese Gruppe von geschlossenen Kurven wurde 1895 von Habernicht erstmals beschrieben.

Für eine beliebige natürliche Zahl n gilt:

Polarkoordinaten $r = 1 + \cos(n\theta) + \sin^2(n\theta)$

Die Abbildung zeigt die Kurve für n = 4. Da diese für n = 3 und 4 kleeartig aussieht, spricht man auch vom Habernicht-Klee.

Für den Fall n = 4 sind weitere Quadrifolium (Vierblätter) mit den Formeln zu erzeugen:

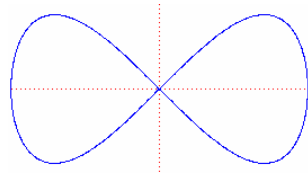
Polarkoordinaten

$r = \sin(2\theta) + 1/4 \sin(6\theta)$

$r = \sqrt{|\sin(2\theta)|} + 1/4 \sin^2(4\theta)$

$r = |\sin(2\theta)| + 1/4 \sin^2(4\theta)$

$r = \sin^2(2\theta) + 1/2 \sin^2(4\theta)$



Acht-Kurve

Kartesische Koordinaten

$x^4 = a^2 (x^2 - y^2)$

Polarkoordinaten

$r^2 = a^2 \cos(\theta) \sec^4(\theta)$

Die Acht-Kurve wird auch Lemniskate von Geronon genannt. Beschrieben wurde die Kurve erstmals 1647 von Grégoire de St.Vincent. Ihren zweiten

Namen erhielt sie nach dem französischen Mathematiker Camille-Christophe Gerono (1799-1891). Es gibt keinen einheitlichen Namen für diese Kurve. Alternativen sind Achterkurve, achtförmige Kurve oder achtförmige Linie. Im Englischen findet man die Namen Eight Curve, Eight Shaped Curve und Figure of Eight Curve.

Die Acht besteht im einfachsten Falle aus zwei Kreisen und den Tangentenabschnitten der inneren gemeinsamen Tangenten. In einem allgemeineren Fall stehen die Tangenten nicht notwendig aufeinander senkrecht.

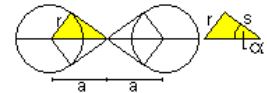


Konstruktion: Zeichne zwei Quadrate Ecke an Ecke (gelb). Zeichne je einen Kreis um die äußeren Eckpunkte mit dem Radius der Seitenlänge eines Quadrats. Kennzeichne die Acht.

Es sei der Radius r des Kreises gegeben. Die Figur setzt sich aus zwei Dreiviertelkreisen und zwei Quadraten zusammen.

Länge der Achtkurve $u = 4r + 2(3/4)(2\pi r) = (4+3\pi)r$

Flächeninhalt der Achtkurve $A = 2[(3/4)\pi r^2] + 2r^2 = (3\pi+4)r^2/2$



In einem allgemeineren Fall stehen die Tangenten nicht notwendig aufeinander senkrecht.

r ist der Radius, 2a der Abstand der Mittelpunkte, 2α der Winkel zwischen den Tangenten.

Angenommen, der Radius r und der Winkel α sind gegeben.

Länge der Achtkurve:

Die Länge setzt sich aus zwei Kreisbögen und vier Tangentenabschnitten zusammen: $u = 2u' + 4s$. u' ist die Länge der Kreislinie mit dem Umfangswinkel $360^\circ - \alpha$. Es gilt die Proportion $u' : (2\pi r) = (360^\circ - \alpha) : 360^\circ$. Daraus folgt $u' = \pi r (90^\circ + \alpha) / 90^\circ$. Nach der Definition des Tangens ist

$\tan(\alpha) = r/s$ oder $s = r/\tan(\alpha)$.

Eingesetzt wird $u = \pi r (90^\circ + \alpha) / 45^\circ + 4r/\tan(\alpha)$

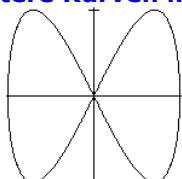
Flächeninhalt der Achtkurve:

Der Flächeninhalt setzt sich aus zwei Kreisausschnitten und vier rechtwinkligen Dreiecken zusammen: $A = 2A' + 4A''$. Für einen Kreisausschnitt gilt $A' : \pi r^2 = (180^\circ - 2\alpha) : 360^\circ$ oder $A' = \pi r^2 (90^\circ + \alpha) / 90^\circ$. Für ein Dreieck gilt $A'' = rs/2 = 2r^2/\tan(\alpha)$.

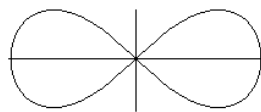
$A = 2A' + 4A'' = [(90^\circ + \alpha) / 90^\circ \pi + 2/\tan(\alpha)] r^2$

Ist $a = 2r$, so entarten die Tangentenabschnitte zu einem Punkt und die Acht zu einem Doppelkreis.

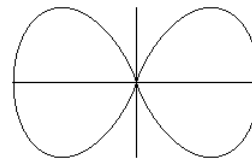
Weitere Kurven in Form einer „8“



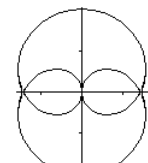
Lissajous-Figur
 $x = \cos(t) \wedge y = \sin(2t)$
 oder $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$



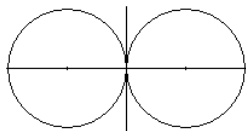
Kurve von Watt
 $r^2 = b^2 - [a \sin(t)(c^2 - a^2 \cos^2(t))]^2$ mit $a = b = 1, c^2 = 2$



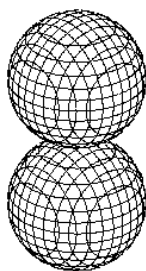
$y^2 = x^2 \ln(a^2/x^2)$ mit $a = 1$



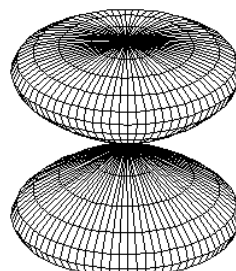
Nephroide
 $x = \cos(t) - \cos(3t)$
 $y = \sin(t) - \sin(3t)$



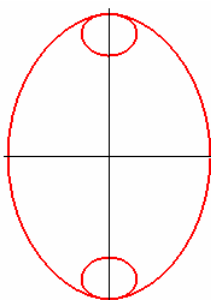
Doppelkreis
 $r = \text{abs}[\cos(t)]$ oder
 $(x+1)^2 + y^2 = r^2 \wedge (x-1)^2 + y^2 = r^2$ mit $r=1$



Ein rotierender Doppelkreis erzeugt eine räumliche Acht



Eine rotierende Lemniskate erzeugt eine räumliche Acht



Cornuoid

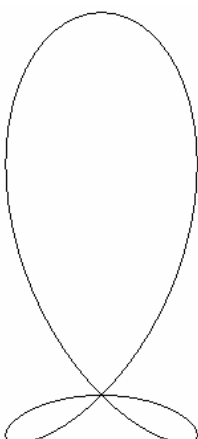
Die Kurve wurde erstmals intensiv von Alberto Sanchez untersucht.
 Kartesische Koordinaten $(x^2 + y^2)^3 - a^2 (3x^4 + 6x^2y^2 - 5y^4) + 8a^4y^2 - 4a^6 = 0$
 Parametergleichung $x = a \cos t \cos 2t$
 $y = a \sin t (2 + \cos 2t)$

Alberto Sanchez war ein salvadorianischer Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Er wurde am 16. Juli 1864 in Santa Ana geboren, arbeitete als Professor an der Universität von El Salvador. 1891 wurde er Direktor des nationalen Observatoriums. Am 25. Oktober 1896 starb er an Tuberkulose.

In Würdigung von Sanchez wurde im offiziellen Logo der XVII. Lateinamerikanischen Mathematikolympiade, die 2002 in El Salvador stattfand, eine Cornuoid von Sanchez verwendet.

Die Gleichung der abgebildeten Kurve ist
 $(x^2 + y^2)^3 = 5r^2y^4 - 8r^4y^2 - 3r^2x^4 + 6r^2x^2y^2 + 4r^6$

XVII OLIMPÍADA
 IBEROAMERICANA
 DE MATEMÁTICA



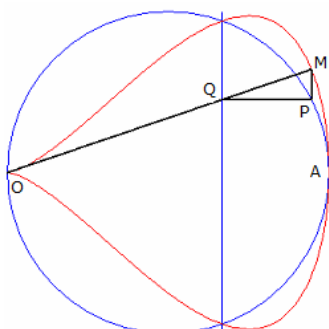
Torpedo-Kurve

franz. torpille, engl. torpedo curve
 Diese rationale Kurve 4. Grades wurde 1890 von de Longchamps eingeführt.

Polargleichung $\rho = a \cos \theta \cos 2\theta = a/4 \sin(4\theta) / \sin \theta$
 Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2)$
 Kartesische Parametergleichung
 $4(x - a) = a(\cos t + 2 \cos(t/2))$
 $4y = a \sin t$ mit $t = \theta/4$

Wird die Kurve um $\pi/4$ gedreht, erhält man als Gleichungen
 Polargleichung $\rho = a \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)$
 Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = a \sqrt{2} xy(x + y)$
 Die Torpedo-Kurve ist eine Strophoide eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(a/4, 0)$, der durch den Ursprung verläuft. Dabei bewegt sich ein Punkt A gleichmäßig auf dem Kreis.

Torpedo-Kurven-ähnliche Gebilde ergeben sich für die Gleichungen
 $x^4 + y^4 = xy(x + y)$ $x^4 + y^4 = x^2y^2(x + y)$



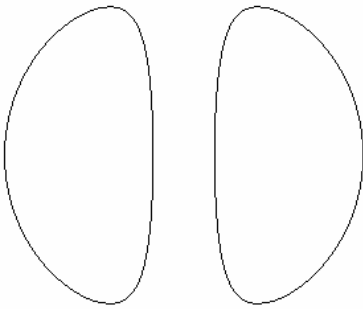
Birnen-Kurve

Die Birnen-Kurve ist eine rationale Quartik (franz. Name: quartique piriforme; engl.: piriform).
 Die Kurve wurde 1685 durch Wallis eingeführt und umfassend 1844 von Bonnet untersucht.

Kartesische Gleichung $b^2y^2 = x^3(a - x)$ bzw. $by = \pm x \sqrt{x(a - x)}$
 Kartesische Parametergleichung
 $x = a \cos^2 t = a/2 (1 + \cos u)$
 $by = a^2 \cos^3 t \sin t = a^2/8 (\sin 2u + 2 \sin u)$ mit $2t = u$
 eingeschlossene Fläche $A = \pi a^3 / (8b)$

Konstruktion der Birnen-Kurve

Ein Punkt P bewege sich auf einem Kreis C. OA sei Durchmesser und A habe die Koordinaten $(a, 0)$. Q sei dann der Punkt auf der Geraden $x = b$, welcher die gleich Ordinate wie P besitzt.
 Die Birnenkurve ist dann die Menge von Punkten M auf der Geraden OQ mit der gleichen Abszisse wie P.



Bernoullische Quartik

Die Kurve wurde 1687 von Jacques Bernoulli (1654-1705) eingeführt. Weitergehende Untersuchungen führte 1696 Leibniz durch. Sie ist eine Quartik der Ordnung 1.

Kartesische Gleichung

$$y = 1/2 (\pm\sqrt{(a^2 - x^2)} \pm \sqrt{(b^2 - x^2)}) , \text{ für } a > b$$

$$\text{bzw. } x^2 y^2 = ((a+b)^2/4 - y^2) (y^2 - (a-b)^2/4)$$

Die eingeschlossene Fläche hat den Flächeninhalt πb^2 .

Die Bernoullische Quartik kann als "mittlere Kurve" zweier konzentrischer Kreise erzeugt werden.

Doppel-Folium

Das Doppel-Folium ist eine Kurve 4.Grades. Sie ist ein Sonderfall des Foliums mit $b = 0$.

Kartesische Koordinaten $(x^2 + y^2) (y^2 + x(x+b)) = 4 a x y^2$

Polarkoordinaten $r = 4 a \cos \theta \sin^2 \theta$

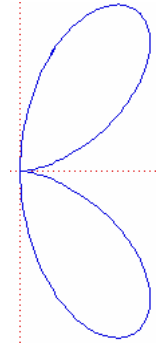
Parameterdarstellung $x = a \sin t (1 + \cos t) \quad y = a \sin^2 t$

Die eingeschlossene Fläche hat den Wert $A = \pi/2 a^2$

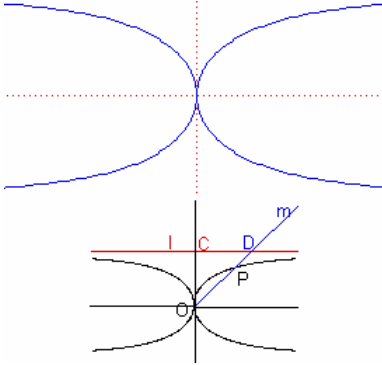
Umfang der Kurve $u = 7,15555... a$

Krümmung $\kappa = (3 + 3 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \csc \theta / (a \sqrt{2} (3 + 3 \cos(2\theta) + 2 \cos(4\theta))^{3/2})$

Ein waagrecht liegendes Doppel-Folium $x = \pm \sqrt{ay} \pm \sqrt{ay-y^2}$ ergibt sich als mittlerer horizontaler Ort einer Parabel $x^2 = 4ay$ und einer Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4ay$



Kappa-Kurve



Kartesische Koordinaten $y^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2$

Polarkoordinaten $r = a \cot \theta$

Der Name der Kurve ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Kurvenform mit dem griechischen Buchstaben kappa, wobei die Kurve eher einem "x" entspricht.

Die Kurve wird auch Gutschovens-Kurve genannt, da G. van Gutschoven um 1662 umfangreiche Untersuchungen durchführte.

Des Weiteren wurde die Kappa-Kurve auch von Newton, Johann Bernoulli und de Sluze (1862) studiert.

Konstruktion: l sei eine Gerade parallel zur x-Achse. Der Schnittpunkt mit der y-Achse sei C.

Eine Gerade m durch den Ursprung schneide der Gerade l im Punkt D.

Dann ist die Kappa-Kurve die Menge aller Punkte P, für die $OP = CD$ gilt.

Knotenkurve

Knotenkurven wurden in der allgemeinen Form von La Gournerie 1851 eingeführt.

Polargleichung $\rho = a \tan(n\theta) ; n > 0$

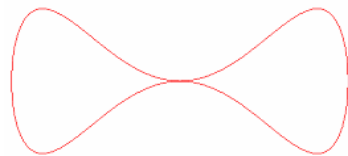
Für $n = p/q$, mit rationalen p und q, bildet die Kurve $2p$ Äste aus.

Spezielle Kurven ergeben sich für

$n = 1$ Kappa-Kurve

$n = 2$ Windmühlen-Kurve

$n = 1/2$ gerade Strophoide



Doppeltropfen

Die Doppeltropfen-Kurve ist eine Kurve 4.Grades.

Kartesische Koordinaten

$$b^4 y^2 = x^4 (a^2 - x^2)$$

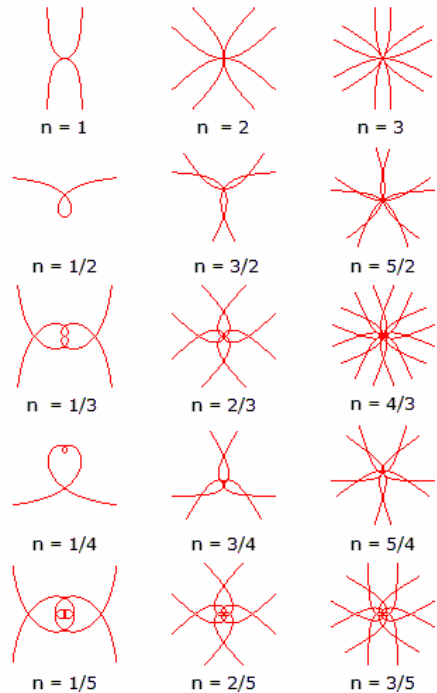
Parameterdarstellung

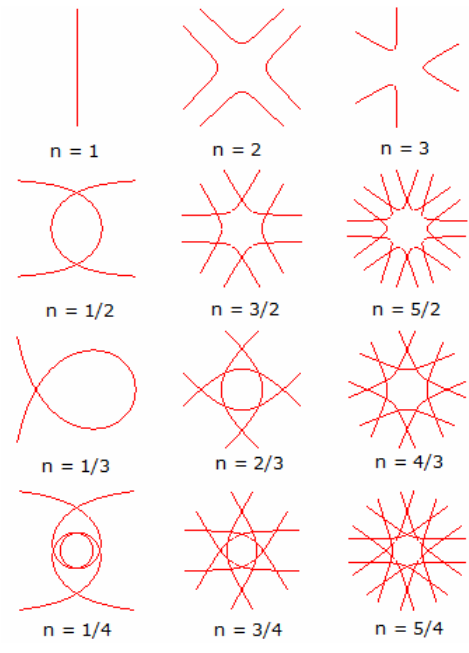
$$x = a \cos t$$

$$y = a^2/b \cos^2 t \sin t = a^2/(4b) (\sin 3t + \sin t)$$

Eingeschlossene Fläche der Kurve

$$A = \pi/16 a^4 / b^2$$





Ährenkurve

Die Kurve wurde 1895 von Aubry eingeführt. Ein alternativer Name ist Spirale von Cotes.

Polargleichung $\rho = a / \cos(n\theta)$; $n > 0$

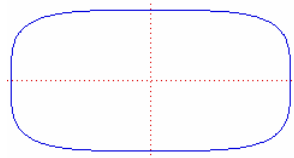
Ist n ungerade rational, so hat die algebraische Kurve den Grad n, ist n gerade den Grad 2(n-1).

Spezielle Kurven ergeben sich für

- n = 1 Gerade
- n = 2 Kreuzkurve
- n = 3 Kreuzkurve-3
- n = 1/2 Trisektrix von Delanges
- n = 1/3 Trisektrix von Maclaurin

Allgemeine Lamé-Kurve

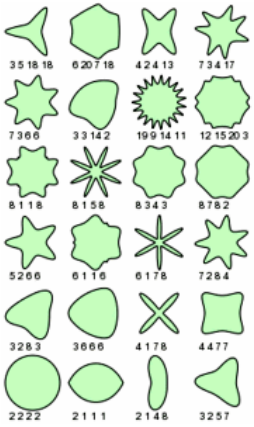
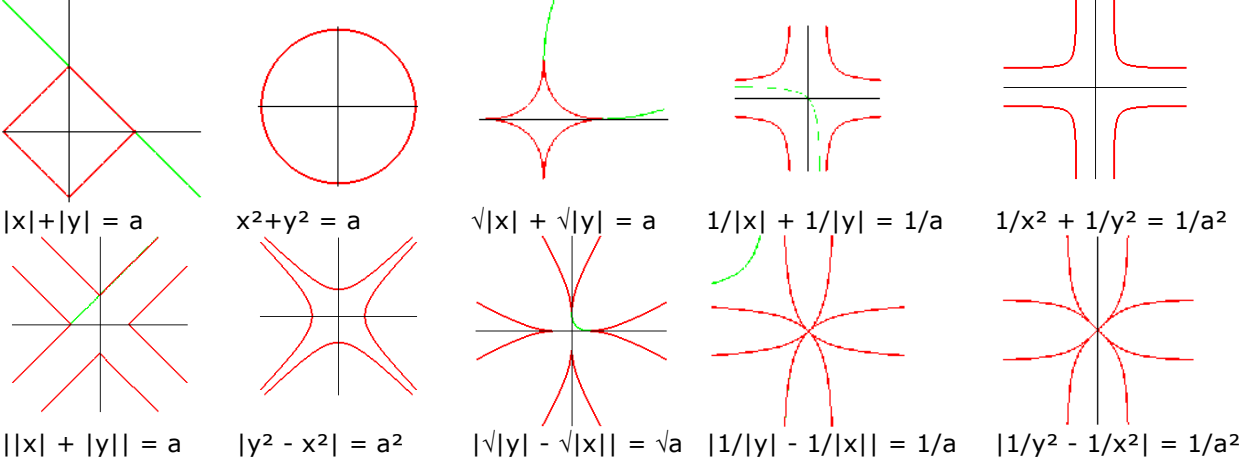
Kartesische Koordinaten $(x/a)^n + (y/b)^n = 1$



1818 untersuchte Gabriel Lamé (französischer Mathematiker, 1795-1870) als Erster diese Kurvenart.

Ist der Exponent n rational, so entstehen algebraische Kurven, andernfalls transzendente. In der Abbildung ist die Kurve für n=4 zu sehen. Für gerade, natürliche n nimmt die Kurve mit steigendem n immer stärker Ähnlichkeit zu einem Rechteck an. Für n = 2/3 ergibt sich eine Astroide, für n = 3 die Versiera der Agnesi. Der Fall n = 5/2 wurde von dem dänischen Architekten Piet Hein Superellipse genannt und zur Konstruktion verschiedenster architektonischer Gebilde genutzt.

Spezielle Lamé-Kurven der Form $|x|^n/a^n + |y|^n/b^n = 1$ und $|x|^n/a^n - |y|^n/b^n = 1$:



Superformel

Die Superformel ist eine geometrische Figur bzw. Kurve, die 1997 von dem belgischen Wissenschaftler Johan Gielis veröffentlicht wurde. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Lamé-Kurve.

Mittels der Superformel ist es möglich, Umrisse unterschiedlicher Symmetrie einheitlich zu beschreiben.

$1/r = \sqrt[n_1]{|1/a \cos(m/4 \phi)|^{n_2} + |1/b \sin(m/4 \phi)|^{n_3}}$

Die Größen sind: r ... Abstand vom Mittelpunkt, ϕ ... Winkel zur x-Achse, m ... Symmetrie, n_1, n_2, n_3 ... Form, a und b die Ausdehnung, Halbachsen.

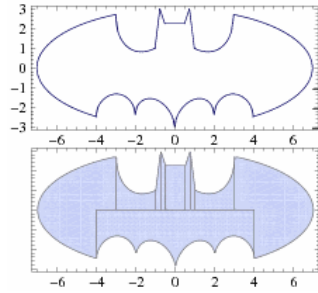
Die Bezeichnung "Superformel" verweist auf den Zusammenhang mit der Superellipse des dänischen Mathematikers Piet Hein.

Die Abbildung zeigt verschiedene mit der Superformel erzeugten Kurven für a = b = 1. Die Werte unter den

Kurven geben die Parameter m, n_1, n_2 und n_3 an.

Batman-Kurve

Das Batman-Symbol ist aus den gleichnamigen Comics und Filmen bekannt. Am 28.Juli 2011 veröffentlichte H.Gramberg zwei Funktionen, mit denen diese



Kurve dargestellt werden kann.

$$f(x) = (h-l) H(x+1) + (r-h) H(x-1) + (l-w) H(x+3) + (w-r) H(x-3) + w$$

$$g(x) = 1/2 [|x/2| + \sqrt{(1-|x|-2)^2}] - 1/112 (3\sqrt{33}-7)x^2 + 3 \sqrt{(1-x^2/49)} - 3 [(x+4)/|x+4| - (x-4)/|x-4|] - 3 \sqrt{(1-x^2/49)}$$

wobei $H(x)$ die Heaviside-Funktion ist und für die Terme gilt

$$w = 3 \sqrt{(1-x^2/49)}$$

$$l = 1/2 (x+3) - 3/7 \sqrt{10} \sqrt{(4-(x+1)^2)} + 6/7 \sqrt{10}$$

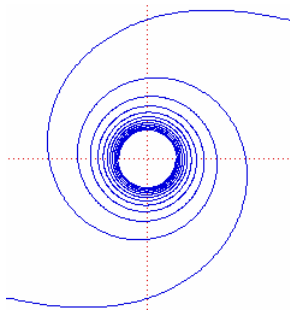
$$h = 1/2 [f(|x+1/2| + |x-1/2| + 6) - 11 (x + 3/4) + |x - 3/4|]$$

$$r = 1/2 (3-x) - 3/7 \sqrt{10} \sqrt{(4-(x-1)^2)} + 6/7 \sqrt{10}$$

Für den Flächeninhalt der Batman-Kurve wird

$$A = 955/48 + 1/7 (6 \sqrt{10} - 4 \sqrt{33} - 2 (7 + 3 \sqrt{10} \pi)) + 42 \arccos (4/7) - 21 \arcsin (3/7) + 21 \arcsin (4/7)$$

$$A \approx 52,7075450874$$



Lituus-Kurve

Polarkoordinaten

$$r^2 = a^2 / \theta$$

Die Lituus-Kurve wurde erstmals 1722 von Roger Cotes beschrieben.

Der Kurvenname erinnert dabei an die Spirale eines Bischofsstabes und wurde von MacLaurin in "Harmonia Mensurarum" 1722 geprägt. Auch die Kapitäle ionischer Säulen wurden in Form der Lituus-Kurve gestaltet.

Ein anderer Name dieser Kurve ist Schneckenspirale (franz. spirale limaçon), aber auch Spirale von Cotes.

Die Lituus-Kurve ist der Ort aller Punkte P, die einen Kreissektor beschreiben, dessen Flächeninhalt kontinuierlich abnimmt. Die Kurve ist transzendent.

Plateau-Kurve

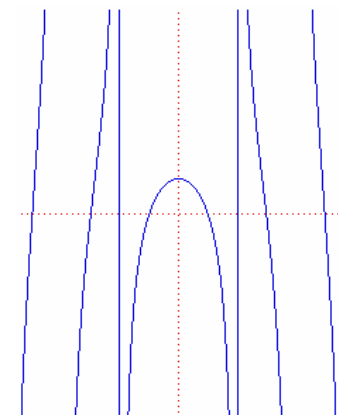
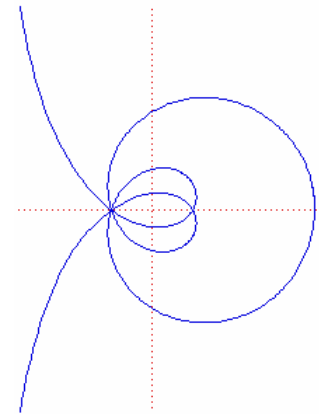
Parameterdarstellung:

$$x = a \sin(m+n)t / \sin(m-n)t$$

$$y = 2a \sin(mt)\sin(nt) / \sin(m-n)t$$

Abbildung für $m=5$ und $n=3$

Die Kurve wurde zuerst von dem belgischen Physiker und Mathematiker Joseph Plateau untersucht. Für $m=2n$ wird die Kurve zu einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(1,0)$ und dem Radius 2.



Quadratrix des Hippias

Kartesische Koordinaten:

$$y = x \cot(\pi x / (2a))$$

Polarkoordinaten:

$$r = 2 a \theta / (\pi \sin \theta)$$

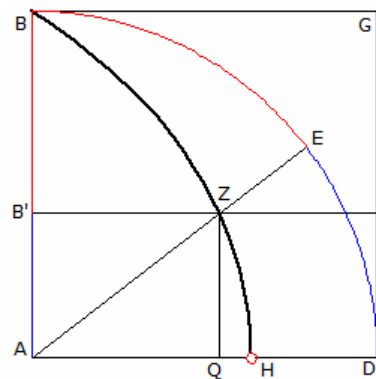
Diese Kurve wurde von Hippias von Elis um 430 v.u.Z. entdeckt. Um 350 v.u.Z. wurde die Quadratrix von Dinostratus erneut untersucht.

Die Kurve kann zur Dreiteilung eines Winkels bzw. zur Quadratur des Kreises genutzt werden und ist selbst nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Im französischen Sprachraum heißt die Kurve "Dinostratus' quadratrix", im deutschen und englischen ist sie nach Hippias benannt.

gleichförmig verschoben.

Die Kurve ist die Ortskurve der Schnittpunkte zweier Geraden. Eine der beiden Geraden rotiert gleichförmig um einen Punkt, die zweite Gerade wird



Quadratrixkonstruktion

Im Satz 30 des 4. Buches der "Collectiones" beschreibt Pappus von Alexandria die Konstruktion der Quadratrix.

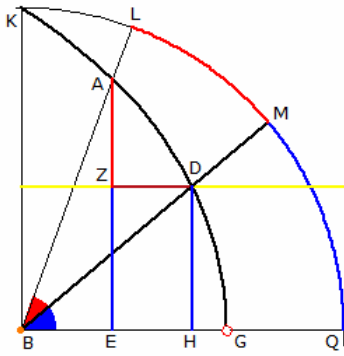
Durch Dinostratus und Nikomedes wurde die Kurve zur Quadratur des Kreises benutzt. Sie entsteht auf folgende Weise:

Gegeben sei ein Quadrat ADGB und in diesem ein Viertelkreis BED.

Auf der Strecke BA bewege sich ein Punkt B' gleichförmig in Richtung A. Gleichzeitig drehe sich der Strahl AE gleichförmig um A von B in Richtung C. Beide Bewegungen müssen so ablaufen, dass B' zur gleichen Zeit A erreicht, wie der Punkt E den Punkt D.

Der Schnittpunkt Z der Waagerechten durch B' und der Strecke AE beschreibt dann die gesuchte Quadratrix.

Da die Streckenlänge AB und die Bogenlänge BE nicht kommensurabel sind, ist diese Kurve nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.



Winkerteilung mit Quadratrix

Mit Hilfe der Quadratrix des Hippas kann ein gegebener Winkel, Kreisbogen, in jedes gewünschte rationale Verhältnis geteilt werden. Im Satz 45 des 4. Buches der "Collectiones" beschreibt Pappus von Alexandria das Verfahren:

Gegeben sei der zu teilende Bogen LQ des Kreises KLQ und damit LBQ der zu teilende Winkel. BK sei orthogonal zu BQ.

In diesen Kreis wird die Quadratrix KADG durch K eingeschrieben. siehe Quadratrixkonstruktion

Auf der Quadratrix wird der Punkt A so gewählt und das Lot E gefällt, dass AZ zu ZE das gewünschte Verhältnis ist. In Z wird eine Parallele zu BG gezeichnet, die die Kurve in D schneide. Von D wird das Lot nach H

gefällt.

Dann ist AE zu DH, also ZE, gleich dem Winkel ABG zu Winkel DBG. UND somit

$$AE : DH = \angle ABG : \angle DBG$$

$$(AE-DH) : DH = (\angle ABG - \angle DBG) : \angle DBG$$

Damit hat $\angle ABD$ zu $\angle DBG$, bzw. Bogen LM zu MQ, das gesuchte Verhältnis.

Mit der entsprechenden Wahl des Verhältnisses AZ : ZE ist somit auch eine Winkeldreiteilung möglich.

Anmerkung: Für den Nachweis nutzt man die grundlegende Eigenschaft der Quadratrix, dass $AE : DH = \text{Bogen LMQ} : \text{Bogen MQ}$ ist.

Wie der Name "Quadratrix" der Kurve sagt, sollte diese zur Quadratur des Kreises verwendet werden, und nicht zur Winkeldreiteilung. Es ist das Verdienst von Pappus, diese Möglichkeit erkannt zu haben.



Quadratrix von Abdank-Abakanowicz

Diese transzendente Kurve wurde von Abdank-Abakanowicz 1889 eingeführt. Bruno Abdank-Abakanowicz war ein polnischer Ingenieur.

Die Kurve kann zur Quadratur des Kreises genutzt werden und gibt den Flächeninhalt eines Kreises als Funktion von x an. Daher wird als Kurvenname auch Kreisintegralkurve genutzt.

Kartesische Koordinaten:

$$x = R \sin t \quad y = R^2/2 (t + \sin t \cos t)$$

Differenzialgleichung:

$$x^2 + y'^2 = R^2$$

Bruno Abdank-Abakanowicz

Abdank-Abakanowicz wurde am 6. Oktober 1852 in Wilkomierz (heute Ukmerge, Litauen) geboren. Nach seinem Studium in Riga arbeitete er in Lwow und ging 1881 nach Paris.

Er konstruierte mechanische Geräte zur Integration von Kurven. Darüber hinaus schrieb er bedeutende Werke zur Statistik und Integration. Am 29. August 1900 starb er in Parc St. Maur.

Serpentine

Kartesische Koordinaten $x^2 y + ab y - a^2 x = 0, ab > 0$

Parameterdarstellung $x = a \cot t$

$$y = 2b \sin t \cos t ; 0 \leq t \leq \pi$$

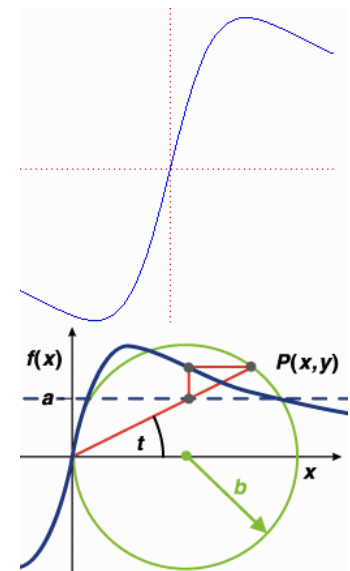
Die Kurve besitzt eine Spiegelsymmetrie zum Koordinatenursprung. Sie wurde 1701 von Newton untersucht und benannt.

Newton wies nach, dass eine kubische Kurve $f(x,y) = 0$ in vier sogenannte Normalformen zerlegt werden kann.

Die erste dieser Formen mit $x y^2 + e y = a x^3 + b x^2 + c x + d$, der schwierigste Fall, ist eine Verallgemeinerung der Serpentine.

Vor Newton wurde diese mathematische Kurve 1692 schon von de L'Hôpital und Huygens untersucht.

Die Kurve wird auch Anguinea genannt, nach lateinisch anguis = Schlange.

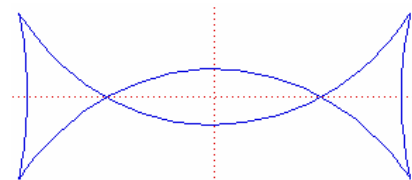


Deutung

Ein Kreis mit dem Radius b sei um den Punkt $x = b, y = 0$ geschlagen.

Ein Strahl aus $x = 0, y = 0$, der mit der x-Achse den Winkel t einschließt, schneidet den Kreis bei $y = y(t)$ und die Gerade $y = a$ bei $x = x(t)$.

Talbot-Kurve



Die Kurve wurde erstmals von Talbot beschrieben.

Kartesische Koordinaten:

$$x = (a^2 + f^2 \sin^2(t)) \cos(t)/a$$

$$y = (a^2 - 2f^2 + f^2 \sin^2(t)) \sin(t)/b$$

Die Kurve wurde zuerst 1821 von Talbot untersucht. Intensive Studien führte 1846 Tortolini durch.

Teufels-Kurve

Die Teufels-Kurve (Devil's Curve) wurde 1750 von Gabriel Cramer und 1810 von Lacroix untersucht. Erwähnt wird die Kurve 1858s in "Nouvelles Annales".

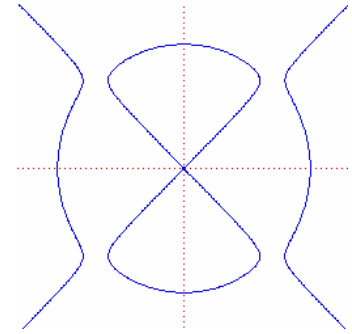
Kartesische Koordinaten $y^4 - x^4 + a y^2 + b x^2 = 0$
 Polarkoordinaten $r^2 (\sin^2\theta - \cos^2\theta) = a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta$

Parameterdarstellung

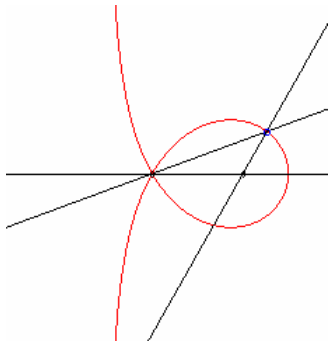
$$x = \cos t \sqrt{[a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t] / (\sin^2 t - \cos^2 t)}$$

$$y = \sin t \sqrt{[a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t] / (\sin^2 t - \cos^2 t)}$$

Die Namensbildung ist kurios. Ursprünglich wurde die Kurve nach ihrer Ähnlichkeit mit dem Diabolo-Spielgerät benannt. Diabolo kommt dabei aus dem Griechischen und bedeutet $\delta\iota\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ = "ich werfe hinüber". Da aber in der italienischen Sprache diabolo = Teufel bedeutet, wurde daraus der englische und deutsche Kurvenname.



In der Abbildung ist ein Spezialfall der Teufelskurve zu sehen. Auf Grund ihrer "Ähnlichkeit" mit Rotor und Stator eines Elektromotors wird dieser Spezialfall auch "Elektromotor-Kurve" genannt.



MacLaurinsche Sektrix

Gegeben seien zwei Punkte A(a, 0) und B(b, 0) auf der Abszissenachse. Um den Punkt A rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit eine Gerade und erzeugt damit ein Strahlenbündel. Um den Punkt B rotiert ebenfalls eine Gerade. Diese Rotationsgeschwindigkeit und -richtung ist veränderlich. Gesucht ist die Ortskurve aller Schnittpunkte.

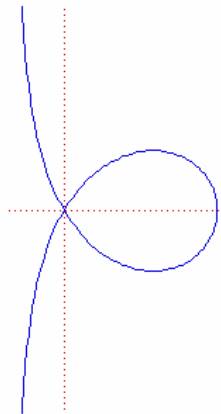
Die entstehende Kurve ist eine MacLaurinsche Sektrix.

Die Kurve wurde 1742 von MacLaurin (nach Colin MacLaurin 1698-1746) eingeführt und 1828 von Plateau und 1895 von Kempe untersucht. Andere bekannte Namen sind Sektrix von Plateau oder isozyklotomische Kurve.

Polargleichung bei Ursprung in O $\rho = a \sin(\theta_0 + k\theta) / \sin(\theta_0 + (k-1)\theta)$

Interessante Schnittkurven ergeben sich für folgende Verhältnisse B:A mit einem Phasenwinkel von 0°:

Verhältnis B:A	Kurve	Verhältnis B:A	Kurve
3	Strophoide	2	Kreis
1,5	Kubik	1	keine Kurve
0,5	Kreis	-0,5	Hyperbel
-1	Gerade	-2	Hyperbel durch A



Trisektrix von Maclaurin

Kartesische Koordinaten $y^2 (a+x) = x^2 (3a-x)$

Polarkoordinaten $r = 2a \sin(3\phi) / \sin(2\phi)$

Parameterdarstellung $x = a (3 - t^2)/(1 + t^2)$ $y = tx$

Diese Kurve wurde 1742 zuerst von Colin Maclaurin untersucht. Wie viele andere Kurven kann auch diese zur Lösung eines der klassischen griechischen Probleme, der Dreiteilung des Winkels, benutzt werden. Auf Grund dieser Tatsache erhielt die Kurve auch ihren Namen.

Eine weitere Gleichung in Polarkoordinaten ist $r = a \sec(\phi/3)$ wobei nun der Koordinatenursprung im Innern der Schleife und der Kreuzungspunkt auf der negativen x-Achse liegen.

Die Tangenten im Ursprung haben einen Anstiegswinkel von $\pm 60^\circ$. Die Fläche in der Schleife hat einen Inhalt von $3\sqrt{3} a^2$. Der rechte Schnittpunkt der Schleife mit der x-Achse befindet sich in einem Abstand von 3a vom Ursprung.

Die Trisektrix kann auch mechanisch erzeugt werden.

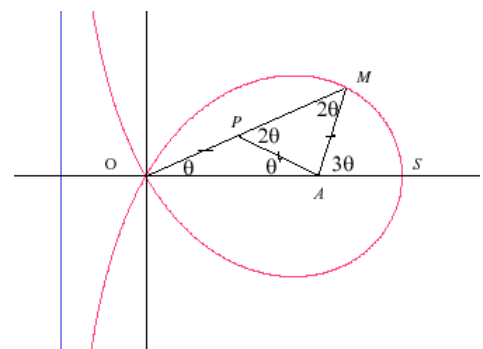
Dazu lässt man zwei Geraden in den Punkten O und A in der gleichen Richtung rotieren. Dreht sich die Gerade in A dreimal so schnell wie die in O, so beschreiben die Schnittpunkte beider Geraden die Trisektrix-Kurve. Die Kurve entsteht auch bei der Inversion einer speziellen Hyperbel an einem Kreis.

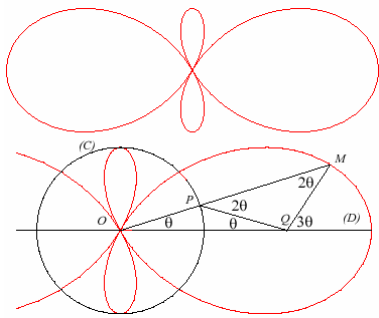
Winkeldritteln mit der Trisektrix

Hat man eine genaue Zeichnung einer Trisektrix, so findet man A als Teilungspunkt 2:1 der Strecke vom Kreuzungspunkt O zum Scheitelpunkt.

Trägt man nun in A den Winkel an, den man Dritteln will, so braucht man nur den Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Trisektrix mit O zu verbinden und erhält den Drittelwinkel.

Da aber der exakte Verlauf der Trisektrix nicht allein mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten konstruiert werden kann, ist so auch die Winkeldreiteilung nicht mit Zirkel und Lineal möglich.





Trisektrix von Ceva

Die Trisektrix von Ceva ist mit der Trisektrix von MacLaurin unmittelbar verwandt. Ein Teil dieser Kurve von Ceva entsteht durch Drehung der Maclaurinschen Kurve um 90° im Koordinatensystem.

Kartesische Koordinaten $(x^2 + y^2)^3 = a^2 (3x^2 - y^2)^2$

Polarkoordinaten $r = a \sin(3\phi) / \sin(\phi)$

Im Französischen wird die Kurve auch "trèfle à 4 feuilles" = "vierblättriges Kleeblatt" genannt.

Auch diese Kurve kann zum Winkeldritteln genutzt werden. Vom Ursprung O aus wird ein Kreis mit dem Radius a, gleich dem Kurvenparameter, und eine Gerade, die den Kreis in P, die Trisektrix von

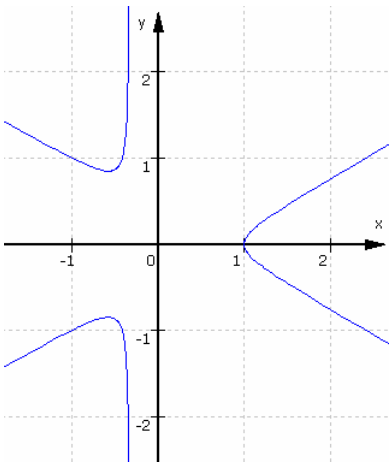
Ceva in M schneidet, gezeichnet.

Die Strecke OP wird auf der Abszissenachse von P aus angetragen, wodurch der Punkt Q entsteht. Dann ist der Winkel bei Q gerade dreimal so groß, wie der Winkel am Ursprung.

Sektrix von Ceva

Verallgemeinert man die Kurve auf $r = a \sin((2n+1)\phi) / \sin(2\phi)$,

so ergibt sich ein "Sektrix" genanntes Gebilde. Mit dieser Kurve kann man auf analoge Weise Winkel in 2n+1 Teile zerlegen.



Gleichseitiges Dreiblatt

Die Kurve wurde 1888 von Longchamps untersucht und trägt auch den Namen Trisektrix von Longchamps. Wie der Name sagt, kann diese auch zur Winkeldreiteilung genutzt werden.

Kartesische Koordinaten $x(x^2 - 3y^2) = a(x^2 + y^2)$

Polarkoordinaten $r = a / \cos(3\phi)$

Parameterdarstellung $x = a(1+t^2)/(1-3t^2)$

$y = tx$ mit $t = \tan \phi$

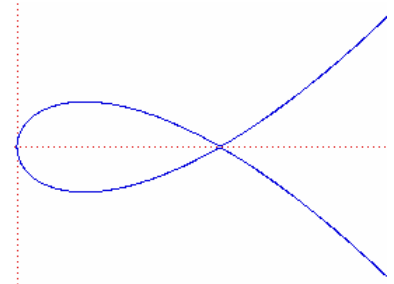
Die drei Asymptoten der Kurve bilden ein gleichseitiges Dreieck. Das gleichseitige Dreiblatt entsteht, wenn die Kurve "Dreiblättriges Kleeblatt" (Trifolium) $r = a \sin(3\phi)$ an einem Kreis mit dem Radius a invertiert wird.

Tschirnhaus-Kurve

Kartesische Koordinaten:

$$3ay^2 = x(x-a)^2$$

Diese Kurve wurde zuerst von Tschirnhaus untersucht, später auch von L'Hôpital und Catalan. Mitunter werden deshalb auch die Bezeichnungen L'Hospital-Kurve oder Trisektrix von Catalan benutzt. Der Name Tschirnhausen-Kurve findet sich erstmals 1900 in einem Werk von R.C. Archibald, welcher dort Kurven klassifizierte; nach Ehrenfried Tschirnhausen (1651-1708), deutscher Physiker. Die Kurve ist eine Verallgemeinerung der Tropfen-Kurve.



Tropfen-Kurve

Die Tropfen-Kurve (engl. teardrop curve) ist eine Verallgemeinerung der Birnenform-Kurve 4. Grades.

Allgemeine Gleichung $y^2 = x^n (1 - x)$

Für unterschiedliche Parameter n ergeben sich als Sonderfälle

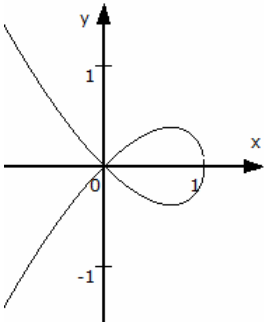
n = 1: ein Kreis

n = 2: die Tschirnhausen-Kurve (Abbildung)

n = 3: die Birnenformkurve

Parametergleichung $x = \cos t$ $y = \sin t \sin^{n-1}(t/2)$

Eine Verallgemeinerung der Tropfen-Kurve ist die Perle von Sluze.



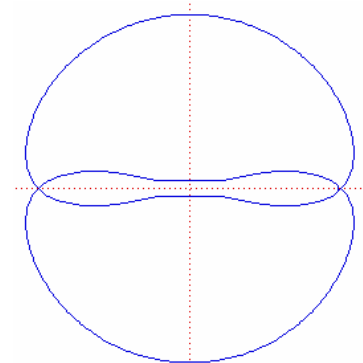
Watt's Curve

Polarkoordinaten $r^2 = b^2 - (a \sin \phi \pm \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \phi})^2$

Die Kurve wurde nach dem englischen Erfinder der Dampfmaschine James Watt (1736-1819) benannt. Der Grund liegt darin, dass die Bewegung einer an zwei Rädern gleichen Durchmessers befestigten Stange entspricht. Gegeben sind zwei Räder des Radius b deren Mittelpunkte den Abstand 2a haben. Eine Stange der Länge 2c wird mit je einem Ende an beiden Rädern befestigt.

Ist P der Mittelpunkt der Stange, so beschreibt P bei der Bewegung der Räder die Form der Watt-Kurve. Ist $a = c$, so stellt die Kurve einen Kreis mit dem Radius b dar, welchem eine "Acht" einbeschrieben ist.

Sylvester, Kempe und Cayley entwickelten 1870 die geometrische



Erklärung dieser Kurve. Darüberhinaus bewies Kempe, dass jedes endliche Segment einer algebraischen Kurve auf analoge Weise durch die Bewegung einer Stange konstruiert werden kann.

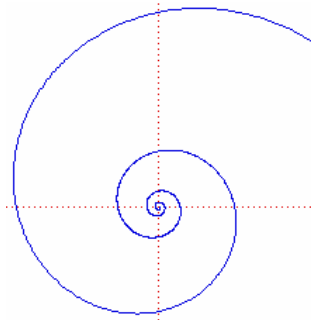
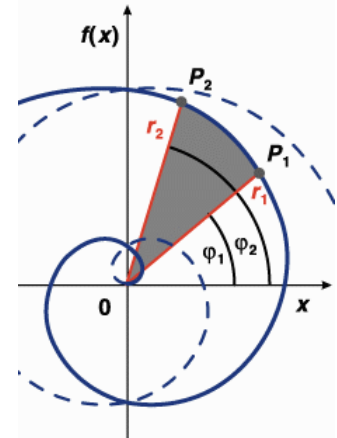
Spirallinien

Spiralen (Spirallinien) lassen sich allgemein darstellen durch $r = f(\phi)$, wobei f eine streng monotone Funktion ist.

Die Parameterdarstellung ist:

$$x = f(t) \cos t \qquad y = f(t) \sin t$$

Für die Punkte $P_1(r = r_1, \phi = \phi_1)$, $P_2(r = r_2, \phi = \phi_2)$ und $O(0 ; 0)$ sind dann der Bogen P_1P_2 das Streckenstück zwischen P_1 und P_2 sowie der Sektor P_1OP_2 die von den Strecken OP_1 und OP_2 mit dem Bogen P_1P_2 eingeschlossene Fläche.



Logarithmische Spirale 'spira mirabilis' (nach Bernoulli)

$$r = a e^{k\phi}$$

Die logarithmische Spirale schneidet alle vom Ursprung ausgehenden Strahlen unter dem Winkel α .

Länge des Bogens

Länge des Bogens ab Ursprung

Schnittwinkel

Krümmungsradius

Pol ist asymptotischer Punkt

$$l = (r_2 - r_1) / \cos \alpha$$

$$l_0 = \sqrt{(1 + k^2)} / k r$$

$$\cot \alpha = k$$

$$\rho = r \sqrt{(1 + k^2)}$$

In der Natur ist die logarithmische Spirale als Wachstumsspirale von Bedeutung. In erstaunlicher Vollkommenheit wird sie vom Kopffüßer Nautilus macromphalus ausgebildet. (siehe unten) Auch viele Schnecken bauen ihre Häuser so, dass der Winkel zwischen Radialstrahl und Spirale konstant ist und einige Spinnenarten legen in dieser Form ihre Netze an.

Letztendlich nähern sich sogar die Spiralarme der Galaxien der logarithmischen Spirale an.

Entdeckt wurde die Spirale zuerst von Descartes. Toricelli ermittelte die Länge der Spirale. 1692 erhielt die Kurve von Jakob Bernoulli ihren heutigen Namen.

Logarithmische Spirale beim Nautilus

Eine wunderbare logarithmische Spirale kann man bei einem lebenden Fossil, dem Nautilus finden. Hier wird auch deutlich, dass logarithmische Spiralen bei biologischen Wachstumsprozessen eine überaus wichtige Rolle spielen.

Das Perlboot, Nautilus pompilius, ist - zusammen mit seinen nächsten Verwandten wie Nautilus macromphalus oder Allonautilus scrobiculatus - der letzte Vertreter der Kopffüßer (Cephalopoden, "Tintenfische"), die eine Außenschale besitzen. Bei dieser Gruppe befindet sich der Weichkörper im vorderen Teil des Gehäuses (Wohnkammer). Der hintere, durch Wände (Septen) unterteilte und z.T. mit Flüssigkeit, meist aber mit Gas gefüllte Bereich (Phragmokon), dient dem Auftrieb.

Die heutigen Vertreter der Nautiliden leben in Wassertiefen bis zu 600 m, meist um 400 m, nur selten beobachtet man sie nahe der Wasseroberfläche. Soweit man dies in Erfahrung bringen konnte, halten sich die Tiere am Boden oder in Bodennähe auf. Ihr Verbreitungsgebiet sind die tropischen Meere außerhalb der Korallenriffe, die die Inseln des westlichen Pazifiks umgeben.



Logarithmische Spirale in der Natur

Phyllotaxis

Die Betrachtung der Kerne im Fruchtstand der Sonnenblume zeigt, dass sich hinter den auf den ersten Blick zufällig erscheinenden Anordnungen tiefere mathematische Gesetzmäßigkeiten stehen.

Die Kernanordnungen bei der Sonnenblume sind ein Beispiel für ein Phänomen, welches in der Botanik mit dem Begriff "Phyllotaxis" = "Blattabstand" bezeichnet wird.

Die meisten Pflanzen bilden in regelmäßigen Abständen neue Blätter. Die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Blattstellung zu untersuchen, ist ein eigenes Wissenschaftsgebiet.

Eine der wichtigsten Beobachtungen ist, dass zeitlich aufeinanderfolgende Blätter mit sehr geringen Abweichungen stets den gleichen, für die jeweilige Pflanze charakteristischen Winkel einschließen. Dem liegt die Tatsache zugrunde, dass Wachstumsprozesse von Pflanzen in der Regel einer logarithmischen Spirale folgen.

Deutlich wird dies zum Beispiel bei Bäumen wie der Ulme, der Linde, der Buche oder der Haselnuss, aber auch bei Ananas und Tannzapfen kommt eine spiralförmige Anordnung vor.

Phyllotaxis-Erklärung

Die ersten Erklärungsversuche für das Auftreten der Fibonacci-Zahlen bei Pflanzen gab es schon im 18. Jahrhundert.

Man ging damals davon aus, dass das Wachstum von Blättern durch die Beschattung begrenzt wird. Während zum Beispiel bei einem Winkel zwischen den Blättern von $\pi/2$ jedes Blatt genau unter dem viertnächsten Blatt stehen und auf diese Weise nur noch recht wenig Licht abbekommen würde, erweist sich der Winkel des goldenen Schnitts in dieser Hinsicht als optimal.

Heute gilt diese These als veraltet, da sie durch Experiment widerlegt wurde. Statt dessen sucht man nach physiologischen und ontogenetischen Modellen, d.h. solchen, die versuchen, das Auftreten der Fibonacci-Zahlen durch Vorgänge bei der Blattenstehung zu erklären.

Zellteilungen finden bei einer Pflanze nur in einem relativ kleinen kegelförmigen Bereich an der Sproßspitze statt, dem Apex. Dieser wird meist von den jüngeren Blättern verdeckt und ist deshalb nicht zu sehen. Blätter entstehen als kleine Ausstülpungen (Primordien) etwas unter der Kegelspitze. Welche Vorgänge genau zur Bildung eines solchen Primordiums führen, ist unbekannt.

Es ist plausibel anzunehmen, dass die Anwesenheit von älteren Primordien die Entstehung von neuen beeinflusst. So würde verhindert werden, dass die Blätter zu dicht wachsen. Diese Beeinflussung könnte geschehen durch:

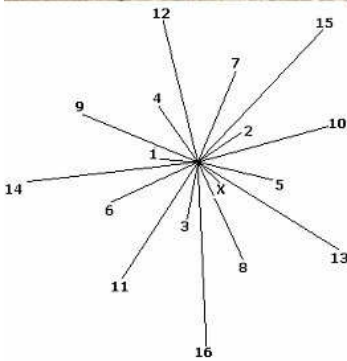
Hemmstoffe

Konkurrenz um Nährstoffe; bis die Blätter eigenes Leitgewebe ausgebildet haben, erfolgt die

Versorgung mit Nährstoffen durch einfache Diffusion

Mit Hilfe solcher und weiterer Annahmen kann man zeigen, dass der Winkel des goldenen Schnitts bevorzugt wird. Allerdings reproduziert kein Modell genau alle in der Wirklichkeit realisierten Blattstellungen.

Quelle: <http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node9.html>



Sonnenblume-Phyllotaxis

In der Abbildung ist eine Sonnenblume von oben zu sehen.

Betrachtet man deren Blätter und nummeriert diese von oben nach unten, so ergeben sich die unten dargestellten Blattpositionen.

Aufeinanderfolgende Blätter bilden im mathematisch negativer Richtung stets einen Winkel von $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618\dots$ des Vollwinkels, d.h. etwa $222,5^\circ$. Dieser Winkel ist unmittelbar mit dem goldenen Schnitt verbunden.

Betrachtet man, wie viele Blätter auf einer Umdrehung auftreten, bis man wieder etwa zu Blatt kommt, so zeigt sich

Blattzahl	Umdrehungen
3	1
5	2
8	3

Abbildung: Seitenansicht der Sonnenblume

D.h., die Blattzahl entspricht erneut der mit dem goldenen Verhältnis und der logarithmischen Spirale verbundenen Fibonacci-Folge.

Wanderfalke - *Falco peregrinus*

Durch den Biologen Vince A. Tucker der Duke University in Nord-Carolina wurde festgestellt, dass Wanderfalken bei der Jagd ihre Beute nicht direkt geradlinig anfliegen, sondern das Ziel in Form einer logarithmischen Spirale immer näher

umkreisen.

Dies ist scheinbar verwunderlich, da Wanderfalken bis zu 200 km/h erreichen können und der Vorteil der großen Geschwindigkeit auf einer Bahn längs einer logarithmischen Spirale etwas verloren geht.

Zur Erklärung des Verhaltens der Wanderfalken muss man wissen, dass diese geradeaus befindliche Beute mit ihren außergewöhnlichen "scharfen Augen" nur

sehen können, wenn sie ihren Kopf um 40° nach links oder rechts neigen. Ein Direktanflug wäre nur möglich, wenn der Vogel seinen Kopf neigt. Dies hätte einen hohen Geschwindigkeitsverlust zur Folge.

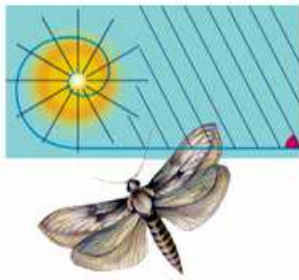
Bewegt sich der Wanderfalke aber auf einer logarithmischen Spirale, so muss er den Kopf nicht neigen.

Da nun der Schnittwinkel zwischen einem Brennpunktstrahl; vom Ort der Beute ausgehend; und der Tangente für einen beliebigen Punkt der logarithmischen Spirale konstant ist, muss der Wanderfalke während des Anflugs die Kopflage nicht verändern und kann mit einer möglichst großen Geschwindigkeit sein Ziel erreichen.

Biologische Daten des Wanderfalken: Länge 40-48 cm, wie bei den anderen Falken ist das Männchen kleiner als das Weibchen. Liebt offene Landschaften von den Niederungen bis in die Gebirge mit lichten Wäldern, Hainen und Gebüsch.



Frisst Vögel bis zu Krähen- und Taubengröße. Der Wanderfalke horstet auf Felsen oder Bäumen, gelegentlich auch am Boden. Stand- bzw. Strichvogel. V: Fast über die ganze Welt, er wird in Europa durch Wilderei jedoch immer seltener.



Schmetterlinge und Motten

Ein weiterer Vorgang in der Natur führt überraschenderweise auch zu einer Anwendung der logarithmischen Spirale. Schmetterlinge und Motten orientieren sich während ihres Fluges an der Sonne bzw. am Mond. Dabei fliegt das Insekt geradlinige Strecken so, dass Sonne bzw. Mond unter einem konstanten Winkel im Komplexauge eintreffen. Da beide Himmelskörper sehr weit entfernt sind, fallen ihre Lichtstrahlen nahezu parallel ein und geben damit einen guten Kompass ab. Im Normalfall garantiert dieses Verhalten, dass das Insekt auch wieder zurückfindet.

In den letzten Jahrhunderten und vor allem im 20. Jahrhundert haben künstliche Lichtquellen stark zugenommen.

Das Problem ist nun, dass eine Motte, die nachts zum Beispiel in der Nähe einer Kerze vorbeifliegt, diese für den Mond hält und unter einem konstanten Winkel weiterfliegt. Da die Lichtquelle aber sich in unmittelbarer Nähe befindet, muss das Insekt, wenn es den Winkel einhält, sich auf einer logarithmischen Spirale bewegen, die es immer mehr in Richtung Flamme bringt. Im Endeffekt verbrennt die Motte. Dies ist aber kein "Selbstmord" oder das Streben nach Licht, sondern das Ergebnis des vererbten Navigationssystems.

Logarithmische Spirale - Schnittwinkel

$P(r, \phi)$ sei ein Punkt der logarithmischen Spirale $r = m^\theta a$. Der Winkel zwischen der Tangente in P und der Spirale sei ϕ . Dann ist

$$dr/d\theta = a * m^\theta * \ln(m) = r * \ln(m)$$

P' sei ein weiterer Punkt der Spirale, so dass die Tangente in P die Grenzlage der Geraden PP' darstellt, wenn sich P' dem Punkt P nähert. Dann ist PN senkrecht zu OP' und es gilt:

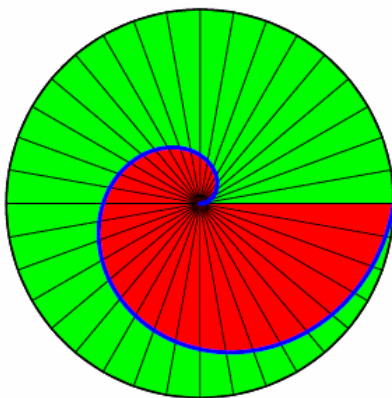
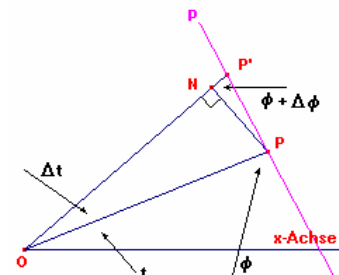
$$\sin(\Delta\theta) = PN/r$$

Für kleine Winkel $\Delta\theta$ ist $\sin(\Delta\theta) = \Delta\theta$ und somit $PN = r * \Delta\theta$. Außerdem wird bei dem Grenzübergang $P' \rightarrow P$:

$$\tan \phi = \lim \tan(\phi + \Delta\theta) = \lim PN/P'N = \lim r \Delta\theta/\Delta r = r d\theta/dr$$

und somit $\tan \phi = 1 / \ln(m)$

D.h. der Schnittwinkel ϕ zwischen Brennpunktstrahl und der Tangente ist für einen beliebigen Punkt der logarithmischen Spirale konstant ("gleichwinklige Spirale"). Damit ergibt sich auch die Definitionsgleichung $r = a e^{\theta \cot \phi}$



Logarithmische Spirale (2)

Nach einer Anekdote pflegte Archimedes seine gelehrten Besucher mit der Frage zu nerven, wie groß der rote Anteil an der gesamten Kreisfläche sei.

Dabei ist die blaue Trennkurve zwischen den Farben eine so archimedische Spirale. Der Abstand vom Kreiszentrum nimmt gleichmäßig zu.

Die archimedische Spirale wird durch $\rho(\phi) = r/(2\pi) \phi$
bzw. $\phi(\rho) = 2\pi/r \rho$

beschrieben. Für das Flächenelement erhält man

$$dA = \rho d\phi d\rho$$

Für die Integration wird

$$A = \int dA = \int \rho d\phi d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r\phi/(2\pi)} \rho d\rho \right] d\phi$$

Etwas Rechnen ergibt $\int_0^{r\phi/(2\pi)} \rho d\rho = r^2 \phi^2 / (8\pi^2)$

und $A = \pi/3 r^2$

Das Archimedes, ohne Kenntnis der Integralrechnung, den Flächeninhalt ermitteln konnte, ist einer seiner bemerkenswerten Leistungen.

Logarithmische Spirale und goldener Schnitt

Diese Schweizer Briefmarke wurde zum 150-jährigen Bestehen des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins SIA herausgegeben und enthält eine interessante mathematische Konstruktion; die Briefmarke zeigt den Zusammenhang des Goldenen Schnitts mit der Logarithmischen Spirale. Im Einzelnen ist zu sehen:

die Koordinatenachsen als gestrichelte Linien, eine nach dem



Goldenen Schnitt konstruierte Folge von sieben Rechtecken und sechs Quadraten, eine logarithmische Spirale, ein spiralförmiger Polygonzug

Ausgehend von einem goldenen Rechteck, d.h. die Seitenlängen stehen im goldenen Verhältnis von $1 : 1/2(\sqrt{5} + 1)$, werden auf die längeren Rechteckseiten Quadrate aufgesetzt. Damit erhält man wieder Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt.

Eine logarithmische Spirale berührt nun einzelne dieser Eckpunkte der aufgesetzten Quadrate, und zwar diejenigen, welche auf den Winkelhalbierenden der Quadranten liegen.

Konstruktion

Ausgegangen wird von einem Rechteck, dessen Proportionen dem Goldenen Schnitt entsprechen. Die Seitenlängen stehen damit im Verhältnis $\tau = a/b = (a+b)/a = 1/2(\sqrt{5} + 1) \approx 1,618$ ("Goldene Zahl") bzw. $\sigma = b/a = 1/2(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618$. Teilt man in einem Goldenen Rechteck ein Quadrat ab oder setzt ein Quadrat an die längere Rechteckseite an, so erhält man wieder Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt.

Diese Konstruktion von immer größeren Rechtecken durch Ansetzen von Quadraten beginnt auf der Briefmarke mit dem kleinen Rechteck, das den Koordinatenursprung enthält. Durch sechsmaliges Ansetzen von Quadraten im Gegenuhrzeigersinn erhält man die sieben Rechtecke mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnitts.

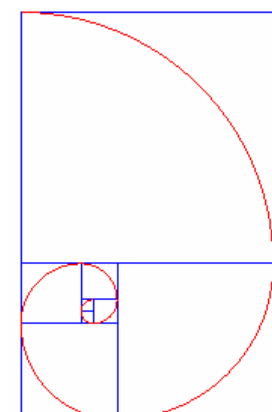
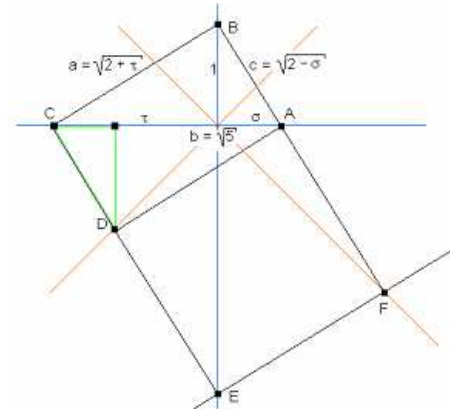
Wie liegen die Rechtecke und Quadrate zu den Koordinatenachsen und Diagonalen? Diese Frage kann vollständig mit der Konstruktion eines einzigen Rechtecks und des angrenzenden Quadrates beantwortet werden, z.B. indem man mit dem kleinsten Rechteck beginnt. Man legt ein Rechteck mit den Proportionen des Goldenen Schnitts mit drei Ecken A, B, C auf die Koordinatenachsen. Es sollen nun die Abstände von A, B, C vom Koordinatenursprung O und die Lage von D berechnet werden. Da die Graphik auf der Briefmarke keinen Maßstab aufweist, kann eine Strecke beliebig vorgegeben werden; dies ist in der nachfolgenden Abbildung die Höhe (= 1) des Dreiecks ABC.

a berechnet man aus $a * c = b$; $c = \sigma * a$, $b^2 = a^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{2+\tau}$. Mit a berechnet man b und c: $c = \sqrt{2-\sigma}$ und $b = \sqrt{5}$ und somit $OA = \sigma$, $OC = \tau$. Das grün eingezeichnete Dreieck hat die gleichen Maße wie OAB, also hat D jeweils den Abstand 1 von den Achsen. Wir erhalten also für A, B, C, D die folgenden Abstände von O im Gegenuhrzeigersinn: $\sigma, 1, \tau$ auf den Achsen, $\sqrt{2}$ auf der Diagonalen. Wird nun das Quadrat ADEF angesetzt, folgt aus der Lage von A und D, dass E auf der Koordinatenachse zwischen A und D liegt und dass gilt $OE = \tau^2$, $OF = \sqrt{2} * \tau$. Das Rechteck BCEF genügt auch dem Goldenen Schnitt; es wiederholen sich alle Überlegungen zu ABCD, denn es liegen wieder drei Ecken auf den Achsen. Die Höhe des Dreiecks BCE ist die Goldene Zahl, also sind alle oben berechneten Längen damit zu multiplizieren.

Dieses Verfahren lässt sich iterieren. Ausgehend vom innersten Rechteck erhält man durch sukzessives Ansetzen von Quadraten weitere Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt. Es wurde gezeigt, dass dann jeweils drei Ecken auf den Achsen liegen, die vierte auf einer Diagonalen. Die Abstände dieser Ecken von O sind beim (n+1)-ten Rechteck im Gegenuhrzeigersinn: $\sigma * \tau^n, \tau^n, \tau * \tau^n, \sqrt{2} * \tau^n$. Bei jedem Schritt wandert die Lage dieser Ecken um 90° im Gegenuhrzeigersinn weiter.

Logarithmische Spiralen haben die Parametergleichung $r = d e^{p\varphi}$ ($d > 0, p > 0$). In der Graphik der Briefmarke erhält man alle Berührpunkte der Spirale mit den Rechtecken bzw. Quadraten, wenn man diejenigen Ecken der Rechtecke auswählt, die auf den Winkelhalbierenden liegen. Die Folge der zugehörigen Abstände von O ist $\sqrt{2}, \tau * \sqrt{2}, \tau^2 * \sqrt{2}, \dots$ und die Berührpunkte wandern im Gegenuhrzeigersinn jeweils um 90° . Sie liegen somit auf einer Logarithmischen Spirale, und wir können den Parameter p zu $2 \ln \tau / \pi$ berechnen. Setzt man für den Anfang der Spirale auf der Marke $\varphi = -135^\circ$, so ergibt sich für d etwa 2.91.

Damit ist geklärt, wie der Goldene Schnitt mit einer Logarithmischen Spirale zusammenhängt und wie die Konstruktion auf der Briefmarke durchgeführt wurde.



Anmerkung: Durch Vandevorde ("Comment on the Swiss Engineers' and Architects' Stamp") wurde nachgewiesen, dass der Graphiker der Briefmarke es sich etwas leicht gemacht hat und die Berührpunkte durch Viertelkreise verbunden hat. Der Unterschied zur logarithmischen Spirale liegt aber noch im Bereich der "künstlerischen Freiheit".

Goldene Spirale, Fibonacci-Spirale

Eng verbunden mit logarithmischen Spirale, dem goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen ist die goldene Spirale oder Fibonacci-Spirale.

Diese entsteht durch Einschreiben von Viertelkreisen in die quadratischen Abschnitte des goldenen Rechtecks. Diese Kurve unterscheidet sich etwas von der logarithmischen Spirale. In der Abbildung ist die goldene Spirale in rot und die logarithmische Spirale in grün dargestellt.

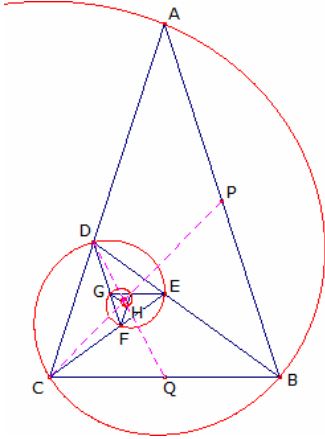
Die von der goldenen Spirale durchlaufenen Quadrate im goldenen Rechteck haben das Seitenverhältnis

$$1 : 1/\phi : 1/\phi^2 : 1/\phi^3 : \dots$$

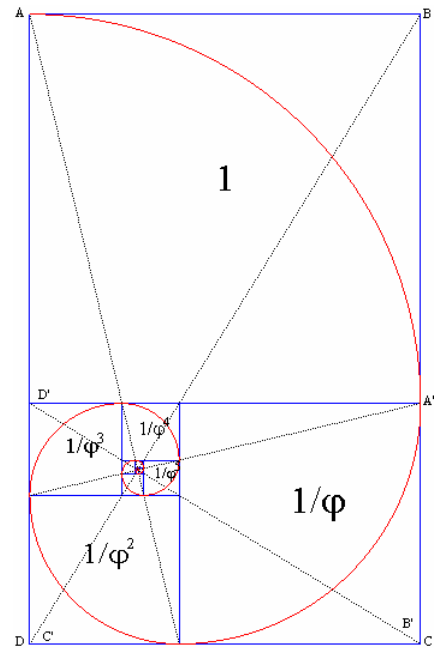
Auf analoge Weise kann die Spirale von Padovan erzeugt werden. Bei dieser werden gleichseitige Dreiecke aneinander gefügt.

Logarithmische Spirale und goldenes Dreieck

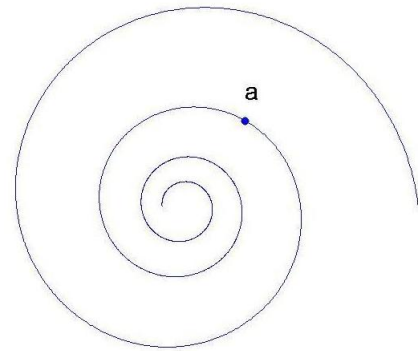
In Analogie zur Konstruktion einer logarithmischen Spirale am goldenen Rechteck kann auch das goldene Dreiecke verwendet werden.



Die Dreiecke ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, ... sind ähnlich, da sie durch die Winkelhalbierenden der Winkel bei B, C, D, E, F, G, ... erzeugt werden. Der Pol O der Spirale ist dann der Schnittpunkt O von der Seitenhalbierenden CP des Dreieck ABC und der Seitenhalbierenden DQ von Dreieck BCD. Der Winkel zwischen diesen Linien ist gerade 72° .



Die logarithmische Spirale ("ewige lini") bei Dürer

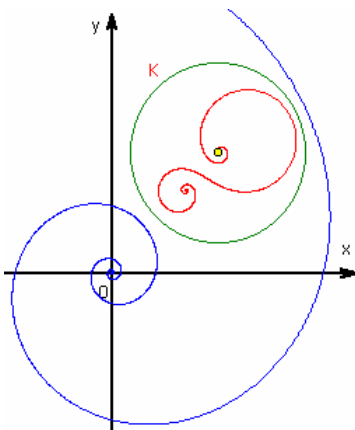


Zum Schluss seiner Konstruktionsbeschreibungen für "Schneckenlinien" gibt Dürer noch eine Beschreibung einer logarithmischen Spirale, für die er in Ermangelung einer korrekten mathematischen Bezeichnung den Begriff "ewige lini" verwendet:

Es mag ein ewige lini erdacht werden/die da stetiglich zu eim Zentrum eynewartz/auch an dem andern teyl in die weyten über einander laufft/un nymer mehr zu keym end kombt/Dise lini kan man mit der hand der unentlichen grösse und kleine halben nit machen/Dann ir anfang und end so sie nit sind/ist es nit zu finden/das fast allein der verstand/Aber ich will sie unden mit eim anfang un end/so vil dan müglich ist antzeige/ Ich heb an bey eim puncten .a. un zeuch dise lini zirckelsweis hynein/als solt sie zu eim

Centru lauffen/un so oft sie in eynder laufft/brich ich der weiten zwische der lini ein halbteil ab/des gleiche thu ich/so ich mit der lini vom .a. herauß laufft/so oft ich mit ir über eynder laufft/so oft gib ich der lini eyn halbteyl zu/von der weyten/Also laufft dise lini ye lenger ye enger hynein/und lenger ye weyter herauß/unnd kumbt doch nymer meer zu keim ende/weder hynein noch herauß wie ich das zuverstehen hie unden hab auffgeriessen.

Dürer beschreibt eine stetig auf ein Zentrum zulaufende Kurve, die auch nach außen hin ohne Ende ist, die man daher nicht in ihrer Gesamtheit zeichnen kann. Einzig der "Verstand" kann sie vollständig erfassen. Um dennoch ein Bild von ihr zu erhalten, beginnt er die Kurve bei einem willkürlich gewählten Punkt a und läuft kreisförmig einwärts in einer solchen Weise, dass er bei einer vollen Umrundung des Zentrums den Abstand jeweils halbiert hat. Auf ähnliche Weise läuft er von a nach außen, wobei er nun bei jeder Umrundung des Zentrums den Abstand verdoppelt. Es handelt sich also um eine logarithmische Spirale, die er aber nicht konstruiert, sondern freihändig zeichnet.



Logarithmische Spirale - Inversion

Wird eine logarithmische Spirale

$$r = a e^{k\phi}$$

einer Kreis inversion unterzogen, so entsteht für einen Inversionskreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, wieder eine logarithmische Spirale.

Liegt der Kreismittelpunkt außerhalb der Ursprungs, so entstehen zwei ineinander übergehende logarithmische Spiralen (siehe Abbildung).

Da auch hier alle vom Ursprung ausgehenden Geraden unter dem gleichen Winkel geschnitten werden, spricht man hier von einer Loxodrome.

Wird der Mittelpunkt des Inversionskreise genau auf einen Punkt der Spirale gelegt, so zerfällt die invertierte Kurve in zwei getrennte logarithmische Spiralen, die gegen Unendlich streben.

Spiralarme von Galaxien

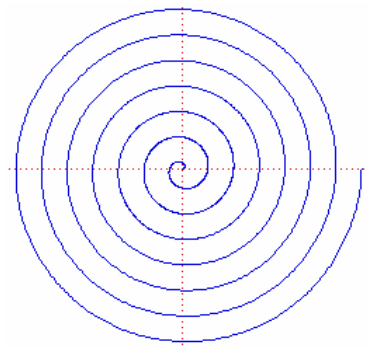
Die Spiralarme von Spiralgalaxien bilden logarithmische Spiralen. Ein sehr schönes Beispiel ist die ...

M74 ... Spiralgalaxie in den Fischen (NGC 628)

Diese Galaxie besteht aus 100 Milliarden Sternen und befindet sich in einer Entfernung von 30 Millionen Lichtjahren (Sternbild Fische, Pisces).

Die Besonderheit von M74 besteht in seiner sehr günstigen Lage im All, so dass von uns aus ein perfekter Blick "von oben" möglich ist. Damit gehört diese Galaxie zu den am meisten fotografierten. M74 ist eine Galaxis vom Typ Sc.

Diese Aufnahme wurde mit dem Gemini Multi-Object Spectrograph (GMOS) gewonnen. Das Gemini North Observatory befindet sich auf Mauna Kea (Hawaii).



Archimedische Spirale

$$r = a \phi$$

Fläche eines Sektors $A = a^2/6 (\phi_2^3 - \phi_1^3)$

Ein Punkt, der sich auf einem Lichtstrahl vom Ursprung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, während der Leitstrahl sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol dreht, beschreibt eine Archimedische Spirale. Es gilt: $a = v / \omega$

Länge des Bogens OP $l = a/2 (\phi \sqrt{\phi^2 + 1} + \operatorname{arsinh} \phi) \approx a \phi^2 / 2$

Krümmungsradius

$$\rho = (a^2 + r^2)^{3/2} / (2a^2 + r^2) = [a (\phi^2 + 1)^{3/2}] / (\phi^2 + 2)$$

Tangentenwinkel $\gamma = \arctan t$

Flächenelement $dA = (a^2/2) t^2 dt$

Bogenelement $ds = \sqrt{1 + (r/a)^2} dr$

Fläche der 1. Umdrehung $A = 4/3 \pi^3 a^2$

Die Rille einer Schallplatte ist ein gutes Beispiel für eine Archimedische Spirale, wenn die Schwankungen, die durch die Tonaufzeichnungen entstehen, vernachlässigt werden. Auch ein Klebeband auf einer Rolle und ein aufgerollter Teppich beschreiben Archimedische Spiralen.

Diese Kurve wurde von Archimedes um 225 v. Chr. in der Arbeit "Über Spiralen" erstmals untersucht. Erwähnt wurde diese Spirale zuvor schon von Conon.

Diese Kurve kann zur Winkeldreiteilung und zur Würfelverdopplung benutzt werden und ist damit selbst nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.



Archimedische Spiralen bei der Datenspeicherung

Die archimedische Spirale kommt derzeit in und auf jedem handelsüblichen Informationsträger zur Anwendung. Beispielsweise werden auf einer CD die Daten in Form von Punkten und Strichen (gleichbedeutend für 0 und 1, den kleinstmöglichen digitalen Dateneinheiten), beginnend bei der innersten Spur der CD, spiralartig nach außen geschrieben. Bei Schallplatten und Vinyls geschieht dies nach dem selben Prinzip, nur dass hier die Spiralen in umgekehrter Richtung von außen nach innen verlaufen.

Bei Audio- und Videokassetten wird die Information auf einem Magnetband gespeichert, welches anschließend einfach auf einer Spule aufgewickelt wird.

Dabei nimmt das Band wiederum die Form einer archimedischen Spirale an. Durch dieses Prinzip lassen sich riesige Bandmengen auf kleinstmöglichem Raum unterbringen.

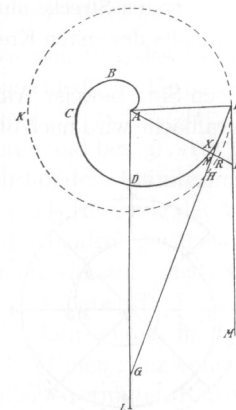
Tangentenkonstruktionen zur Archimedischen Spirale

Um die Tangente an die nach ihm benannte Spirale zu konstruieren beweist Archimedes folgenden Satz:

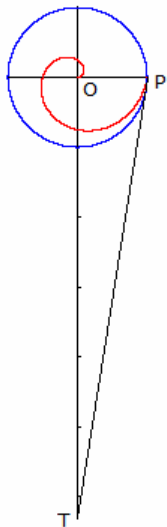
"Wenn eine Gerade die Spirale erster Umdrehung im Schnittpunkt mit der Leitlinie berührt und im festen Endpunkt des rotierenden Halbstrahls das Lot auf der Leitlinie errichtet wird, so weit, bis dieses die Tangente schneidet, so behaupte ich, dass dieses Lot [die Subtangente AG] gleich ist der Peripherie des Kreises."

Um also die Tangente im Punkt F zu konstruieren, errichtet man im ersten Schritt A die Senkrechte zur "Leitlinie" AF. Gleichzeitig schlägt man um A mit dem Radius AF den Kreis. Auf der Senkrechten wird die Länge abgetragen, welche dem Umfang des Kreises entspricht. Es entsteht die Strecke AG, welche also die Länge $2\pi AF$ hat. Die Gerade GF ist dann die gesuchte Tangente an die Spirale im Punkt F.

Da die Konstruktion der Tangente die Konstruktion einer Strecke der Länge 2π



AF erfordert, muss man also das Rektifikationsproblem für den Kreisumfang lösen. Da dieses mit Zirkel und Lineal allein nicht möglich ist, ist auch diese Tangentenkonstruktion nicht allein mit diesen Hilfsmitteln durchführbar.



Archimedische Spirale und Dreieck

Die Archimedische Spirale kann zur Quadratur des Kreises genutzt werden. Dazu kann man folgendermaßen den Umfang eines Kreises konstruieren: O sei der Mittelpunkt der Spirale, P der Endpunkt der ersten Umdrehung. Wir zeichnen durch O eine Normale zu OP und in P die Tangente an die Spirale. Den Schnittpunkt beider Geraden sei T. Dann ist OT gleich dem Umfang des Kreises mit dem Radius OP.

Beweis: Es sei die Strecke $OP = r_1$; die "erste Strecke", wie sie Archimedes nennt. Aus der Gleichung der Archimedischen Spirale folgt $r_1 = 2a\pi$.

Für den Winkel ψ zwischen der Tangente und dem Radius gilt

$$\tan \psi = r / dr/d\phi = 2a\pi / a = 2\pi$$

Am Dreieck OPT gilt weiterhin $OT = r_1 \cdot \tan \psi = 2\pi r_1$

Das Dreieck OPT hat folglich denselben Flächeninhalt wie der Kreis.

qed.

Hyperbolische Spirale

Parameterdarstellung $x = a \cos t / t$ $y = a \sin t / t$

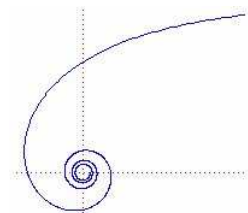
Polarkoordinaten $r = a / \phi$

Asymptote $y = a$

Fläche des Sektors
Krümmungsradius

$$A = a^2/2 (1/\phi_1 - 1/\phi_2)$$

$$\rho = a/\phi [\sqrt{(1 + \phi^2)} / \phi]^3 = r [r^2/a^2 + 1]^{3/2}$$



Die hyperbolische Spirale ist der Ort aller Punkte M für die folgendes gilt: Um den Ursprung werden Kreise mit beliebigem Radius gezeichnet. Diese Kreise schneiden die x-Achse im Punkt A. Dann ist die Länge des Bogens AM gleich dem Parameter a der Spirale.

Die Kurve ist eine transzendente Kurve. Die Spirale ist die inverse Kurve zur Archimedischen Spirale.

Diese Spirale wurde 1704 erstmals von Pierre Varignon beschrieben, 1710 bis 1713 untersuchte Johann Bernoulli die Spirale, 1722 Cotes.

Das Bild einer hyperbolischen Spirale ergibt sich, wenn man aus der Höhe einen spiralförmigen Aufgang betrachtet.



Verallgemeinerte Archimedische Spiralen

Spirallinien mit der allgemeinen Polargleichung

$$r = a \phi^{1/n}$$

wobei r der Radialabstand, ϕ der Polarwinkel und n eine Konstante sind. Die Konstante n bestimmt die Form der Spirale. Sonderfälle:

n	Kurvenname	n	Kurvenname
-2	Lituus-Kurve	-1	Hyperbolische Spirale
1	Archimedische Spirale	2	Fermats-Spirale

Krümmung der verallgemeinerten archimedischen Spirale

$$\kappa = (n \phi^{1-1/n} (1 + n + n^2 \phi^2)) / (a (1 + n^2 \phi^2)^{3/2})$$

Fermats-Spirale

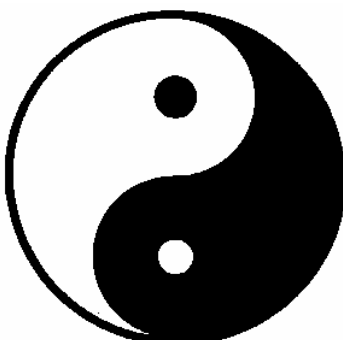
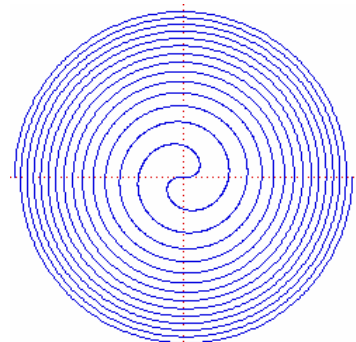
Polarkoordinaten $r^2 = a^2 \phi$

$$ds = \sqrt{1 + 4 (\rho/a)^4} d\rho$$

Diese Spirale wurde erstmals 1636 von Fermat untersucht, allerdings schon im 1. Jahrhundert von Menelaos erwähnt. Die Spirale wurde im alten China als Grundlage für das Yin und Yang Symbol genutzt.

Die Spirale ist symmetrisch zur Geraden $y = -x$ und ein Spezialfall einer parabolischen Spirale.

Die zur Fermatschen Spirale inverse Kurve hat die Gleichung $r^2 = a^2/\phi$.

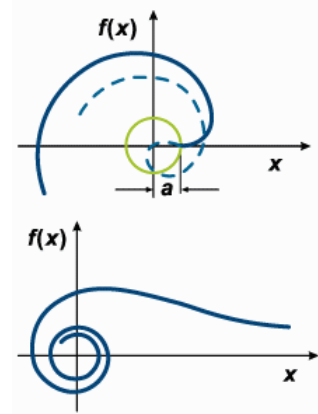


Yin und Yang

Yin und Yang ist ein altes chinesisches Symbol des T'ai-chi Tú (Diagramm der höchsten Realität).

Es besteht aus einem Kreis mit zwei aneinandergeschmiegtten schwarzen und weißen Elementen. Sie symbolisieren die beiden Urkräfte allen Seins. Die Aufteilung des Seins in die Kategorien Yin und Yang ist älter als die schriftlichen Aufzeichnungen aus China. Schon frühe Kultgegenstände zeigen die "Symbolik der Polarität und des Wechsels".

Yang repräsentiert das männliche Prinzip und steht für: hell, stark, schöpferisch, fest, Himmel, Bewegung, klar und rational.
 Yin ist das weibliche Prinzip und entspricht den Qualitäten: dunkel, schwach, ruhig-kontemplativ, nachgiebig, Erde, Ruhe, intuitiv.
 Männlich und weiblich, Tag und Nacht sind keine absoluten Gegensätze, vielmehr enthalten beide den Kern des jeweils anderen in sich. Daher enthält die schwarze Fläche des T'ai-chi-Tú-Symbols einen kleinen weißen Kern und die weiße umgekehrt einen schwarzen.
 Mathematisch gesehen, stellt das Yin und Yang Symbol ein Teil einer Fermatschen Spirale dar.



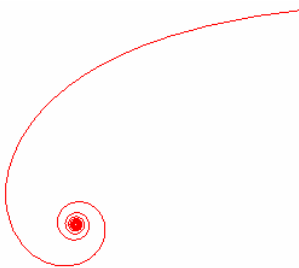
Parabolische Spirale

Gleichung $(r - a)^2 = 4 a k \phi$

Quadratisch hyperbolische Spirale

Gleichung $r^2 \phi = a^2$ Asymptote $y = 0$

Sici-Spirale



Der Name dieser Spirale, eine transzendente Kurve, wurde aus den Anfangsbuchstaben des Integralsinus (Si) und des Integralkosinus (Ci) gebildet.

Parameterdarstellung $x = a \int_t^\infty \cos u / u du = -a Ci(t)$
 $y = a \int_t^\infty \sin u / u du = a (\pi/2 - Si(t)) \quad t > 0$

Komplexe Gleichung $z = a \int_t^\infty e^{iu} / u du$

Die Kurve besitzt eine waagerechte Asymptote für $a = 1$ mit $y = \pi/2$. In Teilen ist die Kurve der hyperbolischen Spirale sehr ähnlich.

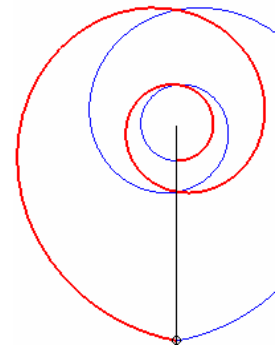
Rotationserzeugte Spirale

franz. spirale de la tige en rotation, engl. rotating rod

spiral

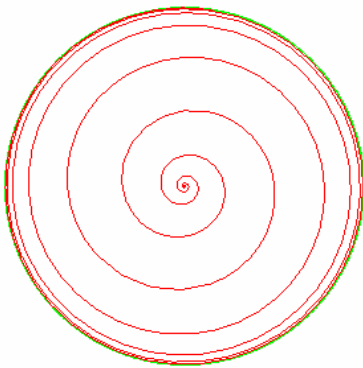
Gegeben ist ein fester Punkt, um den eine Gerade gleichförmig rotiert. Auf dieser Geraden bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit beginnend im Rotationszentrum. Dieser Punkt beschreibt dann eine Spirale.

Allgemeine Polargleichung $\rho = a e^{k\theta} + b e^{-k\theta}$



Für spezielle Werte von a, b und k ergeben sich Sonderfälle:

- 1) $b = a: \quad \rho = a \cosh(k\theta)$
- 2) $b = -a: \quad \rho = a \sinh(k\theta)$
- 3) $b = -2a$

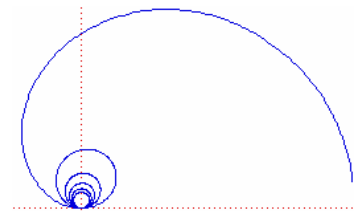


Spiralfederkurve

franz. courbe du spiral, engl. spiral spring curve
 Die Spiralfederkurve ist eine transzendente Kurve.
 Polargleichung $\rho = a / (1 + e^{m\theta})$

Cochleioide

1700 nach J.Peck
 ... Name bedeutet "schneckenförmig" und wurde erstmals 1884 von Benthon und Falkenburg verwendet
 ... die Punkte der Cochleioide, welche die Berührungspunkte einer Schar paralleler Geraden darstellen, liegen auf einer



Strophoide.

Polarkoordinaten

Kartesische Koordinaten

Parameterdarstellung

Krümmung der Cochleioide

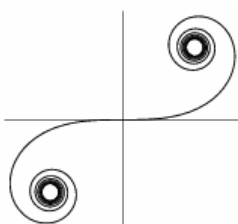
$r = a \sin \phi / \phi$

$(x^2+y^2) \arctan(y/x) = ay$

$x = a/t \sin t$

$y = a/t (1 - \cos t)$

$\kappa = 2\sqrt{2} \phi^3 (2\phi - \sin(2\phi)) / (1 + 2\phi^2 - \cos(2\phi) - 2\phi \sin(2\phi))^{3/2}$



Klothoide

Cornusche Spirale oder Eulersche Spirale

Erstmals wurde die Klothoide 1696 von Johann Bernoulli untersucht; später von 1743 Euler, 1818 Fresnel, 1874 Cornu.

Sie wurde benannt nach dem französischen Physiker Alfred Cornu (6.3.1841-11.4.1902).

Alternative Name sind Spirale von Fresnel oder Spinnlinie.

Der Name Klothoide ist aus dem griechischen κλωθω = spinnen abgeleitet.

Sie ist eine transzendente Kurve deren Krümmung proportional zur Bogenlänge ist.

Cesaro Gleichung

$$\rho \cdot s = a \quad \rho \dots \text{Krümmungsradius, } s \dots \text{Bogenlänge}$$

$$(\pm a/2 \sqrt{(\pi/2)}, \pm a/2 \sqrt{(\pi/2)})$$

Asymptotische Punkte

Komplexe Darstellung

Die Klothoide ist Menge aller Punkte z der Gaußschen Zahlenebene mit

$$B(z) = \int_0^z e^{i\pi x^2/2} dx$$

Parameterdarstellung mit Fresnelschen Integralen

$$x = a/\sqrt{2} \int_0^t \cos t dt/\sqrt{t} \quad y = a/\sqrt{2} \int_0^t \sin t dt/\sqrt{t}$$

Fresnelsche Integrale und die damit verbundene Klothoide können zur Berechnung Häufigkeitsverteilungen bei Interferenzen genutzt werden.

Anwendung der Klothoide

Loopings sind bei Achterbahnen in Vergnügungsparks sehr beliebt. Diese werden jedoch nicht, wie man annehmen könnte, in Form von Kreisen konstruiert, sondern als Klothoiden. Der Grund liegt darin, dass bei einem Kreislooping die Beschleunigung auf die Fahrgäste sofort mit voller Stärke einsetzen würde.

Bei einer Klothoide ist die Krümmung proportional zur Bogenlänge und steigert sich somit bis zum höchsten Punkt des Loopings. Damit wird die Belastung für die Fahrgäste "erträglicher".

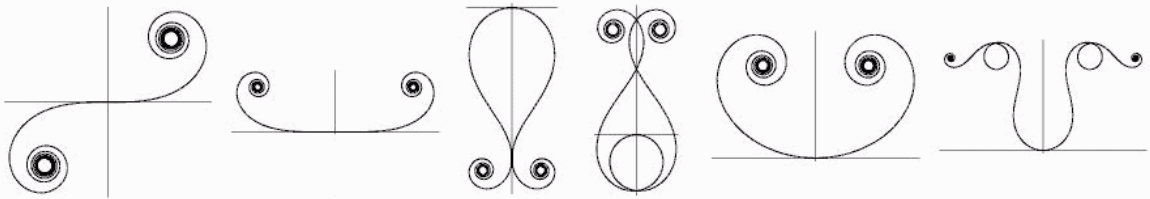
Die Abbildung zeigt eine Schleife des Doppelloopings der Shockwave-Achterbahn in Six Flags over Texas, Arlington, Texas. Die Geschwindigkeit erreicht dort immerhin 96 km/h. Ein weiteres Beispiel findet man beim Looping Star im Bobbejaanland in Belgien. Klothoidenstücke werden auch im Straßenbau, z.B. bei Autobahnknotenpunkten, oder bei die Richtung ändernden Eisenbahnstrecken genutzt.



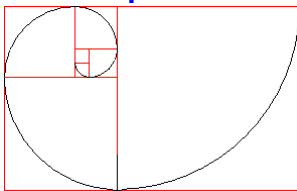
Polynomial-Spiralen

... Verallgemeinerung der Klothoide (Cornusche Spirale) durch Dillen (1990)

Krümmung k ist von links nach rechts gleich. Bogenlänge s, $s^2, s^2 - 2.19, s^2 - 4, s^2 + 1, 5s^4 - 18s^2 + 5$



Weitere Spiralen



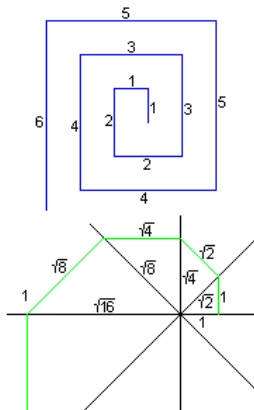
Fibonacci-Spirale

Man zeichnet zuerst zwei kleine Quadrate übereinander. Dann fügt man in Folge immer größer werdende Quadrate entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn hinzu.

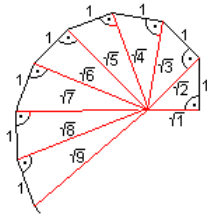
In die Quadrate werden (schwarze) Viertelkreise eingezeichnet. Sie bilden die Fibonacci-Spirale. Der Name der Spirale rührt von den Fibonaccizahlen her. Schreibt man die Seitenlängen der Quadrate der Reihe nach auf, so erhält man die Folge 1,1,2,3,5,8,13,21, ... Das sind die Fibonacci-Zahlen, die sich nach der Rekursionsformel $a(n)=a(n-1)+a(n-2)$ errechnen [$a(1)=1, a(2)=1, n>2$].

Die Spirale besteht aus Strecken der Längen 1,1,2,2,3,3,4,4,...

Aufeinanderstoßende Strecken stehen paarweise aufeinander senkrecht.



Die Spirale wird in eine Geradenkreuzung eingezeichnet, die aus vier Geraden besteht, die jeweils einen Winkel von 45° bilden. Man beginnt mit der horizontal liegenden Strecke 1 und knickt die nächste Strecke so ab, dass sie auf der nächsten Halbgeraden senkrecht steht. Die Strecken bilden eine geometrische Folge mit dem konstanten Quotienten $\sqrt{2}$. Zeichnet man eine Spirale in ein Geradenbüschel aus beliebig vielen Geraden, die gleiche Winkel einschließen, so nähert sich die Streckenspirale einer logarithmischen Spirale, wenn man die Winkel immer kleiner werden lässt.



Die nächste Spirale entsteht aus einer Kette von rechtwinkligen Dreiecken, die jeweils eine Seite gemeinsam haben. Aus der Hypotenuse eines Dreiecks wird eine Kathete des nächsten Dreiecks. Erstes Glied ist das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck 1-1-sqr(2). Die freien Katheten der Länge 1 bilden die Spirale. Das Besondere ist, dass sich die Dreiecke in Seiten berühren, deren Länge die Wurzeln aus den natürlichen Zahlen sind. Das beweist man mit dem Satz des Pythagoras. Diese Figur heißt Wurzelspirale oder Wurzelschnecke.



Spiralen in der Kunst

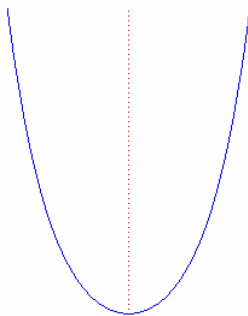
Spiralen sind nach wie vor als Ornamente zeit- und kulturübergreifend beliebt. Es gibt in der kulturellen Entwicklung des Menschen von der Steinzeit bis heute keine Epoche, in der sich die Spirale nicht als Gestaltzeichen findet. (Stoll)

Besonders zahlreich sind Spiralen in Kunst und Architektur des antiken Griechenland. Die Köpfe Ionischer Säulen laufen auf beiden Seiten spiralförmig zu. Bei Mosaiken finden sich Spiralen in Form periodischer Wellenmuster. Es finden sich auch Figuren, die deutlich an den Fruchtstand von Sonnenblumen erinnern und logarithmische Spiralen beinhalten.

In der Malerei finden sich ebenfalls Spiralen. In den Bildern Leonardo da Vincis ist die Spirale ein häufiges Motiv. Auch in seinen technischen und architektonischen Arbeiten spielen Spiralen und Schraubenlinien eine große Rolle.

Albrecht Dürer hat sich bei der Spirale vor allem um explizite Konstruktionsvorschriften bemüht. Auch bei Vincent van Gogh und Paul Klee sind Spiralen häufige Motive. In enger Verbindung zur Mathematik stehen die Graphiken von M.C.Escher. Unter ihnen findet sich neben zahlreichen Täuschungen auch das Spiralmotiv - zum Beispiel in Form von Kugelloxodromen.

Quelle: "Spiralen - Ein Kapitel phänomenaler Mathematik", Johanna Heitzer



Kettenlinie, Katenoide, Catenary

Jeder vollkommen biegsame, an zwei Punkten aufgehängte Faden nimmt in der Gleichgewichtslage die Form der Kettenlinie an.

$$y = a/2 (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh (x/a)$$

Parameterdarstellung

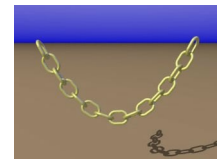
$$x = t \quad y = a \cosh (t/a)$$

Scheitelpunkt $S(0;a)$

- in der Nähe des Scheitels schmiegt sich die Parabel

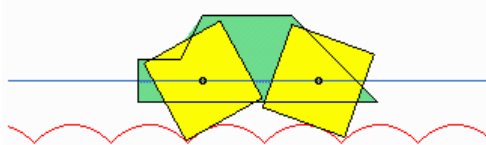
$y = x^2/(2a)+a$ der Kettenlinie sehr eng an

Die Gleichung wurde 1691 unabhängig voneinander von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli angegeben. Mit Hilfe dieser Kurve widerlegte Jungius 1669 Galileis Vermutung, Ketten würden unter Einfluss der Gravitation eine Parabel



bilden. Die Kettenlinie wird auch Alysoide genannt.

Die durch Rotation der Katenoide um die x-Achse erzeugte Rotationsfläche wird als Katenoid bezeichnet und ist eine Minimalfläche.



Eine auf den Kopf gestellte Katenoide ist die Idealform eines freitragenden schwerkräftefreien Bogens. Diese Form wurde beispielsweise annähernd für den 192 m hohen Gateway Arch in St. Louis (Missouri) gewählt. Die Kettenlinie entsteht auch, wenn Lichtstrahlen parallel zur y-Achse einfallend von der Exponentialfunktion $y = a e^{x/a}$ reflektiert werden.

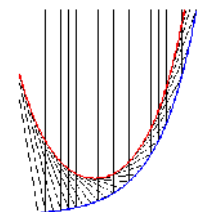
Merkwürdig ist, dass ein Fahrzeug mit quadratischen(!) Rädern auf einer Unterlage bestehend aus Bögen der Kettenlinie völlig ruhig „rollen“ könnte.

Allgemein kann jedes gleichseitige N-Eck ($N > 3$) auf Kettenlinienstücken abrollen.

Für ein regelmäßiges N-Eck mit dem Umkreisradius R ergeben sich die Kettenlinienabschnitte zu

$$y = - A \cosh (x/A) , \text{ mit } A = R \cos (\pi/n)$$

Quelle: "Mathematica in Action" von Stan Wagon, ISBN-13: 978-0387986845



Bogenlänge	$s = a \sinh (t/a)$
Krümmung	$\kappa = -1/a \operatorname{sech}^2 (t/a)$
Krümmungsradius	$R = a \cosh^2 (x/a)$
Tangentialwinkel	$\phi = -2 \arctan (\tanh (1/2 * t/a))$

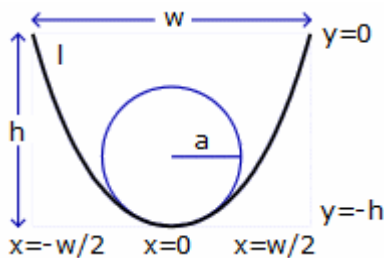
Die Berechnung der Kettenlinie ist ein klassisches Problem der Variationsrechnung.

Dazu ist die potentielle Energie der gesamten Kette, von der die Kettenlänge und die Aufhängepunkte vorgegeben sind, zu minimieren. Aus dem Integral folgt die Differenzialgleichung

$$y y'' - y'^2 = 1$$

deren Lösungen vom Typ $y(x) = a \cosh x/a$

sind. Dabei ist a der Krümmungsradius im Scheitelpunkt. Die Kurve hat stets dieselbe Gestalt, sie ist eine um den Maßstab a vergrößerte Cosinus-Hyperbolicus-Funktion.



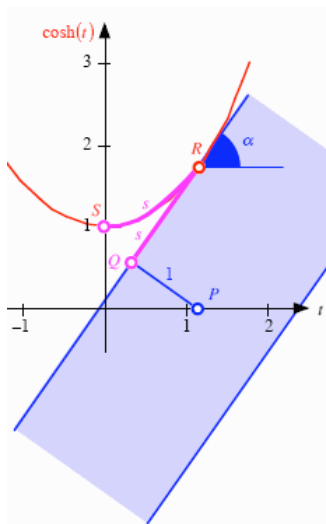
Durch horizontales und vertikales Verschieben wird diese allgemeine Lösung an vorgegebene Aufhängepunkte angepasst. In der Abbildung liegt der Koordinatenursprung in der Mitte zwischen den Aufhängepunkten. Hier gilt $y(x) = a \cosh x/a - b$. Zwischen der Seillänge l , dem Pfostenabstand w , dem Durchhang h , dem Krümmungsradius a und dem Parameter b bestehen folgende Zusammenhänge:

$$l / 2a = \sinh (w/2a) ; b / a = \cosh (w/2a) ; b = h + a$$

Die potentielle Energie dieses Systems beträgt $E = -\mu g/2 (l b - w a)$

wobei μ die Seilmasse je Meter ist und g die Schwerebeschleunigung; im Allgemeinen $9,81 \text{ m/s}^2$.

Erst Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens und Johann Bernoulli wiesen 1691 nach, dass sich die Kettenlinie von einer Parabel unterscheidet. Bei gleicher Höhe ist die Parabel kürzer, die Kettenlinie dafür weniger gekrümmt.



Gegeben ist eine Kettenlinie

$$y = a/2 (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh (x/a)$$

Längs der Kettenlinie wird nun ein Lineal der Breite 2 abgerollt. Der Berührungspunkt sei R.

Außerdem wird auf dem Lineal ein Punkt S so weit von R entfernt betrachtet, wie die Bogenlänge der Kettenlinie von 0 bis R lang ist. Senkrecht zu S wird in der Mitte des Lineals der Punkt P markiert.

Gesucht ist die Ortskurve von P.

Nach der Abbildung scheint es, dass P senkrecht unterhalb des Berührungspunktes R auf der horizontalen Achse liegt. Dies ist zu zeigen.

Der Punkt R habe die Darstellung $x(t) = \cosh(t) ; y(t) = t$

Für die abgewälzte Länge s wird

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + (d/dt \cosh \tau)^2} d\tau = \sinh (t)$$

Für den Steigungswinkel α gilt:

$$\tan \alpha = d/dt \cosh(t) = \sinh(t)$$

und $\cos \alpha = 1/\cosh t ; \sin \alpha = s/\cosh t$

Somit hat der Punkt P die Darstellung

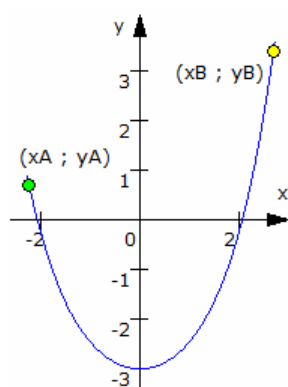
$$x_p(t) = t - s \cos \alpha + \sin \alpha = t - s/\cosh t + s/\cosh t = t$$

$$y_p(t) = \cosh t - s \sin \alpha - \cos \alpha = 0$$

Damit liegt der Punkt P senkrecht unterhalb des Berührungspunktes R auf der horizontalen Achse.

Das Abrollen des Lineals stellt damit eine Geradföhrung dar. Dies ist auch der Grund dafür, dass quadratische Räder auf Zykloidenbögen abrollen können, und allgemein für die Existenz von Polygonrädern.

Quelle: Hans Walser [20070407a]



Wird eine Kette der Länge L zwischen zwei Punkten $(x_A ; y_A)$ und $(x_B ; y_B)$ aufgespannt, so entsteht eine Kettenlinie der Form

$$y = a \cosh (x/a + C_1) + C_2$$

Für die Bestimmung der Konstanten a wird

$$\sinh ((x_B - x_A)/(2a)) / ((x_B - x_A)/(2a)) = \sqrt{(L^2 - (y_B - y_A)^2)} / (x_B - x_A)$$

Aus den Beziehungen $y(x_A) = y_A$ und $y(x_B) = y_B$ können die Konstanten C_1 und C_2 berechnet werden. Der tiefste Punkt der Kurve wird bei $x = -a C_1$ erreicht.

Dort wird

$$C_1 = \operatorname{arsinh} ((y_A - y_B)/(2a) / \sinh((x_A/a - y_A/a)/2)) - (x_A/a + y_A/a)/2$$

$$C_2 = y_A - a \cosh (x_A/a + C_1)$$

Sind umgekehrt außer den Aufhängepunkten a und die Konstanten bekannt, wird L für die Länge L der Kette

$$L = a \sinh (x_B/a + C_1) - a \sinh (x_A/a + C_1)$$

Gateway Arch

Saint Louis, Missouri

Als symbolisches Tor zum Westen Amerikas spannt sich seit 1964 der 192 Meter hohe Gateway Arch des finnischen Architekten Eero Saarinen über die Skyline von Saint Louis.



Das Wahrzeichen der Stadt besitzt u.a. eine Aussichtsterrasse. Mathematisch bedeutend ist dieses Tor, da es die Form einer auf den Kopf gestellten Katenoide (Kettenlinie) besitzt. Dies ist die Idealform eines freitragenden schwerkräftefreien Bogens.

Eine weitere Kettenlinie begegnet vielen täglich. Nur die wenigsten erkennen aber, dass es zwei auf den Kopf stehende Kettenlinie sind ...

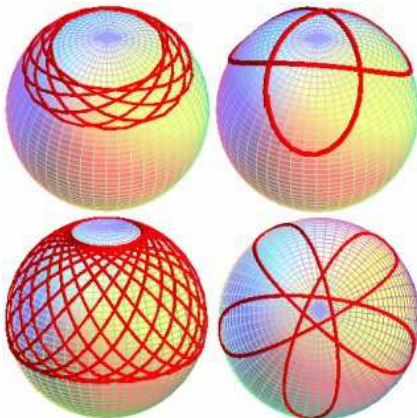
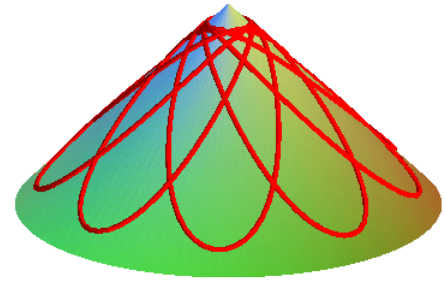


Kegelkettenlinie

Kettenlinien können auch auf verschiedenen gekrümmten Oberflächen betrachtet werden. Eine Kegelkettenlinie entsteht, wenn eine Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Kegeloberfläche ausgebreitet wird.

Erstmals wurden diese Kurven von Bobillier 1829 untersucht. Differenzialgleichung $(d/ds((z - z_0) dM^2/ds) - k^2) \times N^z = 0$ wobei N^z der Normalvektor des Kegels ist.

Polarkoordinaten $x = \rho \sin \alpha \cos (\theta/\sin \alpha)$
 $y = \rho \sin \alpha \sin (\theta/\sin \alpha)$
 $z = \rho \cos \alpha$



Kugelkettenlinie

Die Kugelkettenlinie wurde erstmals 1829 von Bobillier und 1846 von Gudermann untersucht.

Integralgleichung in Zylinderkoordinaten

$$(z - z_0) \rho^2 d\theta/ds = c \text{ te}$$

$$\text{mit } d\theta/d\lambda = k/(\cos \lambda \sqrt{((\sin \lambda - \sin \lambda_0)^2 \cos^2 \lambda - k^2)}$$

$$z_0 = R \sin \lambda_0$$

θ ... Länge, λ ... Breite

Traktrix (Schleppkurve)

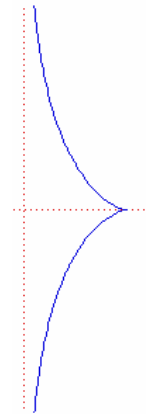
Ein materieller Punkt am Ende eines nicht dehnbaren Fadens von der Länge a beschreibt eine Traktrix, wenn der Anfangspunkt des Fadens längs der Geraden $y=0$ geführt wird.

Anfangslage des Punktes $(0;a)$

$$x = a \operatorname{arcosh}(a/y) + \sqrt{(a^2 - y^2)} = a \ln | [a - \sqrt{(a^2 - y^2)}]/y | - \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

a/y läuft von 1 bis Unendlich

Asymptote $y = 0$; Punkte $A(0;a)$ und $A(0;-a)$ sind Rückkehrpunkte



Die Schleppkurve wurde 1692 erstmals von Huygens untersucht, der ihr auch den Namen gab.

Es gibt auch Hinweise, dass Claude Perrault schon 1670 erste Untersuchungen zur Traktrix anstellte. Weitere Untersuchungen erfolgten durch Leibniz und Johann Bernoulli.

Rotiert die Traktrix um ihre Asymptote, so entsteht eine Pseudosphäre, welche Beltrami 1868 zur Konstruktion einer nicht-euklidischen Geometrie nutzte.

Rollt eine hyperbolische Spirale auf einer Geraden ab, so beschreibt das Zentrum der Spirale gerade eine Traktrix.

Die Radialkurve der Traktrix ist die Kappa-Kurve. Die Kurve wird auch Äquitangentialkurve genannt (franz. courbe équitangentielle).

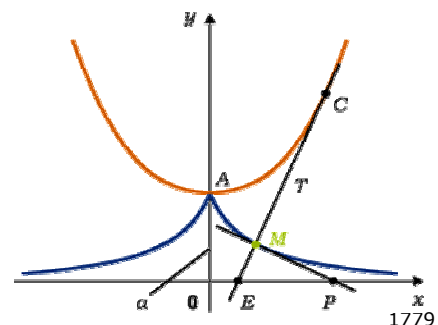
Leibniz beschrieb die Traktrix dadurch, dass er eine Taschenuhr mit Kette so auf den Tisch legte, dass die Kette senkrecht zur Tischkante lag. Zog er nun das Kettenende an der Tischkante entlang, war die Bahn der Uhr eine Traktrix. Daher heißt die Traktrix auch "Schleppkurve".

Parameterform

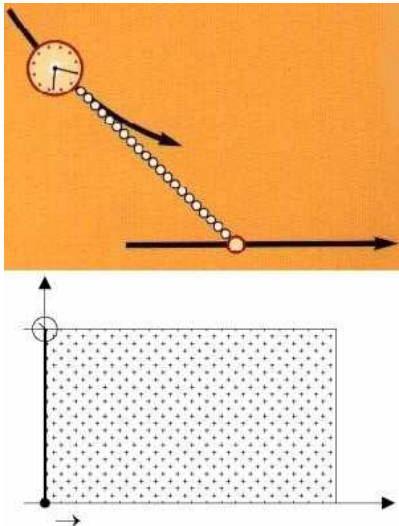
$$x(t) = a \cdot (1 - \cos t)$$

$$y(t) = a \cdot \ln(\tan(\pi/4 + t/2)) - a \cdot \sin t$$

Die Traktrix ist keine algebraische Kurve, sie gehört zu den transzendenten Kurven.



Alternative Definition: Schleppkurve oder Traktrix nennt man den geometrischen Ort aller Punkte mit der Eigenschaft, dass das Tangentenstück MP einer Kurve zwischen dem Berührungspunkt M und dem Schnittpunkt der Tangente mit einer Leitlinie, hier mit der x-Achse, die konstante Länge a besitzt. In der Abbildung ist die Traktrix blau gezeichnet. Der Punkt A(0, a) ist ein Rückkehrpunkt. Die Kurve verläuft symmetrisch zur y-Achse. Die Länge des Bogens AM ist $L = a \ln(a/y)$. Bei wachsender Länge des Bogens L nähert sich die Differenz $L - x$ dem Wert $a(1 - \ln 2) \approx 0.307 a$, wobei x die Abszisse des Punktes M ist. Der Krümmungsradius ist $r = a \cot(x/y)$. Krümmungsradius MC und der Normalenabschnitt $ME = b$ sind zueinander umgekehrt proportional: $r b = a^2$. Die Evolute der Traktrix, d.h., der geometrische Ort ihrer Krümmungskreis-Mittelpunkte C, in der Abbildung rot dargestellt, ist die Katenoid mit der Gleichung $y = a \cosh(x/a) = a/2 (e^{x/a} + e^{-x/a})$, $a > 0$



Problemstellung: Eine Uhr mit angehängter Uhrkette der Länge 1 liegt auf der oberen Ecke eines Tisches, die Uhrkette hat gerade die Länge der Breite des Tisches. Bewegt man nun den Uhrkettenanfang längs der Breite des Tisches nach rechts, so ist der Graph, auf dem die Uhr sich bewegt, zu bestimmen.

Lösung: Nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems entwickelt man leicht, dass das Problem auf die Lösung der Differentialgleichung führt:

$$y' = -y / \sqrt{1 - y^2}$$

Anfangswerte $x = 0, y = 1$, d.h.

$$\int \sqrt{1 - y^2} / y \, dy = -x + C$$

Mit der Substitution $z = \sqrt{1 - y^2}$ $dz/dy = -y / z$ ergibt sich

$$\int \sqrt{1 - y^2} / y \, dy = - \int z^2 / (1 - z^2) \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int z / (1+z) \, dz - \frac{1}{2} \int z / (1-z) \, dz =$$

$$= z - \frac{1}{2} \ln((1+z)/(1-z))$$

$$= \sqrt{1 - y^2} - \ln((1 + \sqrt{1 - y^2})/y) =$$

Damit gilt $x = \ln((1 + \sqrt{1 - y^2})/y) - \sqrt{1 - y^2} - C$

und für $x = 0 \rightarrow C = 0$, d.h. $x = \ln((1 + \sqrt{1 - y^2})/y) - \sqrt{1 - y^2}$

und damit die Gleichung der Traktrix für $a = 1$.

Durch Perks wurde ein mathematisches Gerät erdacht, mit dem verschiedene Schleppkurven gezeichnet werden können.



Traktrix-Spirale

Die transzendente Kurve wurde 1704 von Huygens und Varignon eingeführt und 1722 ausführlich von Cotes untersucht. alternativer Name: polare Traktrix

Differenzialgleichung $\rho \, ds/d\rho = -a$

Polargleichung

$$\rho = a \cos t \text{ mit } \theta = \tan t - t$$

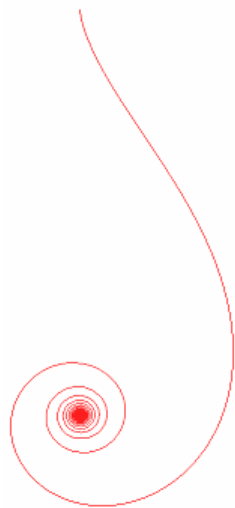
$$\theta = \pm(\sqrt{a^2 - \rho^2} / \rho - \arccos(\rho/a)), \rho > 0$$

Krümmungsradius $R_C = -a/2 \tan t = a\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} / (a^2 - 2\rho^2)$

Die Traktrix-Spirale kann auf der eigentlichen Traktrix-Kurve abrollen.

siehe dazu

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/spiralectractrice/spiralectractrice.shtml>



Syntraktrix

Ein Punkt N bewegt sich gleichförmig auf einer Traktrix (Schleppkurve). In diesem Punkt wird die Tangente an die Traktrix gezeichnet. Die Punkte P

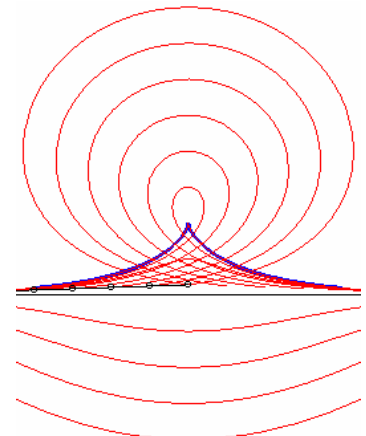
und M, die auf der Tangente liegen und von N den gleichen Abstand haben, beschreiben dann eine Kurve, die Syntraktrix.

Die Kurve wurde 1729 von Giovanni Poleni bei der Untersuchung von Logarithmen eingeführt. Der Name wurde 1755 von Ricatti gegeben.

Kartesische Parameteregleichung

$$x = a(t - k \tanh t) \quad y = a k / \cosh t$$

Für $k = 0$ und $k = 1$ ergeben sich die Sonderfälle der Geraden und der Traktrix.



Quelle:

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/syntractrice/syntractrice.shtml>

Verfolgungskurve, Radiodrome

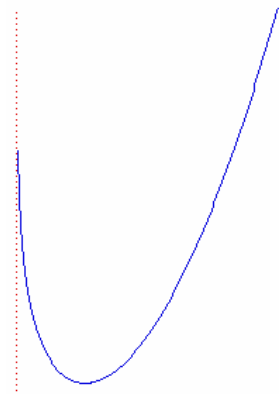


Abbildung: $y = c x^2 - \log(x)$

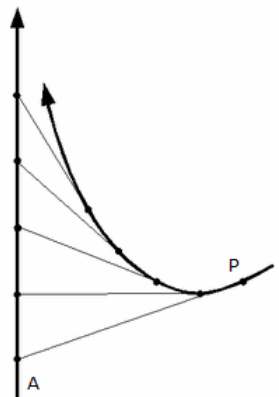
Bewegt sich ein Punkt A längs einer gegebenen Kurve, so beschreibt ein Punkt P eine Verfolgungskurve, wenn P sich stets in Richtung von A bewegt und beide Punkte sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

Erstmals wurde eine solche Kurve 1732 analytisch von dem französischen Wissenschaftler Pierre Bouguer beschrieben. Aber schon auf Leonardo da Vinci gehen erste Untersuchungen zurück.

Der Spezialfall, dass sich A auf einer Geraden bewegt (Abbildung der entsprechenden Verfolgungskurve), wurde zuerst von Arthur Bernhart untersucht. Dieser Sonderfall wird auch Hundekurve genannt, da man die Aufgabenstellung mit der Vorstellung umschreibt, dass ein Hund versucht zu seinem Herrchen zu gelangen.

Das Problem erweiterte Pierre-Louis Moreau de Maupertuis auf beliebige Kurven.

Dies führte zur Definition der allgemeinen Radiodrome. Insbesondere wird der Fall betrachtet, dass sich der Punkt A gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt.



Gerade Radiodrome

Sei A_0 der Startpunkt eines "Verfolgten" und P_0 der Startpunkt eines "Verfolgers".

Wandert der Punkt A mit der Geschwindigkeit $v = \text{konstant}$ auf einer Geraden und bewegt sich der Punkt P mit der Geschwindigkeit $w = \text{konstant}$ immer in Richtung des Punktes A, dann durchläuft P eine gerade Radiodrome.

Ist das Geschwindigkeitsverhältnis $k = v / w$, so ergibt sich die Funktionsgleichung in kartesischen Koordinaten:

$A_0(0 | 0)$ im Ursprung, $P_0(1 | 0)$ auf der x-Achse, A bewegt sich entlang der y-Achse

$$y(x) = 1/2 \left((1 - x^{1-k}) / (1-k) - (1 - x^{1+k}) / (1+k) \right) ; k \neq 1$$

$$y(x) = 1/4 (x^2 - \ln x^2 - 1) ; k = 1$$

Den zweiten Fall nennt man eigentliche Radiodrome. Sie stellt den einfachsten Spezialfall dar.

Herleitung der Radiodrome

Es sei die Hauptlage der Radiodrome betrachtet mit $A_0(0|0)$ und $P_0(0|1)$. A wandle entlang der x-Achse, $k > 0$. Die Tangentenbedingung $dy/dx = -y/(a-x)$ ergibt die Differenzialgleichung

$$y + y'(a-x) = 0 \text{ mit } y > 0$$

Mit $a = vt$ folgt $y/y' + vt = x$ und durch Differenzial nach x

$$dx/dt = v y'^2 / (y y'')$$

Dabei ist die Bogenlänge $l = wt = k \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx$. Aus $dx^2 + dy^2 = w^2 dt^2$ folgt $dx/dt = w / \sqrt{1+y'^2}$

Nach Gleichsetzen erhält man eine Differenzialgleichung in y

$$y'' - k y'^2 / y \sqrt{1+y'^2} = 0$$

Mit der Substitution $u = x' = 1/y'$, $y'' = -1/u^3 du/dy$ und durch Trennen der Variablen $-du/\sqrt{1+u^2} = k dy/y$ wird mit Integrieren

$$\text{arsinh } u = k \ln y + C$$

Rücksubstitution ergibt

$$x' = dx/dy = 1/2 \left((C_1 y)^k - (C_1 y)^{-k} \right)$$

Aus den Randbedingungen $dx/dy|_{y=1} = 0$ folgt $C_1 = 1$, und $x|_{y=1} = 0$ folgt $C_2 = k/(1-k^2)$ folgt

$$x(y) = 1/2 \left(y^{(1+k)}/(1+k) - y^{(1-k)}/(1-k) \right) + k/(1-k^2) \text{ für } k \neq 1$$

$$x(y) = 1/2 \left(y^{(1+k)}/(1+k) - \ln |y| \right) - 1/4 \text{ für } k = 1$$

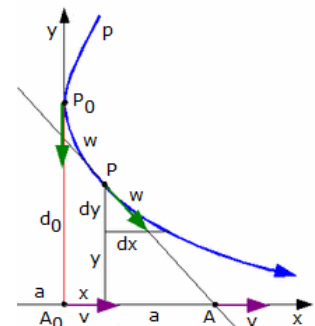
Für den interessierenden Fall gilt $y < 1$. Damit ist der zweite Term immer positiv, mit $k_1 = 1-k$, $k_2 = 1+k$

$$x(y) = 1/2 \left((1-y^{k_1})/k_1 - (1-y^{k_2})/k_2 \right) \text{ bzw.}$$

$$x(y) = 1/2 \left(\ln 1/y - (1-y^2)/2 \right)$$

Ein explizite Umstellen nach $y(x)$ ist bei dieser Herleitung nicht möglich.

siehe <http://mathworld.wolfram.com/PursuitCurve.html>



Kreuzkurve

Die Kreuzkurve wurde 1847 von Terquem 1847 eingeführt und 1883 intensiv von Schoute untersucht.

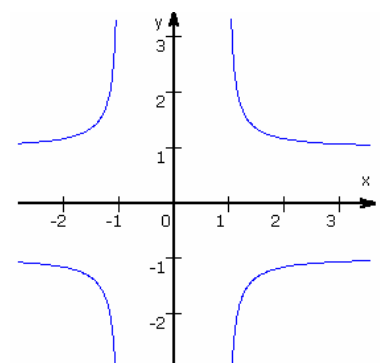
Sie ist ein Spezialfall einer Lamé-Kurve.

$$\text{Gleichung } x^2 y^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$$

$$a^2/x^2 + b^2/y^2 = 1$$

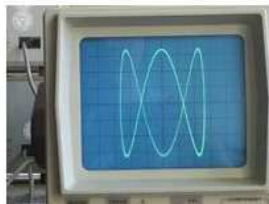
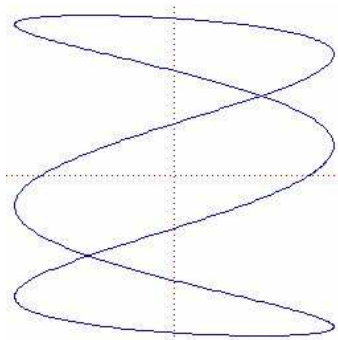
$$\text{Parameterform } x = a \sec t \quad y = b \csc t$$

$$\text{Polargleichung für } a = b \quad \rho = 2a / \sin 2\theta$$



Krümmung $\kappa = 3ab \csc^2 t \sec^2 t / (b^2 \cos^2 t \csc^2 t + a^2 \sec^2 t \tan^2 t)^{3/2}$

Die Kreuzkurve ist das Bild bei einer zweiachsigen Inversion $(x, y) \rightarrow (a^2/x, a^2/y)$ einer Ellipse. Geometrisch bedeutet dies: An eine Ellipse wird eine Tangente angelegt, die die Koordinatenachsen in zwei Punkten schneidet. In diesen Punkten werden Senkrechte zu den Achsen errichtet. Der Ort aller Schnittpunkte dieser Senkrechten bildet eine Kreuzkurve.



Lissajousche Figuren

Die Lissajouschen Figuren wurden 1857 durch Jules-Antoine Lissajous untersucht. Erstmals erwähnte Nathaniel Bowditch 1815 die Kurven, die auch Bowditch-Kurven genannt werden.

Die Lissajous-Figuren haben für Fragen der Physik große Bedeutung. Sie entstehen durch Überlagerung zweier Sinusfunktionen unterschiedlicher Periodenlänge und einer Phasenverschiebung. Ein ganzzahliges Verhältnis ergibt geschlossene Figuren.

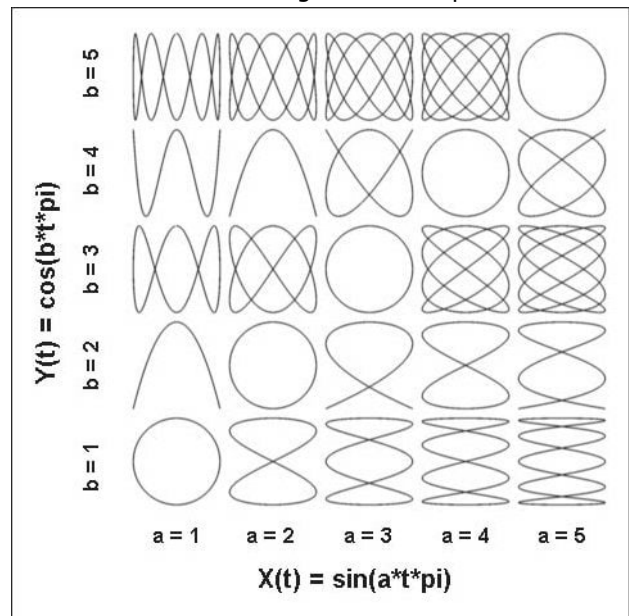
An einem Oszilloskop ergeben sich Lissajous-Figuren, wenn bei abgeschalteter Zeitablenkung sowohl an den Eingang für die y- als auch für die x-Ablenkung eine harmonische Wechselspannung anliegt.

Die Form der Figuren erlaubt Rückschlüsse auf Frequenz und Phasenlage der beiden Spannungen. Bei gleichen Frequenzen ($\nu = 1:1$) kann man an einer Ellipse die Phasendifferenz ablesen. Bei fast gleichen Frequenzen oder einem

Frequenzverhältnis, das nahe an einem der einfachen rationalen

Verhältnisse liegt, zeigt der Schirm des Oszilloskops eine geschlossene, aber sich zeitlich verändernde Figur. Damit können mit hoher Genauigkeit kleine Frequenzunterschiede gemessen werden. Deshalb waren Lissajous-Figuren in der Fernseh- und Röhrentechnik ein alltägliches Bild.

Andererseits ist die Vielfalt der Lissajouschen Figuren faszinierend, gerade in der leicht animierten Form. Deshalb wurden in Filmkunst und Fernsehen häufig Monitore im Bühnenbild mit Lissajous-Figuren dekoriert, wenn eine Umgebung sehr modern oder futuristisch wirken sollte, etwa in Science-Fiction-Filmen und Serien.



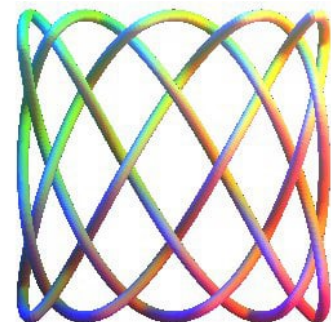
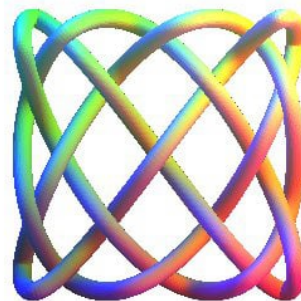
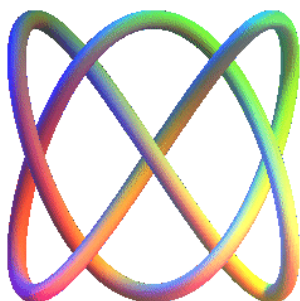
Räumliche Lissajous-Figuren

1993 wurden durch Bogle, Hearst und Jones die Lissajouschen Figuren auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Diese können nun als die

Bewegung eines Punktes auf drei sinusförmigen Kurven interpretiert werden.

Kartesische Gleichungen: $x = a \sin t$ $y = b \sin(nt + \varphi)$ $z = c \sin(mt + \psi)$

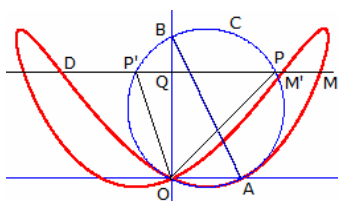
Die Projektion auf die Koordinatenebenen ergibt die klassischen Lissajous-Figuren.



$x = a \cos 3t, y = a \sin 2t, z = b \sin 7t$

$x = a \cos 3t, y = a \sin 4t, z = b \sin 17t$

$x = a \cos 3t, y = a \sin 5t, z = b \sin 22t$



Quersack-Kurve

Ein spezielle Lissajousche Kurve ist die Quersack-Kurve. Die Kurve wurde 1750 von Cramer untersucht und benannt (engl. und franz.: Besace).

Kartesische Gleichung

$(x^2 - by)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ bzw.

$c^2 y = bx^2 \pm ax \sqrt{c^2 - x^2}$ mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

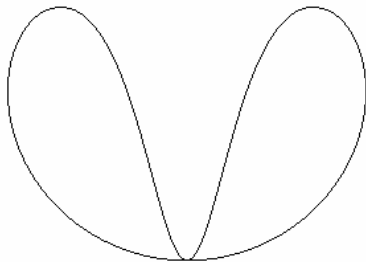
$$2x = \pm \sqrt{a^2 + 2(b+c)y} \pm \sqrt{a^2 + 2(b-c)y}$$

Parametergleichung $x = a \cos t - b \sin t$ $y = -(\sin t) x$

Die Fläche in der Kurve beträgt ac .

Konstruktion: Gegeben ist ein Kreis (C), auf diesem ein Punkt O und einen Durchmesser AB.

Die Quersackkurve ist dann die Menge aller Punkte M auf einer zu OA parallelen Geraden (D) mit $QM = OP$. P ist der Schnittpunkt von (D) und (C); Q ist ist Projektion von O auf (D).



Doppelherz-Kurve

franz.: doubles-cœur, engl.: double-heart curve

Die Kurve wurde erstmals 1647 von Grégoire de Saint Vincent untersucht. Es ist eine Kurve 4.Ordnung.

Kartesische Gleichung

$$x = 1/2 (\pm \sqrt{2ay - y^2} \pm \sqrt{2by - y^2})$$

$$y = \pm (2x^2 (2 \sqrt{ab - x^2} + a + b) / (4x^2 + a^2 - 2ab + b^2))$$

$$x^2 (x^2 + y^2) - (a + b) x^2 y + (a-b)^2 / 4 y^2 = 0$$

Sind zwei Kreise mit den Gleichungen $x^2 + y^2 = 2ay$ und $x^2 + y^2 = 2by$ in spezieller Lage gegeben, so kann die Doppelherz-Kurve, wie in der

Animation gezeigt, konstruiert werden.

Herzkurven

Die Herzkurve ist eine in sich geschlossene Kurve, die die Form des Herzens hat. Die Herzform ist als Spielkartenfarbe neben Pik, Kreuz und Karo bekannt.

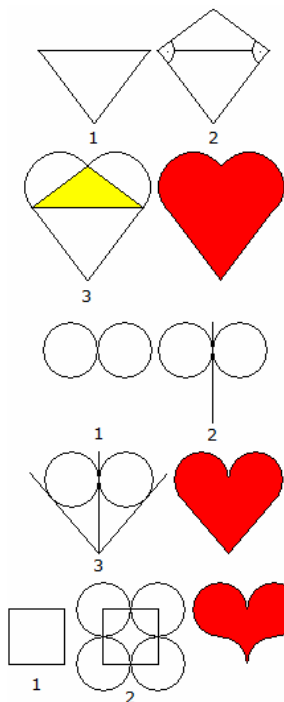
Im einfachsten Falle besteht ein Herz aus einem auf der Spitze stehenden Quadrat und zwei auf die Seiten gesetzten Halbkreisen. Merkmale einer Herzfigur sind die Einkerbung oben und eine Spitze unten.

Eine Herzfigur entsteht auch, wenn man auf ein Dreieck zwei Halbkreise setzt. Fehlt die Spitze unten, so spricht man eher von einer herzförmigen Figur. Allerdings kommt diese Form dem menschlichen Herzen näher. Die Figur besteht aus drei Halbkreisen. Es gibt viele Methoden Herzkurven zu zeichnen:

1. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck. 2. Zeichne zu den Schenkeln die Senkrechten. Sie erzeugen ein zweites gleichschenkliges Dreieck. 3. Zeichne über die Schenkel des Dreiecks Halbkreise. Ist das Dreieck unten gleichschenklig-rechtwinklig, so besteht die Herzkurve aus einem Quadrat und zwei Halbkreisen.

1. Zeichne zwei sich berührende Kreise. 2. Zeichne die gemeinsame Tangente. 3. Zeichne von einem Punkt der Tangente aus zwei weitere äußere Tangenten. Ist der Winkel unten an der Spitze ein rechter, so besteht die Herzkurve wie oben aus einem Quadrat und zwei Halbkreisen.

1. Zeichne ein Quadrat. 2. Zeichne gleiche Kreise um die Eckpunkte des Quadrates mit dem Radius "halbe Quadratseite".



Weitere Konstruktionsmöglichkeiten:

oben:

1 Zeichne eine Ellipse. 2 Drehe sie. 3 Spiegele sie. 4 Bilde eine Schnittfigur. Markiere eines der Herzen.

Mitte:

1 Zeichne den Graphen zu

$$f(x) = \sin(x), 0 < x < \pi/2.$$

2 Drehe die Kurve um 90°. Spiegele diese Kurve.

3 Bilde aus den beiden Kurvenstücken und einer Strecke ein Dreieck. 4

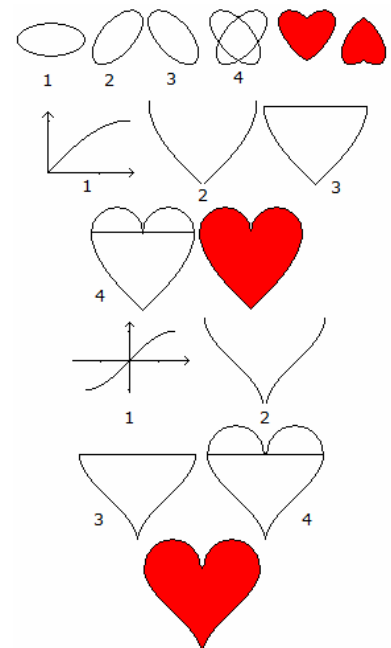
Setze auf das Dreieck zwei Halbkreise.

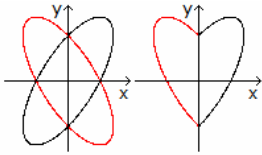
unten:

1 Zeichne den Graphen zu $f(x) = \sin(x), -\pi/2 < x < \pi/2$. 2 Drehe die Kurve um 90°. Spiegele diese Kurve.

3 Bilde aus den beiden Kurvenstücken und einer Strecke ein Dreieck. 4

Setze auf das Dreieck zwei Halbkreise.



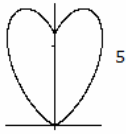
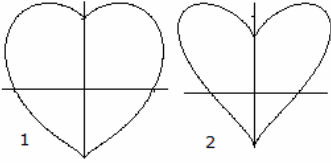


Herzkurven-Formeln

Die Konstruktion einer Herzkurve kann durch verschiedene Formeln beschrieben werden.

Die schwarze Ellipse hat die Formel $2x^2-2xy+y^2-1 = 0$ mit der Nebenbedingung $x \geq 0$. Die rote Ellipse hat die Formel $2x^2+2xy+y^2-1 = 0$. Als Nebenbedingung muss $x \leq 0$ gelten.

Das Herz entsteht auch mit
 $y = |x| + \sqrt{1-x^2}$ und
 $y = |x| - \sqrt{1-x^2}$



Weitere Gleichungen:

1) $(x^2+y^2-1)^3 - x^2y^3 = 0$, Herzkurve von Eugène Beutel (1909)

2) $x^2 + 2(3/5 \sqrt[3]{x^2} - y)^2 - 1 = 0$

3) $x = \sin t \cos t \ln |t|$; $y = \sqrt{|t|} \cos t$; $-1 \leq t \leq 1$

4) $x = \pm 0,01 (-t^2 + 40t + 1200) \sin(\pi t/180)$
 $y = 0,01 (-t^2 + 40t + 1200) \cos(\pi t/180)$; $0 \leq t \leq 60$

5) $r = 5 \sin^7(t) e^{|2t|}$; $-\pi \leq t \leq -\pi/2$; $\pi/2 \leq t \leq \pi$

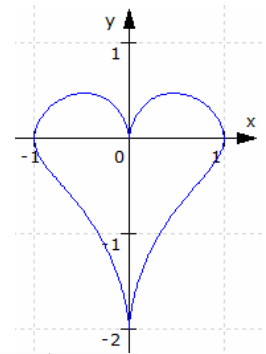
Laporte-Herzkurve

Durch Raphaël Laporte wurde 1993 als Sechzehnjähriger eine Kurvengleichung angegeben, die eine spezielle Herzkurve darstellt. Die rationale Kurve ist biquadratisch.

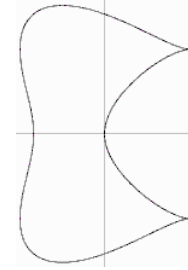
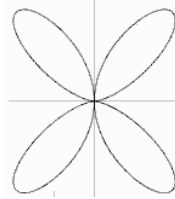
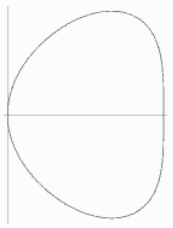
Parametergleichung: $x = \sin^3 t$ $y = \cos t - \cos^4 t$

Kartesische Gleichung:

$$x^8 - x^6 + 27x^4 - 27x^2 + 12yx^6 - 12yx^4 + 42y^2x^4 + 42y^2x^2 + 2y^3x^4 + 26y^3x^2 + 8y^3 + 12y^4x^2 + 12y^4 + 6y^5 + y^6 = 0$$



Weitere Kurven



Bean-Kurve ... algebraische Kurve
 4. Grades
 $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x(x^2 + y^2)$

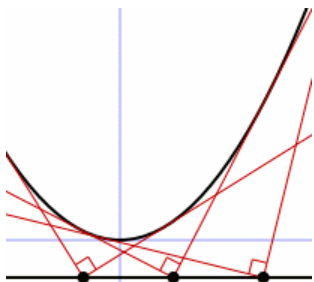
$$x^4 + y^4 = 2axy^2$$

$$x^4 + z^2 = 2axz$$

$$0 = z^2 - 2axz + x^4$$

$$z = ax + a^2x^2 - x^4$$

Bicuspid-Kurve
 Kartesische Koordinaten
 $(x^2-a^2)(x-a)^2 + (y^2-a^2)^2 = 0$



Orthoptische Kurve

Die orthoptische Kurve (griech. ὀρθοπτική = Senkrechtsehen) einer ebenen Kurve k ist der geometrische Ort aller Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der Kurve.

Die orthoptische Kurve einer Parabel ist ihre Leitlinie (Abbildung).

Für eine Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

ist der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

die orthoptische Kurve. Bei der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

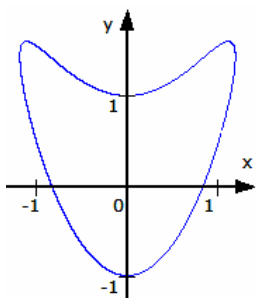
wird es der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

Ist $a > b$, so existiert die orthoptische Kurve nicht.

Für eine Astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

erhält man das Vierblatt (Quadrifolium) mit der Polarkoordinatendarstellung $r^2 = a^2/2 \cos^2(2\phi)$

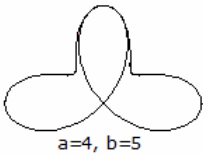


Wassenaar-Kurve

Implizite Gleichung $(y - x^2)^2 = 1 - ax^2$

Explizite Gleichung $y = \pm \sqrt{1 - bx^2} + cx^2$

Die Kurve hat für Parameter $a > 1$ eine ovale Eiform. Es ist eine Kurve 4. Ordnung. Die Kurve wurde durch Ken Sasaki im "American Journal of Physics" eingeführt.



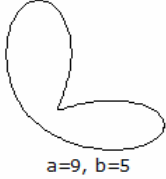
Verallgemeinerte Bohnen-Kurve

Polarkoordinaten $r = \sin^a \theta + \cos^b \theta$

Die Kurve ist eine Verallgemeinerung der Bohnen-Kurve.

Die Bohnen-Kurve wird für $a = b = 3$ erzeugt, für $a = b = 1$ und $a = b = 2$ ergibt die Kurve einen Kreis.

Die Bohnenkurve mit a, b ist äquivalent zur Kurve mit vertauschten Parametern b, a . Sind a oder b gerade, so ist der Grad der Kurve $1/2 \max(a,b)$, andernfalls $\max(a,b)$. Sind a oder b gerade, so besteht die Kurve aus zwei symmetrischen Bohnen-Kurven.



$a=9, b=5$

Geschosspitzen-Kurve

Die Geschosspitzen-Kurve ist eine Kurve 4.Grades, engl. Name "bullet nose".

Die Kurve wurde 1885 von Schoute erstmals beschrieben.

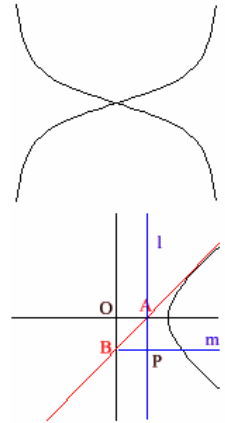
Gleichung $1/x^2 + 1/y^2 = 1$

Konstruktionsmöglichkeit:

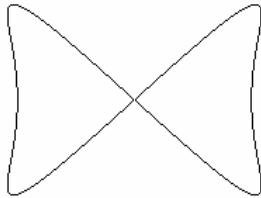
Gegeben sei eine Hyperbel H . Jede Tangente an die Hyperbel schneidet die x - und y -Achse in zwei Punkten A und B .

Durch A und B werden Geraden l und m parallel zu den beiden

Achsen gezogen. Dann ist die Menge der Schnittpunkte der zwei Geraden die Geschosspitzen-Kurve.



$a=1, b=7$



Kurve von Alain

Die Kurve ist eine algebraische Kurve 4.Grades. Sie wurde erstmals intensiv von Alain Juhel untersucht.

Kartesische Koordinaten $(x^2 - y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$

Polarkoordinaten $\rho = 1/\cos 2\theta \sqrt{(a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta)}$

für $a > b$ wird

$$\rho = c / \cos 2\theta \sqrt{(1 + k \cos 2\theta)}$$

$$\text{mit } c = \sqrt{((a^2 - b^2)/2)} \text{ und } k = (a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$$

für $0 < a < b$ wird

$$\rho = c / \cos 2\theta \sqrt{(\cos 2\theta - k)}$$

$$\text{mit } c = \sqrt{((a^2 + b^2)/2)} \text{ und } k = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$$

Für $b = 0$ entstehen zwei Hyperbeln, die sich berühren. Für $a = b$ ergibt sich eine Hyperbel mit ihren Asymptoten. Ist $b > a > 0$ entsteht eine in sich geschlossene Kurve.

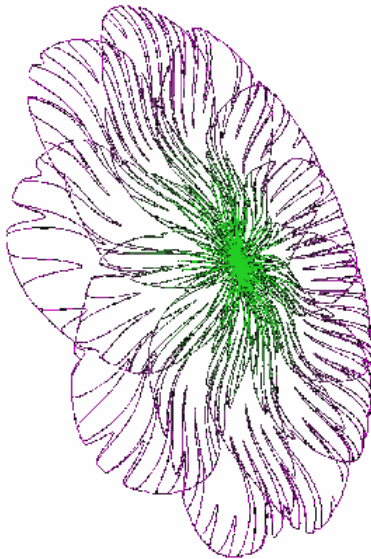
Die Kurve berührt für alle Parameter a und b die Lemniskate von Booth $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$

Chrysanthemen-Kurve

Die Gleichung der Kurve ungewöhnlicher Form in Polarkoordinaten ist

$$r = 5(1 + \sin(11u/5)) - 4 \sin^4(17u/3) \sin^8(2 \cos(3u) - 28u)$$

mit $0 \leq u \leq \pi$



Diese und weitere interessante Kurven findet man unter

http://ozviz.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces_curves/chrysanthemum/

C-Programm:

```
typedef struct { double x,y,z;} XYZ;
```

```
#define N 30000
```

```
int main(int argc,char **argv)
```

```
{ int i;
```

```
double u,r,p4,p8;
```

```
XYZ p,plast;
```

```
for (i=0;i<=N;i++) {
```

```
u = i * 21.0 * PI / N;
```

```
p4 = sin(17 * u / 3);
```

```
p8 = sin(2 * cos(3 * u) - 28 * u);
```

```
r = 5*(1 + sin(11*u/5)) - 4*p4*p4*p4*p4 * p8*p8*p8*p8*p8*p8*p8*p8;
```

```
p.x = r * cos(u);
```

```
p.y = r * sin(u);
```

```
p.z = (r/20+.2)*sin(r*TWOPI/7);
```

```
if (i > 0)
```

```
plast = p;
```

```
}
}
```

Folium

Kartesische Koordinaten

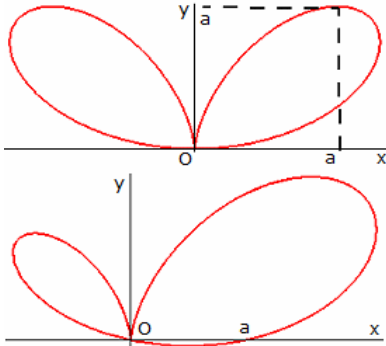
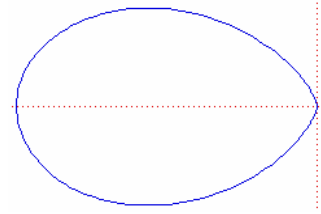
$$(x^2 + y^2)(y^2 + x(x + b)) = 4 a x y^2$$

Polarkoordinaten

$$r = -b \cos \theta + 4 a \cos \theta \sin^2 \theta$$

Die Kurve Folium ist eine Verallgemeinerung der drei speziellen Kurven einfaches Folium, Doppelfolium und Trifolium mit den Parametern $b = 4 a$, $b = 0$ und $b = a$. Dargestellt ist der Fall $b = 4 a$.

Da die Kurve 1609 erstmals von Johannes Kepler beschrieben wurde, wird sie auch Keplers Folium genannt.



Bifolium-Kurve

Namen: regelmäßiges Zweiblatt, franz.: bifolium régulier, engl.: regular bifolium

Die Kurve wurde 1886 von Longchamps und 1887 von Brocard eingeführt.

Polargleichung $\rho = 4a \sin \theta \cos^2 \theta$

-90° gedreht $\rho = 4a \sin^2 \theta \cos \theta$

Kartesische Gleichung $(x^2+y^2)^2 = 4ax^2y$
 $x = \pm \sqrt{ay} \pm \sqrt{y(a-y)}$

-90° gedreht $(x^2+y^2)^2 = 4axy^2$

Parametergleichung $x = a \sin t (1 + \cos t)$
 $y = a \sin^2 t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Die Zweiblatt-Kurve kann punktweise erzeugt werden.

Dazu betrachtet man einen festen Punkt B auf einem Kreis. Bewegt sich ein zweiter Punkt P gleichförmig auf diesem Kreis, so verändert sich der Abstand BP periodisch. Wählt man zwei Punkte, die von P den Abstand BP/2 besitzen, so beschreiben diese die Zweiblatt-Kurve.

Unregelmäßiges Zweiblatt

Eine Verallgemeinerung führt zum unregelmäßigen Zweiblatt (Abbildung unten):

Polargleichung

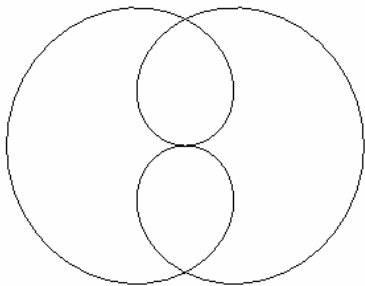
$$\rho = (a \cos \theta + b \sin \theta) \cos^2 \theta$$

Kartesische Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = (ax + by) x^2$$

Parametergleichung

$$x = (a + bt)/(1 + t^2)^2 \quad y = tx$$



Dürer-Blatt, Folium von Dürer

franz.: folium de Dürer, engl.: Durer's folium

Diese Kurve wurde nach Albrecht Dürer (1471-1528) benannt und von ihm erstmals beschrieben.

Polargleichung $\rho = a \sin \theta/2$

kartesische Parametergleichungen ($t = \theta/2$)

$$x = a/2 (\cos t + \cos 3t)$$

$$y = a/2 (\sin t + \sin 3t)$$

kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)(2x^2 + 2y^2 - a^2)^2 = a^4 x^2$

Das Dürer-Blatt stellt einen Spezialfall einer Rosettenkurve mit $n = 1/2$ dar. Ebenso ist die Kurve eine Epitrochoide mit $q = 2$ und $k = 3$ (siehe Animation).

Sinusoidal-Spirale

Polarkoordinaten: $r^p = a^p \cos(p\theta)$

... diese Kurve ist eine Verallgemeinerung anderer bekannter Kurven

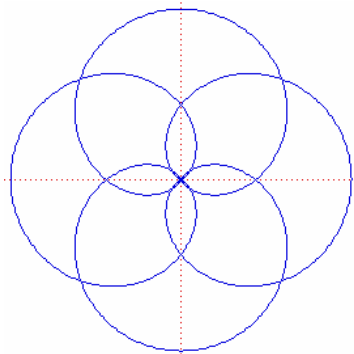
... Parameter p ist rationale Zahl, dann ergibt sich als Kurvenbild:

$p = -1$... Gerade $p = 1$... Kreis

$p = 1/2$... Kardioide $p = -1/2$... Parabel

$p = -2$... Hyperbel $p = 2$... Lemniscate von Bernoulli

Die Sinusoidal-Spirale wurde erstmals von Maclaurin angegeben und untersucht. Auch wenn der Name von einer Spirale spricht, ist diese Kurve im streng mathematischen Sinn keine Spirale.



Trifolium

Kartesische Koordinaten

$$(x^2 + y^2)(y^2+x(x+a)) = 4 a x y^2$$

Parameterdarstellung

$$x = x_0 + 4a \cos \phi - 4a \cos(2\phi)$$

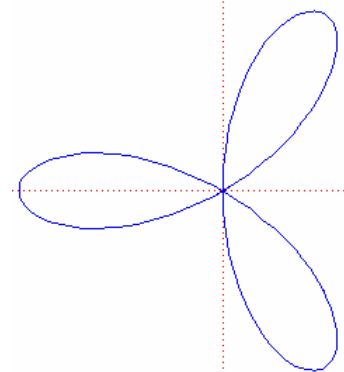
$$y = y_0 + 4a \sin \phi + 4a \sin(2\phi)$$

Polarkoordinaten

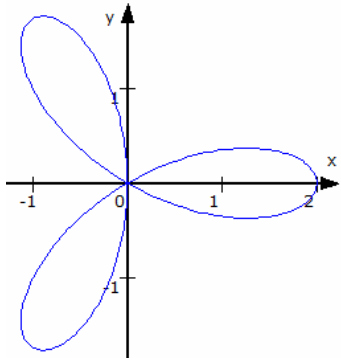
$$r = a \cos \phi (4 \sin^2 \phi - 1)$$

In der allgemeinen Form beschreibt die Gleichung $(x^2 + y^2)(y^2 + x(x + b)) = 4 a x y^2$

eine Kurve, Folium genannt. Als Spezialfälle ergeben sich für $b = 4a$, $b =$



0 und $b = a$ das einfache, doppelte und dreifache Folium.



Parameterdarstellung

$$x = \cos t + \cos 2t$$

$$y = \sin t - \sin 2t$$

Beide Koordinatenfunktionen sind periodische trigonometrische Funktionen.

Damit ist die Kurve periodisch mit der kleinsten Periode 2π .

Schnittpunkt mit der y-Achse $P(0; 0)$ für $t = \pi/3, \pi, 5/3\pi$

Weitere Schnittpunkt mit der x-Achse ist $P(2; 0)$.

Extremwerte

Maxima in x-Richtung $P(2, 0); P(0, 0)$

Minima in x-Richtung $P(1,12, 1,45); P(-1,12, -1,45)$

Maxima in y-Richtung $P(1,27, 0,37); P(-0,9, 1,76)$

Minima in y-Richtung $P(1,26, -0,37); P(-0,9, -1,76)$

Tangente im Punkt $P(0, 0)$ $y = -1/3 \sqrt{3} x$

$$y = 1/3 \sqrt{3} x$$

Tangente im Punkt $P(-1, \sqrt{3})$ $y = 1/3 \sqrt{3} x + 4/3 \sqrt{3}$

Quadrifolium, Vierblatt, kartesisches Vierblatt

franz. trèfle à quatre feuilles, engl. four-leafed rose

Polargleichung $\rho = a \sin 2\theta$

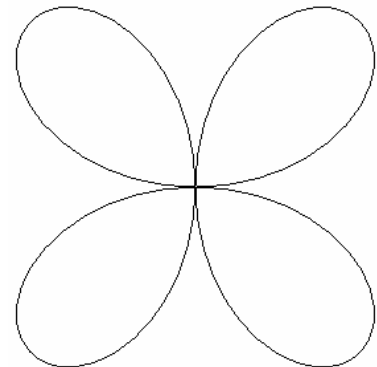
Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 x^2 y^2$

Parametergleichung $x = 2a \sin^2 t \cos t$ $y = 2a \cos^2 t \sin t$

Länge der Kurve $8a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-3/4 \sin^2 t} dt \approx 9,7 a$

Eingeschlossene Fläche $A = \pi/2 a^2$

Die Vierblatt-Kurve stellt einen Sonderfall einer Hypotrochoide dar.



Die Vierblatt-Kurve kann als Menge der Schnittpunkte einer rotierenden Gerade und eines mit anderer Geschwindigkeit rotierenden Kreises erzeugt werden. Gerade und Kreis können auch gegeneinander rotieren.

Schneidet eine Gerade $y = mx$, die durch den Mittelpunkt des Vierblatts verläuft, die Kurve, so sind die Abszissen der vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkte $x_{1,2} = \pm 2am / \sqrt{(1 + m^2)^3}$



Vierblättrige Kurven können durch modifizierte Gleichungen relativistischer gestaltet werden.

Von links oben nach rechts unten ergeben sich die Vierblätter mit den Gleichungen:

$\rho = a \sqrt{(| \sin 2\alpha |)}$; Vereinigung zweier Bernoullischer Lemniskaten

$\rho = a (| \sin 2\theta | + 1/4 \sin^2 (4\theta))$

$\rho = a (\sqrt{| \sin 2\theta |} + 1/4 \sin^2 (4\theta))$

$\rho = a (\sin^2 (2\theta) + 1/2 \sin^2 (4\theta))$

Skarabäuskurve

franz. scarabée, engl. beetle curve

Der Kurvenname wurde gegeben, da die Form dieser rationalen Kurve 6.Grades an einen

ägyptischen Skarabäuskäfer erinnert.

Polargleichung $\rho = a \cos \theta + b \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta$

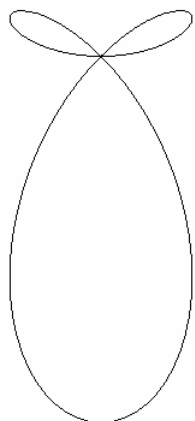
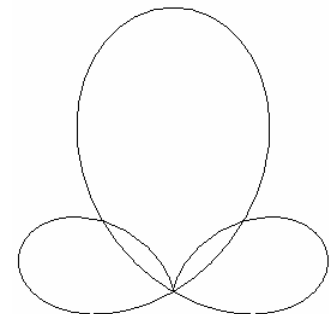
Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2) (x^2 + y^2 - ax - by)^2 = r^2 x^2 y^2$

Polargleichung für $a = b$ und Drehung um $\pi/2$

$$\rho = a \sqrt{2} \cos \theta - r/2 \cos (2\theta)$$

Für $a = b = 0$ ergibt sich eine Vierblattkurve. Die Abbildung zeigt den Fall $a = b = r / (2 \sqrt{2})$.

siehe auch <http://perso.wanadoo.fr/nvogel/Dossiers/cadreprom6.html>



Fischkurve

kartesische Parametergleichung

$$x = a \cos t + b \cos (t/2) \quad y = a \sin t$$

kartesische Gleichung $(x^2 - y^2 + a^2 - b^2/2)^2 = (a^2 - y^2)(b^2/2 + 2x)^2$

Die Kurve ist eine rationale Quartik.

Kiepert-Kurve

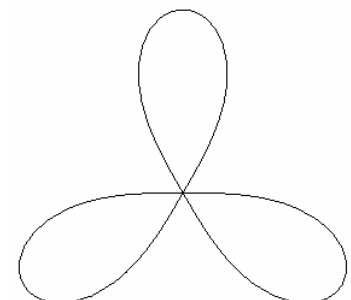
Die Kurve wurde nach dem deutschen Mathematiker Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert (1846-1934) benannt.

anderer Name: dreipolige Lemniskate

Polargleichung $\rho^3 = a^3 \cos 3\theta$ mit $a = \sqrt[3]{2} d$

dabei ist der Abstand vom Mittelpunkt der Kurve zu den drei äußersten Punkten

kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^3 = a^3 x (x^2 - 3y^2)$





Maltesisches Kreuz

Die rationale Kurve 6. Grades wurde untersucht von W.H. Besant 1870, M. d'Ocagne 1884 und W. Gaedecke 1917.

Die nachfolgenden Gleichungen beschreiben nur einen Teil des eigentlichen maltesischen Kreuzes.

Parameterdarstellung

$$x = a \cos t \quad (\cos^2 t - 2) \qquad y = a \sin t \cos^2 t$$

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (x^2 + 20y^2) - 8 a^2 y^2 (y^2 + 2a^2)$

Parameterdarstellung eines um 45° gedrehten Kreuzes

$$x = a (\cos^3(t) - 1/2 \sin t) \qquad y = a (\sin^3(t) - 1/2 \cos t)$$

Kurvenlänge $6,34... a$

eingeschlossene Fläche $\pi/8 a^2$

Das maltesische Kreuz ergibt sich durch folgende Konstruktion. ON sei eine Strecke auf der x-Achse, T deren Mittelpunkt. Ist T der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve mit der x-Achse und N der Schnittpunkt der Normale im gleichen Kurvenpunkt, so ist die Kurve das maltesische Kreuz. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$yy'^2 - xy' + 2y = 0$$

Rubinsche Eikurve

Polarkoordinatengleichung $r(\phi) = a \sin^3(\phi) - b \cos^3(\phi)$, $a, b > 0$

algebraische Kurvengleichung 4. Ordnung

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + b x^3 - a y^3; \quad a, b > 0$$

Schnittpunkte mit der x-Achse $x_1 = 0; x_2 = -b$

Schnittpunkte mit der y-Achse $y_1 = 0; y_2 = a$

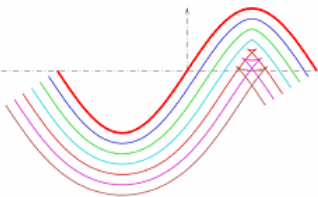
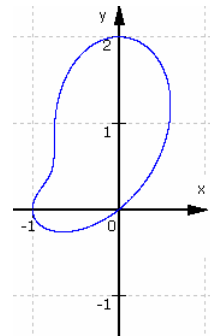
von der Kurve eingeschlossener Flächeninhalt

$$A = 1/2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi = 1/2 (5/16 a^2\pi + 5/16 b^2\pi)$$

Flächenschwerpunkt

$$x_s = -3b (a^2 + 7b^2) / (40 (a^2 + b^2)) \quad y_s = 3a (7a^2 + b^2) / (40 (a^2 + b^2))$$

Die Kurvenlänge ist nicht analytisch exakt ermittelbar.



Parallelkurve

Eine Parallelkurve ist eine Kurve, die zu einer anderen Kurve einen konstanten Abstand d hat, d.h. die Parallelkurve einer Kurve besteht aus den Punkten der Ebene, die auf der Normale eines Punktes im Abstand d liegen. Eine Parallelkurve ist selten eine Kurve vom gleichen Typ. Für gewisse d kann die Parallelkurve auch Singularitäten enthalten. Die Parallelkurve entsteht nur im Ausnahmefall durch eine einfache Verschiebung der

Ausgangskurve.

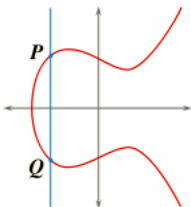
Im dreidimensionalen Fall werden Parallelfächen betrachtet, die von einer gegebenen Fläche konstanten Abstand haben.

Gegeben sei eine Kurve K mit der Parameterdarstellung $x = x(t); y = y(t)$

Für die Parallelkurve $K_{|d|}$ im Abstand $|d|$ wird dann durch

$$x^* = x(t) + d y'(t) / \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2} \qquad y^* = y(t) - d x'(t) / \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}$$

beschrieben. Ist d negativ, so erhält man eine Parallelkurve im Abstand $|d|$ auf der anderen Seite der Kurve.



Elliptische Kurve

In der Zahlentheorie ist eine elliptische Kurve eine singularitätenfreie algebraische Kurve der Ordnung 3 in der projektiven Ebene.

Besonders wichtig sind aufgrund der einfachen Struktur elliptische Kurven E der Form

$$E = \{(x,y) \mid cy^2 = x^3 + ax + b\}$$

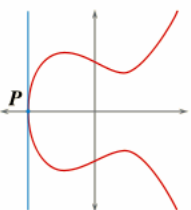
wobei $4a^3 + 27b^2$ verschieden von Null sein müssen.

Einige moderne Verschlüsselungsverfahren basieren auf solchen Kurven. Der Name leitet sich davon ab, dass diese Kurven elliptische Integrale parametrisieren.

Addition zweier verschiedener Punkte

Es seien $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ die Koordinaten der Punkte P und Q . Mit $R(x_R, y_R)$ wird das Ergebnis der Addition $P+Q$ bezeichnet.

Mit $s = (y_P - y_Q) / (x_P - x_Q)$ wird $x_R = s^2 - x_P - x_Q$; $y_R = -(y_P + s(x_R - x_Q))$ definiert. P und Q dürfen nicht dieselbe x -Koordinate besitzen.



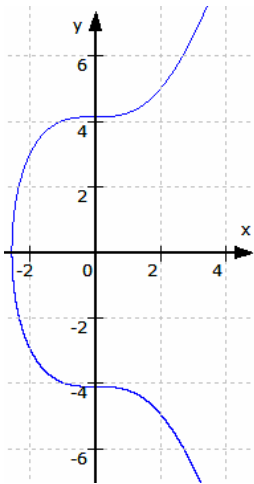
Verdoppelung eines Punktes

Für die Punktverdoppelung wird bei $y_P \neq 0$ mit $s = (3x_P^2 + a) / (2 y_P)$

$$x_R = s^2 - 2x_P \qquad y_R = -y_P + s(x_P - x_R)$$

Für $y_P = 0$ ist $P+P$ der unendlich ferne Punkt.

Das Inverse $-P$ zu einem Punkt ergibt sich durch Spiegelung an der x-Achse.



Ein Spezialfall stellen elliptische Kurven der Form $E = \{(x,y) \mid y^2 = x^3 + b\}$ dar, wobei b eine natürliche Zahl ist.

Auf derartigen Kurven befinden sich mitunter Punkte mit ganzzahligen Koeffizienten. Zum Beispiel findet man auf der elliptischen Kurve (Abbildung)

$$y^2 - x^3 = 17$$

die Punktepaare (x,y)

$$(2,5), (4,9), (8,23), (43,282), (52,375), (5234,378661), \dots$$

Edwards-Kurven

Edwards-Kurven sind eine spezielle Menge elliptischer Kurven. Sie werden u.a. in Kryptografie mittels elliptischer Kurven verwendet. Erstmals beschrieb 2007 Harold M. Edwards diese Kurven in "A normal form for elliptic curves".

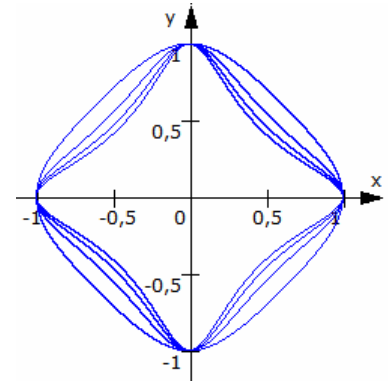
Edwards-Kurven sind Kurven Gleichung $x^2 + y^2 = 1 + d x^2 y^2$

wobei der reelle Parameter d den Krümmungsfaktor der Kurve beschreibt. Für $d = 0$ ergibt sich der Einheitskreis. Für andere d wird der Einheitskreis gekrümmt, d.h. der Radius bei 45° , 135° , 225° und 315° abhängig von d verkleinert bzw. vergrößert.

In der Abbildung sind die Kurven für $d = 2, 6, 10$ und 14 zu sehen.

Auf Edwards-Kurven existieren affine Punkte, z.B. über dem Restklassenkörper F_{13} mit $d = 5$: $(0, 1)$, $(0, 12)$, $(3, 6)$, $(3, 7)$, $(6, 3)$, $(6, 10)$, $(7, 3)$, $(7, 10)$, $(12, 0)$, $(10, 6)$ und $(10, 7)$.

Für kryptografische Anwendungen werden diese Kurven über einem primen Restklassenkörper F_p definiert.



Verdrehte Edwards-Kurve

Verdrehte Edwards-Kurven sind eine Erweiterung der Edwards-Kurven. Ein weiterer Faktor a mit

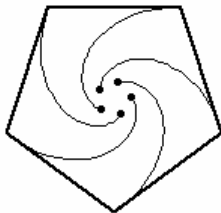
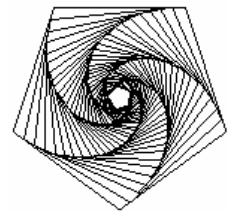
$$ax^2 + y^2 = 1 + d x^2 y^2$$

führt zu einer Deformation des Graphen der Kurve.

Wirbel-Kurven

Wirbel-Kurven (engl. Whirls) sind Figuren, die durch eine Folge von zueinander ähnlichen, regelmäßigen Polygonen erzeugt werden. Die eingeschriebenen Polygone sind dabei um einen Winkel gedreht und um einen entsprechenden Faktor verkleinert.

Die Ecken der Polygone beschreiben dabei den Weg von n Mäusen im "Mäuse-Problem" und bilden n logarithmische Spiralen aus.



Mäuseproblem

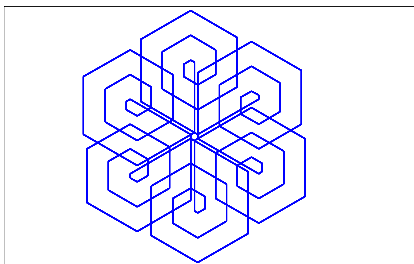
Gegeben sind n Mäuse, die sich in den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks mit der Seitenlänge 1 befinden. Jede Maus versucht, mit konstanter Geschwindigkeit, zur in Uhrzeigerrichtung benachbarten Maus zu laufen.

Die Mäuse bewegen sich dabei auf logarithmischen Spiralen und treffen sich im Schwerpunkt des n -Ecks. Dabei legen sie eine Strecke von

$$d_n = 1 / (1 - \cos(2\pi/n))$$

zurück. Die ersten Längen für $n = 2, 3, \dots$, sind $1/2$; $2/3$; 1 ; $1/5(5 + \sqrt{5})$; 2 ; ... und genähert $0.5, 0.666667, 1, 1.44721, 2, 2.65597, 3.41421, 4.27432, 5.23607, \dots$

Die gebildete Gesamtkurve ist eine Wirbel-Kurve.



Spirolateralkurve

Ein Streckenzug wird durch Wiederholung eines Motivs erzeugt. Folgendes Verfahren liegt zugrunde:

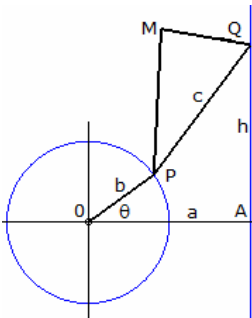
Der „Zeichenstift“ bewegt sich von einem Startpunkt A um eine gewisse Anfangsstrecke vorwärts und dreht sich dann um den festzulegenden Winkel im Uhrzeigersinn. Dieser Vorgang wiederholt sich mit doppelter, dreifacher, vierfacher Länge usw. und zwar so oft, wie durch die am Rollbalken festgelegte Anzahl. Damit ist das Motiv festgelegt. Wird das Verfahren nun erneut wiederholt, so gelangt

man nach einer gewissen Anzahl von Zyklen wieder an den Ausgangspunkt zurück, wodurch die Spirolateralkurve entsteht.

Sehr interessante Kurven entstehen z.B. mit einem Winkel 135° , Anzahl 4 bzw. Winkel 120° , Anzahl 5.

Bérard-Kurve

Durch den französischen Mathematiker Bérard wurden diese Kurven 1820 erstmals untersucht.



Gegeben ist ein Stab, dessen ein Ende sich auf einer Geraden bewegen kann. Ein weiterer Punkt des Stabes rotiert gleichförmig auf der Peripherie des Kreises. Dann beschreibt das zweite Ende des Stabes eine Bérard-Kurve. Je nach Lage von Gerade und Kreis, der Position des Punktes auf dem Kreis und der Länge des Stabes entstehen verschiedenste Kurven, zum Beispiel Ellipsen, Herzkurven, die Bernoullische Lemniskate usw. Noch werkwürdigere Gebilde ergeben sich, wenn man nun auf diesen Stab zusätzlich senkrecht weitere Stäbe anbringt und deren Bewegungskurve beobachtet.

Punkte wird dann

Gegeben sei der Punkt $A(0, a)$ und weiter $OP = b$, $PQ = c$. Für die Koordinaten der $p = b e^{i\theta}$, $q = a + ih$, $u = q - p$, $m = p + ku + liu$

Mit $|u| = c$ wird dann als kartesische Parameterdarstellung

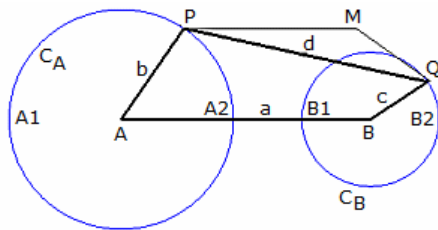
$$x = b \cos t + kd(t) - l\varepsilon \sqrt{c^2 - d^2t}$$

$$y = b \sin t + ld(t) + k\varepsilon \sqrt{c^2 - d^2t} \quad \text{mit } d(t) = a - b \cos t$$

Für die Bewegung des Punktes Q wird

$$x = a ; y = b \sin t + \varepsilon \sqrt{c^2 - d^2t}$$

Noch werkwürdigere Gebilde ergeben sich, wenn man nun auf diesen Stab zusätzlich senkrecht weitere Stäbe anbringt und deren Bewegungskurve beobachtet.



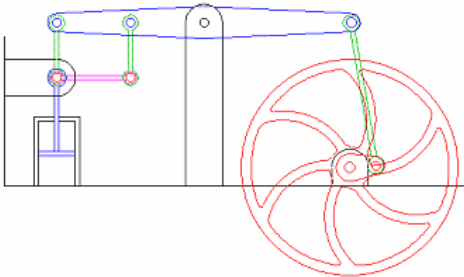
Drei-Stangen-Mechanismen

Durch Tschebyschow 1868, Cayley und Roberts 1875, Darboux 1879 und Koenigs 1897 wurden Kurven untersucht, die bei der Bewegung von Mechanismen entstehen, die aus drei Stangen zusammengesetzt sind.

Eine Drei-Stangen-Kurve ist dann der geometrische Ort von Punkten M, die von einer Strecke PQ feste Abstände haben und

von dem Viereck APQB nur die Lage der Punkte A und B fest ist. D.h., die Stangen AP, PQ und BQ haben zwar feste Länge, sind aber frei beweglich.

Je nach Wahl der Größen entstehen interessante Kurven. Ausführlich werden diese Kurven unter <http://www.mathcurve.com/courbes2d/troisbarres/troisbarre.shtml> untersucht.



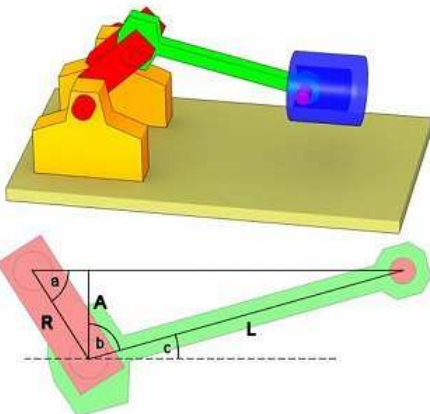
Stangenmechanismen, Getriebe

Mechanismen, die aus verschiedenen Stangen und rotierenden Rädern zusammengesetzt wurden, waren seit der Erfindung der ersten Wärmekraftmaschinen sehr beliebt.

Mit diesen Getrieben wurde es möglich, lineare Bewegungen, zum Beispiel die Bewegung eines Kolben, in Kreisbewegungen zu transformieren und umgekehrt.

In der Abbildung ist das Grundprinzip der Wattschen Dampfmaschine zu sehen.

Quelle: <http://www.animatedengines.com>



Ein-Zylinder-Kolbenmotor

Die Bewegung einzelner Teile von Motoren und Getrieben kann mit Hilfe einfacher mathematischer Berechnungen beschrieben werden. Der Ein-Zylinder-Kolbenmotor lässt sich beliebig im Raum verschieben und verdrehen ohne dass die Funktion gestört wird.

Wichtig für die Funktion ist die Anordnung der einzelnen Bauteile. Die Achse der Pleuelwelle befindet sich im Koordinatenursprung, die Achse der Pleuelstange auf der Pleuelwelle ist ein Unterobjekt der Pleuelwelle. Sie macht die Drehbewegung der Pleuelwelle automatisch mit. Die Position dieser Achse wird direkt an die Position der Pleuelstange weitergegeben.

Die Objektachse der Pleuelstange befindet sich exakt in der Mitte der Pleuelwellenaufnahme. Die Pleuelstange muss nur noch in die

richtige Position gedreht werden. Für diese Berechnung ist die Position der Pleuelwelle und die Länge der Pleuelstange von Achse zu Achse erforderlich.

Die Achse der Pleuelwelle und die beiden Achsen der Pleuelstange bilden zusammen ein beliebiges Dreieck. Zur Vereinfachung der Berechnung lässt sich dieses Dreieck in 2 rechtwinklige Dreiecke aufteilen. Aus dem Drehwinkel der Pleuelwelle (a) wird die y -Position der Pleuelstange (A) berechnet

$$A = R \cdot \sin(a)$$

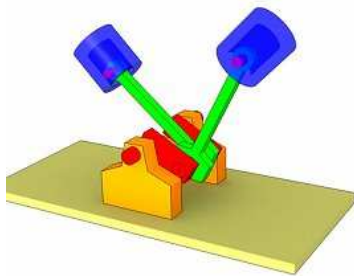
Mit Hilfe des zweiten rechtwinkligen Dreiecks lässt sich aus der Seite A der Winkel b und daraus der gesuchte Winkel c berechnen:

$$\cos b = A/L$$

$$b = \arccos(A/L)$$

$$c = \pi/2 - \arccos(A/L)$$

Quelle: <http://www.3d-meier.de>



Zwei-Zylinder-Kolbenmotor

Die Bewegung einzelner Teile von Motoren und Getrieben kann mit Hilfe einfacher mathematischer Berechnungen beschrieben werden.

2-Zylinder-Kolbenmotor

Beide Kolben stehen in einem Winkel von 90° zueinander. Die Achse der Pleuelstange und die beiden Achsen der Pleuelstange bilden zusammen ein beliebiges Dreieck.

rechte Pleuelstange nach Sinussatz wird $R / \sin(b) = L / \sin(a)$

In der Grundposition zeigt der Hubzapfen der Pleuelstange nach rechts bzw. in x-Richtung. Der Winkel a ergibt sich zum Drehwinkel der Pleuelstange plus 45° bzw. $\pi/4$ addieren. Und somit

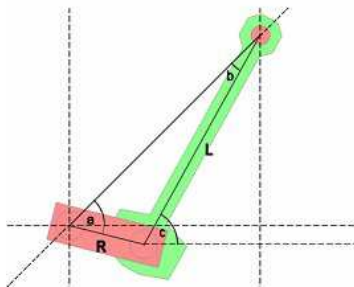
$$b = \arcsin(R \cdot \sin(a) / L)$$

Der Winkel c ergibt sich aus dem Strahlensatz bzw. $c = b + 45^\circ$.

linke Pleuelstange: Der Drehwinkel der Pleuelstange k wird

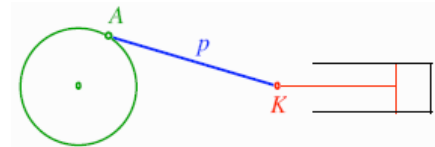
$$a = 225^\circ - k$$

Die andere Berechnung verläuft analog zur rechten Pleuelstange.



Kolbenhub

Gegeben ist ein Ein-Zylinder-Kolbenmotor. Für diesen soll der Kolbenhub als Funktion der gleichmäßigen Drehung der Pleuelstange dargestellt werden.



Dazu liegt das Pleuelkreiszentrum auf der Pleuelstange. Die Amplituden des Pleuelhubes entsprechen dem Pleuelkreisradius r , die Pleuelstange habe die Länge p .

Für die Bewegung des Punktes A ergeben sich dann die Gleichungen

$$a_x(t) = r \cos(t) ; a_y(t) = r \sin(t)$$

und für den Punkt K die Bewegungsgleichungen

$$k_x(t) = r \cos(t) + \sqrt{p^2 - r^2 \sin^2(t)} ; k_y(t) = 0$$

Die gesuchte Pleuelhubfunktion ist somit

$$r \cos(t) + \sqrt{p^2 - r^2 \sin^2(t)}$$

Bei Subtraktion von p erhält man eine Funktion mit den Amplituden $\pm r$.

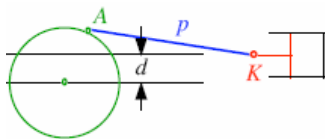
$$h(t) = r \cos(t) + \sqrt{p^2 - r^2 \sin^2(t)} - p$$

Für die Pleuelgeschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich

$$v(t) = r^2 \sin(t) \cos(t) / \sqrt{p^2 - r^2 \sin^2(t)} - r \sin(t)$$

Die Funktion ähnelt in ihrem Kurvenbild der Kosinus-Kurve, ist aber keine, u.a. sind die Nullstellen an einem anderen Ort. Die Abweichung ergibt sich aus der Schrägstellung der Pleuelstange. Bei kleiner Variation der Schrägstellung, d.h. für $p \gg r$, ist die Abweichung klein.

Dagegen entsteht für $p = r = 1$ ein totes Intervall $\pi/2 < t < 3\pi/2$, das von dem Pleuelgrad nicht mehr überwunden werden kann. Für $p < r$ kann der Pleuelmotor mechanisch nicht mehr konstruiert werden.



Gegeben sei ein Ein-Zylinder-Kolbenmotor. Für diesen soll der Pleuelhub als Funktion der gleichmäßigen Drehung der Pleuelstange dargestellt werden.

Das Pleuelkreiszentrum sei gegenüber der Pleuelstange um d verschoben.

Die Amplituden des Pleuelhubes entsprechen dem Pleuelkreisradius r , die Pleuelstange habe die Länge p .

Für die Bewegung des Punktes A ergeben sich dann die Gleichungen

$$a_x(t) = r \cos(t) ; a_y(t) = r \sin(t)$$

und für den Punkt K die Bewegungsgleichungen

$$k_x(t) = r \cos(t) + \sqrt{p^2 - (r \sin(t) - d)^2} ; k_y(t) = d$$

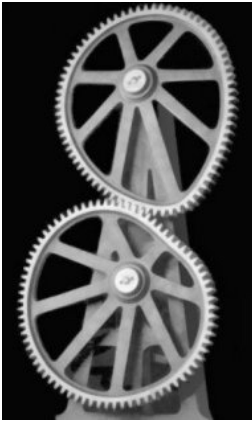
Die gesuchte Pleuelhubfunktion ist somit nach Subtraktion von p eine Funktion mit den Amplituden $\pm r$.

$$h(t) = r \cos(t) + \sqrt{p^2 - (r \sin(t) - d)^2} - p$$

Die Funktion ähnelt in ihrem Kurvenbild der Kosinus-Kurve, ist aber keine, da zum Beispiel die Nullstellen sich an einer anderen Abszisse befinden. Die Abweichung ergibt sich aus der Schrägstellung der Pleuelstange und der Verschiebung der Pleuelstange.

Unter bestimmten Bedingungen kann sogar ein Pleuelhub entstehen, der größer als $2r$ ist, zum Beispiel für $r = 1$, $p = 3$ und $d = 0,5$.

Quelle: Hans Walser



Gegenprofile, Getriebe

Eine sehr interessante und wichtige Frage der technischen Anwendung von mathematischen Kurven ist das Problem der Gegenprofile. Diese wurden erstmals ausführlich von Euler untersucht.

Gegeben sei eine geschlossen Kurve, die um einen festen Punkt rotiert. Um einen zweiten Punkt soll nun eine gesuchte Kurve, das Gegenprofil, so rotieren, dass beide Kurven auf einander abrollen.

In der linken Darstellung ist eine Kurve eine Pascalsche Schnecke, deren Gegenprofil eine eiförmige Kurve. Das Getriebe stammt von Clair (1860) und ist im "Musée des Arts et Métiers" ausgestellt.

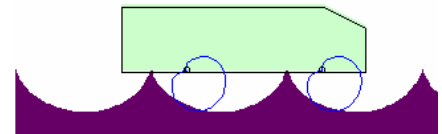
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/engrenage/engrenagefin.shtml>

Rad-Weg-Paare

Unter einem Rad-Weg-Paar versteht man zwei Kurven K_1 und K_2 der Art, dass sich ein Fahrzeug mit Rädern in der Form K_1 auf einer Strecke, die mit K_2 gekrümmt ist, waagrecht bewegen kann.

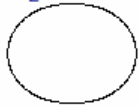
Standardmäßig bilden Kreis und Gerade ein Rad-Weg-Paar. Auch andere Kombinationen sind möglich:

Kardioide-Zykloide-Paar, Dreieck-Logarithmische Spirale-Paar, Ellipse-Sinuskurve-Paar, Parabel-Paar, Kreis-Paar



Erstmals wurden Rad-Weg-Paare 1668 von Gregory untersucht. Wichtige Beiträge leisteten 1846 Steiner und 1881 Habich. <http://aesculier.chez.tiscali.fr/fichiersMaple/rouesdroles/rouesdroles.html>

$n = 2$



Mandelbrot-Lemniskate

Die Mandelbrot-Lemniskaten sind eine Gruppe von ebenen Kurven in der komplexen Ebene mit der Gleichung

$$|f_n(x + iy)| = 1$$

wobei f_n als rekursive, quadratische Funktion

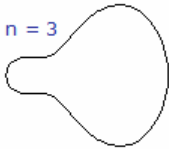
$$f_{n+1}(z) = f_n^2(z) + z$$

mit $f_0(z) = 0$ über den komplexen Zahlen definiert ist.

1988 wurden die Kurven durch Peitgen und Saupe Äquipotenziallinien genannt. Im Allgemeinen ist eine solche Kurve ein Polynom in x und y des Grades 2^n .

Die ersten drei Mandelbrot-Lemniskaten sind

$n = 3$



$n = 1$ Einheitskreis mit $|f_1(z)| = |z| = 1$

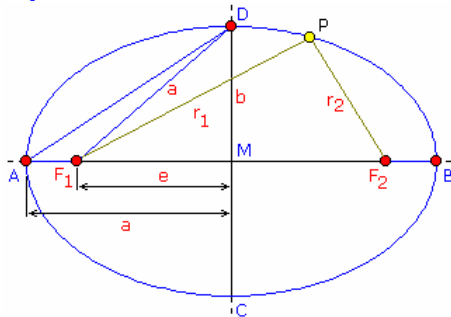
$n = 2$ Cassinisches Oval mit $a = 4$ (obere Abbildung)

$$|f_2(z)| = |z^2 + z| \text{ bzw. } ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = 16$$

$n = 3$ Birnenkurve (untere Abbildung)

Strebt n gegen Unendlich, so entsteht die Begrenzungskurve der Mandelbotmenge.

Bipolare Koordinaten einer Kurve



O_1 und O_2 seien zwei feste Punkte. Ein Punkt P kann dann durch seinen Abstände r_1 und r_2 von O_1 und O_2 angegeben werden. Diese Werte r_1 und r_2 werden bipolare Koordinaten von P genannt. Auf diese Weise können auch mathematische Kurven beschrieben werden. Zum Beispiel beschreibt die Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ eine Ellipse.

In der Darstellung sind die Brennpunkte F_1 und F_2 die festen Punkte O_1 und O_2 .

Raumkurve

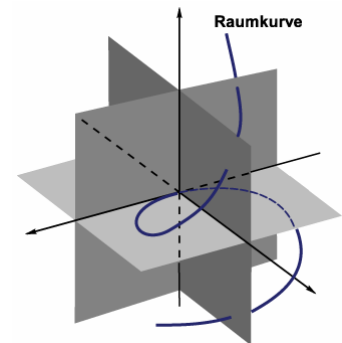
Raumkurven können auf folgende Arten definiert werden:

1. Schnitt zweier Flächen im Raum $F(x,y,z) = 0$ und $G(x,y,z) = 0$
2. Parameterform (t beliebiger Parameter) $x(t), y(t), z(t)$
3. Parameterform (s Bogenlänge) $x(s), y(s), z(s)$
4. Vektorgleichung der Parameterform $r^{\rightarrow}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Beispiel: Schraubenlinie: $x(t) = a \cos t$; $y(t) = a \sin t$; $z(t) = bt$
Die Richtung der wachsenden Werte des Parameters t auf einer in Parameterform gegebenen Raumkurve wird als positive Richtung der Kurve angesehen.

Bogenlänge einer Raumkurve

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2)} dt$$



Begleitendes Dreibein

In jedem Punkt einer Raumkurve P (bis auf die singulären Punkte) kann man drei Geraden und drei Ebenen definieren, die jeweils senkrecht aufeinander stehen.

Tangente, Grenzlage der Sekante durch P und P' für den Grenzübergang P' → P.

Normalebene, steht senkrecht auf der Tangente.

Grenzlage einer durch drei benachbarte Kurvenpunkte P, P' und P'' hindurchgehenden Ebene für die Grenzwerte P' → P und P'' → P.

Hauptnormale, Schnittgerade von Normalebene und Schmiegungeebene.

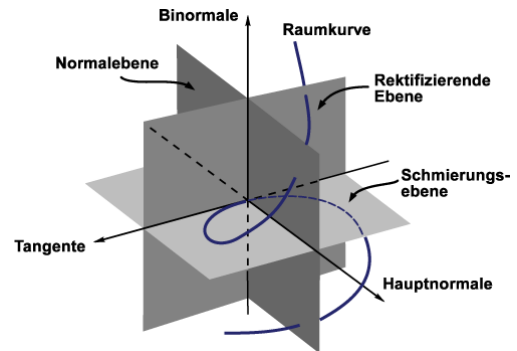
Binormale, senkrecht auf der Schmiegungeebene.

Rektifizierende Ebene, steht senkrecht auf der Hauptnormalen.

Das begleitende Dreibein, besteht aus Tangentenvektor T^{\rightarrow} : Einheitsvektor in die positive Richtung der Tangente.

Normalenvektor N^{\rightarrow} : Einheitsvektor auf der Hauptnormalen in Richtung der konkaven Seite der Kurve.

Binormalenvektor B^{\rightarrow} : Einheitsvektor senkrecht auf dem Normalenvektor und dem Tangentenvektor $B^{\rightarrow} = T^{\rightarrow} \times N^{\rightarrow}$.



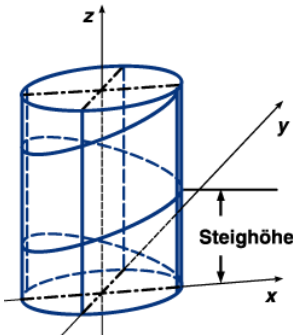
Frenetsche Formeln: Beziehungen zwischen Elementen des begleitenden Dreibeins und deren Ableitungen nach der Bogenlänge s: $dT^{\rightarrow}/ds = N^{\rightarrow}/R$ $dN^{\rightarrow}/ds = T^{\rightarrow}/R - B^{\rightarrow}/\tau$ $dB^{\rightarrow}/ds = -N^{\rightarrow}/\tau$,

wobei R der Krümmungsradius und τ der Torsionsradius ist.

Gleichungen des begleitenden Dreibeins

Gleichungen des begleitenden Dreibeins im Punkt $r_0^{\rightarrow} = (x_0, y_0, z_0)$ für Raumkurven in Parameterdarstellung:

Tangente	$r^{\rightarrow} = r_0^{\rightarrow} + \lambda dr_0^{\rightarrow}/dt$	$(x - x_0)/(dx_0/dt) = (y - y_0)/dy_0/dt$
Normalebene	$(r^{\rightarrow} - r_0^{\rightarrow}) dr_0^{\rightarrow}/dt = 0$	$dx_0/dt (x-x_0) + dy_0/dt (y-y_0) + dz_0/dt (z - z_0) = 0$
Schmiegungeebene	$(r^{\rightarrow} - r_0^{\rightarrow}) dr_0^{\rightarrow}/dt d^2r_0^{\rightarrow}/dt^2 = 0$	
Binormale	$r^{\rightarrow} = r_0^{\rightarrow} + \lambda (dr_0^{\rightarrow}/dt \times d^2r_0^{\rightarrow}/dt^2)$	
Rektifizierende Ebene	$(r^{\rightarrow} - r_0^{\rightarrow}) dr_0^{\rightarrow}/dt (dr_0^{\rightarrow}/dt \times d^2r_0^{\rightarrow}/dt^2) = 0$	
Hauptnormale	$r^{\rightarrow} = r_0^{\rightarrow} + \lambda dr_0^{\rightarrow}/dt \times (dr_0^{\rightarrow}/dt \times d^2r_0^{\rightarrow}/dt^2)$	



Windung einer Kurve, Torsion einer Kurve

Die Windung einer Kurve oder Torsion einer Kurve ist ein Maß für die Abweichung von einer ebenen Kurve. Definition der Windung oder Torsion

$$T = dB^{\rightarrow}/ds$$

Torsionsradius, Kehrwert der Torsion

$$\tau = 1/|T|$$

Berechnung der Torsion für $r^{\rightarrow} = r^{\rightarrow}(s)$:

$$T = \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}$$

Berechnung der Torsion für $r^{\rightarrow} = r^{\rightarrow}(t)$:

$$T = \frac{R^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}$$

Torsion der Schraubenlinie: Die Schraubenlinie besitzt konstante Torsion $T = b/c$. Die Torsion kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob der Windungssinn entgegen dem oder im Uhrzeigersinn ist.

Kurve des Archytas

Die Raumkurve wurde erstmals von dem griechischen Mathematiker Archytas von Tarent (430-350 v.u.Z.) erwähnt. Sie ist eine algebraische Kurve 8.Grades.

kartesische Gleichungen

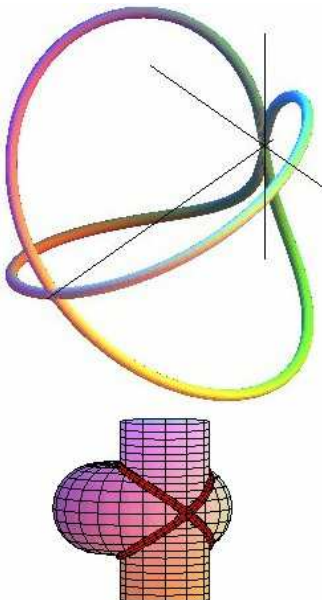
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2) \quad x^2 + y^2 = ax$$

kartesische Parametergleichung

$$\begin{aligned} x &= a \cos^2 t & y &= a \cos t \sin t \\ z &= \pm a \sqrt{(1 - \cos t) \cos t} & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \end{aligned}$$

Die Kurve ist die Schnittkurve eines Torus mit einem Rotationszylinder.

Die Kurve ist die erste krumme Kurve, die man in der Geschichte der Mathematik findet. Angenommen, es seine zwei Segmente a, b gegeben,



die mit u und v im Verhältnis stehen

$$a:u = u:v = v:b$$

$$u = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} ; v = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Durch Einsetzen der Werte aus der Proportion wird

$$x^2 + y^2 + z^2 = a \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2/b^2 x^2$$

Diese Gleichungen sind Oberflächengleichungen. Die erste ist ein Torus, die anderen beiden sind Zylinder und ein Konus. Bei Projektion der Kurve auf die xy-Ebene ergibt sich als Gleichung in Polarkoordinaten

$$\rho = b^2 / (a \cos^2 \theta)$$



Viviani-Kurve

Die räumliche Viviani-Kurve beschreibt die Durchdringung eines Zylinders und einer Kugel. Die Kurve wurde nach Vincenzo Viviani (1622 - 1703) benannt.

Parameterdarstellung

$$x = a (1 + \cos(t)) \quad y = a \sin(t) \quad z = 2a \sin(t/2)$$

Dabei gilt $0 \leq t \leq 4\pi$.

Die Projektion der Kurve in z-Richtung in die x-y-Ebene ist ein Kreis mit dem Radius a und der Parameterdarstellung ist $x(t) = a (1 + \cos(t))$ und $y(t) = a \sin t$.

Die Projektion der Kurve in y-Richtung in die x-z-Ebene ist eine Parabel, sowie die Projektion in x-Richtung auf die y-z-Ebene die Lemniskate von Gerono.

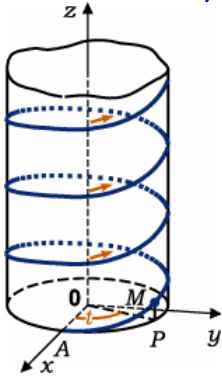
Die Bogenlänge s der Viviani-Kurve ergibt sich als elliptisches Integral

$$s = 4\sqrt{8} a \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - 1/2 \sin^2 u)} du = 15,28079115... a$$

Die Krümmung der Kurve ist gleich

$$\kappa = 1/(2a) \sqrt{(5 + 3 \cos^2 t)} / \sqrt{((1 + \cos^2 t)^3)}$$

Schraubenlinie, Helix



Die Gleichungen $x = a \cos t \quad y = a \sin t \quad z = b t$

beschreiben die sogenannte Schraubenlinie als Rechtsschraube.

Wenn ein Beobachter in die positive Richtung der z-Achse blickt, die gleichzeitig Schraubenachse sein soll, dann windet sich die Schraube beim Steigen im Drehsinn des Uhrzeigers. Eine Schraubenlinie, die sich im entgegengesetzten Drehsinn windet, wird Linksschraube genannt.

Für die Krümmung der Schraubenlinie ergibt sich

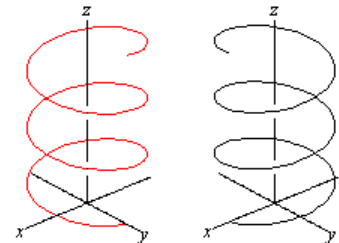
$$\text{Krümmung } K = a / (a^2 + b^2)$$

$$\text{Krümmungsradius } \rho = (a^2 + b^2) / a$$

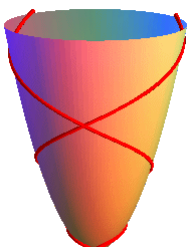
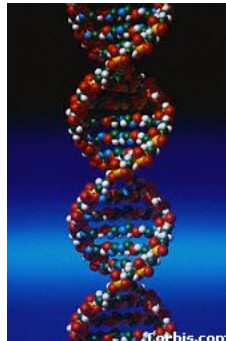
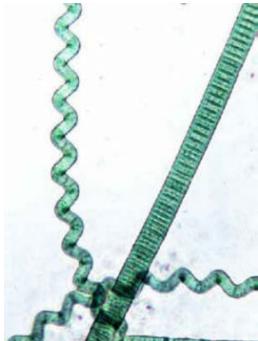
d.h. die Krümmung der Schraubenlinie ist konstant.

Die Raumspirale wird an einer Vertikalebene gespiegelt. Es entsteht eine neue Spirale (rot) mit dem entgegengesetzten Richtungssinn. Umfasst man

die rechte Spirale mit der rechten Hand und zeigt der Daumen in z-Richtung, so geht es entgegen dem Uhrzeigersinn aufwärts. Die Spirale hat eine Rechtsdrehung. Für die linke Spirale muss man die linke Hand nehmen. Die linke Spirale hat eine Linksdrehung. Fast alle Schrauben haben eine Rechtsdrehung. Sie sind rechtsgängig, passend für Rechtshänder. In der technischen Literatur wird die Rechtsdrehung so erklärt: Man wickelt ein rechtwinkliges Dreieck um einen Zylinder. Es entsteht eine rechtsdrehende Spirale, wenn das Dreieck nach rechts steigt.



Spirallinien treten in der Natur häufig auf:



Elliptische Schraubenlinie

Eine elliptische Schraubenlinie entsteht mit den Gleichungen

$$x = a \cos et \quad y = b \sin et \quad z = k \int \sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)} dt$$

Der Parameter $e = \pm 1$ entscheidet darüber, ob eine Links- oder Rechtsschraube vorliegt.

Eine parabolische Schraubenlinie ergibt sich mit

$$x = a \tan \alpha (\cos t + t \sin t) \quad y = a \tan \alpha (\sin t - t \cos t)$$

$$z = a/2 \tan^2 \alpha (1 + t^2)$$

Die entstehende Kurve schiegt sich dann dem Paraboloid $2az = x^2 + y^2$ an.

Loxodrome, Sphärische Spirale

Die Loxodrome ist eine Kurve auf einer Kugeloberfläche, die die Meridiane unter gleichen Winkeln schneidet. Sie erscheinen auf der Mercatorkarte als gerade Linien.

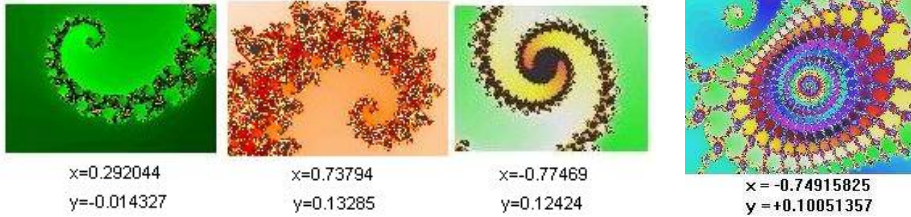
Die allgemeine Gleichung lautet:

$$x = \cos(t) \cos [1/\tan(\alpha t)] \quad y = \sin(t) \cos [1/\tan(\alpha t)] \quad z = -\sin [1/\tan(\alpha t)]$$

a ist eine Konstante. Man kann nachrechnen, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gilt. Diese Gleichung besagt, dass die Loxodrome auf der Kugeloberfläche liegt. Allgemeiner gibt es zu jedem Rotationskörper eine Loxodrome.

Fraktalspiralen

Schöne Spiralen findet man bei Mandelbrot- und Juliamengen (rechte Abbildung):



Pappusche konische Spirale

Diese auf einem Rotationskegel liegende Spirale wurde zuerst von Pappus erwähnt und 1843 von Chasles intensiv untersucht.

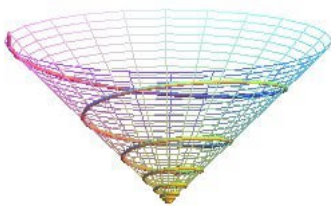
Zylindergleichung $z = (a \cos \alpha) \theta$; $\rho = (a \sin \alpha) \theta$

Kartesische Gleichung

$$x = a \sin(\alpha t) \cos t \quad y = a \sin(\alpha t) \sin t$$

$$z = a \cos(\alpha t)$$

Für $\alpha = \pi/2$ wird die Projektion der Kurve auf die x-y-Ebene zur Archimedischen Spirale.



Konische Böschungslinie, Kegel-Helix

Eine weitere Schraubenlinie ist die konische Böschungslinie. Bei dieser läuft eine Schraubenlinie auf der Oberfläche eines Kegels in der Spitze zusammen.

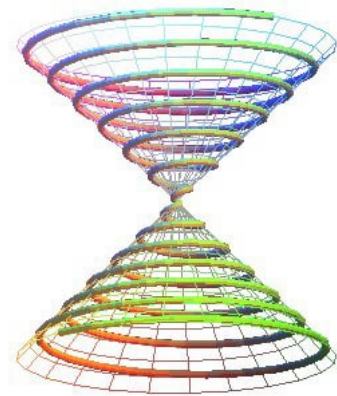
Kartesische Gleichung

$$x = a e^{kt} \cos t \quad y = a e^{kt} \sin t \quad z = a e^{kt} \cot \alpha$$

Dabei ist α der halbe Öffnungswinkel des Kegels.

Zylindergleichung $\rho = a e^{k\theta}$ $z = \rho \cot \alpha$

Die Projektion der Kurve ergibt eine logarithmische Spirale der Gleichung $\rho = a e^{k\theta}$. Auf dem Kegel stellt die Kegel-Helix eine Loxodrome dar. Diese Kurve tritt auch in der Praxis an verschiedenen Stellen auf. Einige Beispiele:



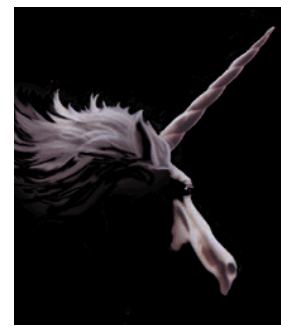
Muschel



Kudu



Kopenhagener Börse



Einhorn

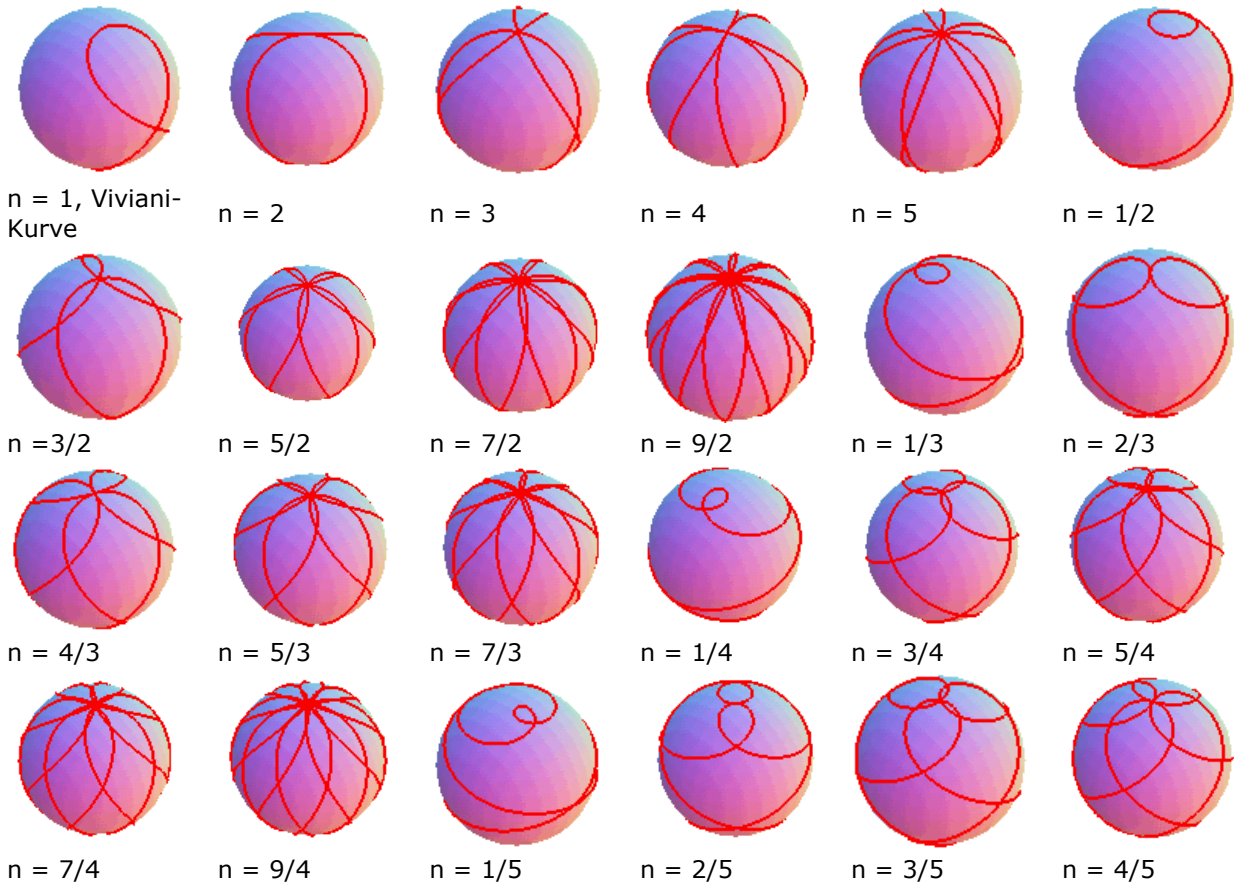
Clelia

Unter diesem Namen werden spiralförmige Kurven auf der Kugel zusammengefasst. Der Name wurde 1728 von Guido Grandi gewählt und bezieht sich auf die Heldin Clelia Borromeo eines Romans von Madame de Scudéry. Die Kurven wurden schon von Pappus untersucht und werden auch sphärische archimedische Spiralen genannt.

Kartesische Gleichungen: $x = R \cos nt \cos t$ $y = R \cos nt \sin t$ $z = R \sin nt$

Zylinderkoordinaten: $\rho = R \cos n\theta$ $z = R \sin n\theta$

Die Kurven gehören zu den algebraischen Kurven. Die Ordnung ist gleich 2 (Zähler + Nenner des Parameters n). Die Länge der Kurvenabschnitte wird durch ein elliptisches Integral beschrieben und ist somit nicht analytisch berechenbar. Die Tabelle enthält einige dieser Kurven für verschiedene n:



Tennisballkurve

Tennisbälle besitzen eine sehr typische Naht, die eine geschlossene Kurve auf einer Kugel darstellt.

Kartesische Koordinaten

$$x = a \cos t + b \cos 3t \quad y = a \sin t - b \sin 3t \quad z = c \sin 2t$$

wobei der Kugelmittelpunkt sich im Ursprung befindet, der Kugelradius $d = a+b$ ist und $c = 2\sqrt{ab}$ gilt. Die zugehörige algebraische Kurve ist von 6.Ordnung. Für $b = a$ entsteht eine oben beschriebene Clelia-Kurve.

Basketballkurve

Ebenso wie Tennisbälle besitzen auch Basketbälle eine sehr typische Naht, die eine geschlossene Kurve auf einer Kugel darstellt.

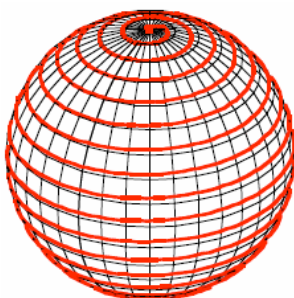
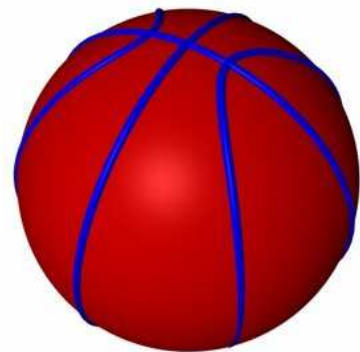
Kartesische Koordinaten

$$x = r^2 \sin t / \sqrt{a^2 \cos^2 t + r^2}$$

$$y = r^2 \sin t / \sqrt{a^2 \sin^2 t + r^2}$$

$$z = t \cos t$$

wobei der Kugelmittelpunkt sich im Ursprung befindet. r beschreibt den Radius des Balls, a einen Parameter, welcher die Form der Kurve beschreibt. Die Kurve ergibt sich als Schnittgebilde einer Kugel mit einem hyperbolischen Paraboloid. Die zugehörige algebraische Kurve ist von 6.Ordnung.



Archimedische Kugelspirale

Die Gleichungen

$$x = 2 \sin (\varepsilon/2 t) \cos ((\omega + \varepsilon/2) t)$$

$$y = -2 \sin (\varepsilon/2 t) \sin ((\omega + \varepsilon/2) t)$$

$$z = 2 \cos (\varepsilon/2 t)$$

$$\text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi/\varepsilon$$

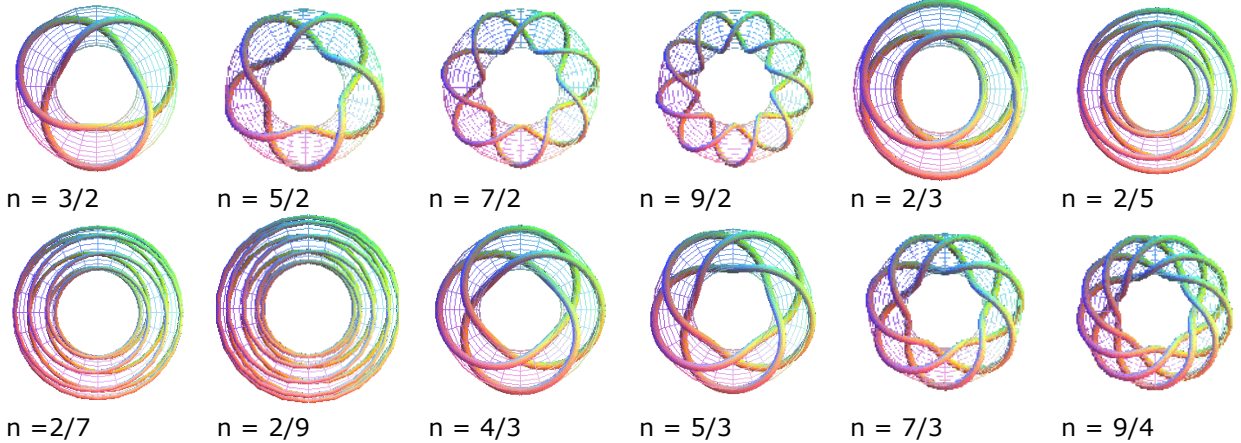
beschreiben eine räumliche Kurve auf einer Kugel mit dem Radius 2 , eine Spirale.

Diese Spirale hat zwischen zwei Umläufen immer denselben Abstand in der Süd-Nord-Richtung; sie ist also das sphärische Analogon zur archimedischen Spirale.

Torusknoten

Zylinderkoordinatengleichung
 Kartesische Parametergleichung

$$\begin{aligned} \rho &= R + r \cos \theta & z &= r \sin n\theta \\ x &= (R + r \cos nt) \cos t & y &= (R + r \cos nt) \sin t \\ z &= r \sin nt \end{aligned}$$



Die besondere Form dieser Kurven wird auch in künstlerischen Darstellungen gern genutzt:



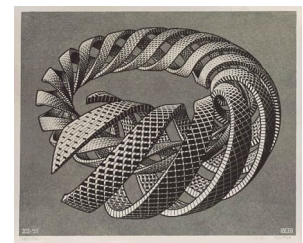
Skulptur von J. Robinson Typ 16,4
 Typ 8,3



Typ 16,4



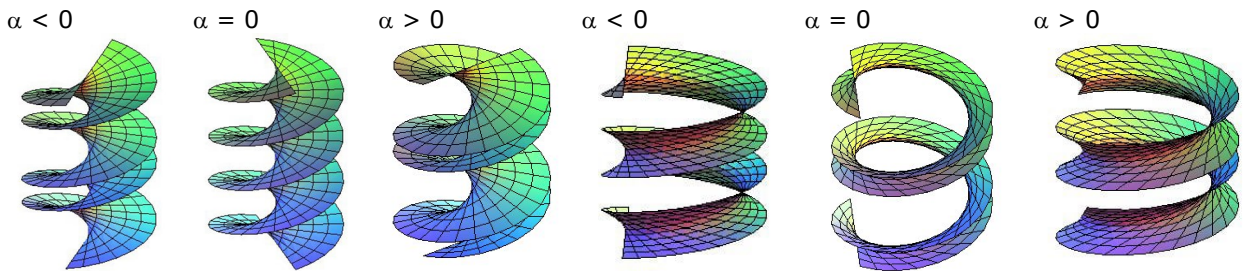
Gravur von J. Mandonnet Typ 8,3



Escher-Grafik

Regelschraubenfläche, Helixfläche

Kartesische Koordinaten $x = a \cos v - u \sin v$ $y = a \sin v + u \cos v$ $z = u \tan \alpha + hv$
 Für $a = 0$ ist die Schraubenfläche geschlossen, für $\alpha = 0$ normal. Abwickelbar ist die Fläche für $\tan \alpha = h/a$.



Links ist die Schraubenfläche geschlossen, rechts offen.



Kreisschraubenfläche

Kartesische Koordinaten

$$x = f(u) \cos v - g(u) \sin v \quad y = f(u) \sin v + g(u) \cos v$$

$$z = k(u) + hv$$

mit $f(t) = a + b \cos t$
 $k(t) = b \sin \alpha \sin t$

$$g(t) = b \sin \alpha \sin t$$

wobei α der horizontale Anstiegswinkel ist. Der Mittelpunkt der Spirale liegt in $M(a, 0, 0)$, der Radius ist b .

Für $\alpha = \pi/2 + \arctan(h/a)$ ergibt sich eine Serpentine.

Röhrenschraubenfläche

Kartesische Gleichungen

$$x = (a + b \cos u) \cos v + bh / \sqrt{a^2 + b^2} \sin u \sin v$$

$$y = (a + b \cos u) \sin v - bh / \sqrt{a^2 + b^2} \sin u \cos v$$

$$z = hv + ba / \sqrt{a^2 + b^2} \sin u$$

Für $h = 0$ entsteht ein Torus. Für $h > 0$ entsteht eine Rechtsschraube, für $h < 0$ eine Linksschraube.

Wendelfläche

Ein weitere schraubenförmige Fläche ist die Wendelfläche.

Kartesische Koordinaten

$$x = u \cos v \quad y = u \sin v \quad z = hv$$

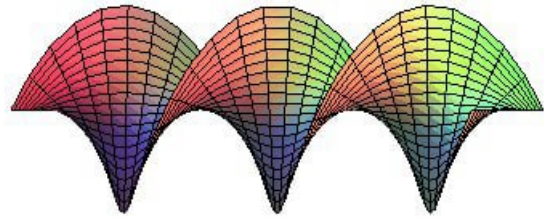
Kartesische Gleichung $y = x \tan(z/h)$

Krümmung $K = -h^2 / (h^2 + \rho^2)$

Die Fläche die von einer vollen Windung eingenommen wird beträgt $A = \pi h^2 (\operatorname{arcsinh}(a/h) + a/h \sqrt{1 + a^2/b^2})$

Die Randkurve der Fläche ist eine Schraubenlinie, Helix mit der Parametergleichung $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ und $z = ht$.

Diese Wendelfläche wird zum Beispiel vom DNS-Strang der Erbinformation gebildet. Aber auch bei anderen Gebilden und Bauwerken findet man diese Form:



Spirelli



Wendeltreppe



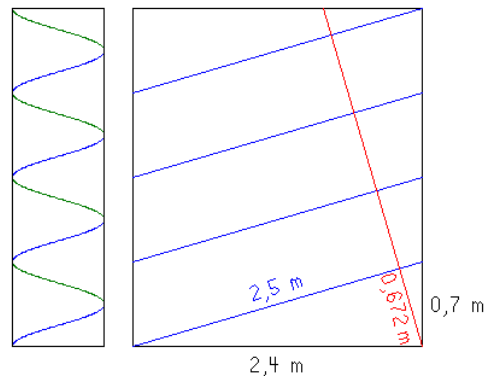
Château de Blois



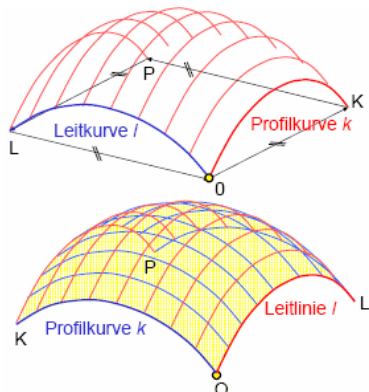
Schraubengewinde

Trajanssäule

Die Trajanssäule in Rom (ca. 114 n.Chr.) ist wendelförmig mit einem Bilderfries verziert. Ein Lateinlehrer, der eine 2,8 m hohe zylindrische Litfass-Säule, die den Umfang 2,4 m hat, geschenkt bekommen hat, möchte ihre Mantelfläche in Anspielung daran wendelförmig mit einer Tapete bekleben, und zwar genau mit 4 Windungen, ohne Überlappung. Was oben als Dreieck übrig ist, schneidet er ab und fügt es unten ein. Welche Breite muss der Tapetenstreifen haben, d.h. wie breit ist die Tapetenrolle?



Lösung: Wenn man den Zylindermantel abwickelt, erhält man mit dem Satz des Pythagoras 0,672 m als Streifenbreite, die Ganghöhe ist 0,7 m, und die Länge einer Schraubenwindung ist 2,5 m. Da 7, 24 und 25 ein pythagoreisches Tripel bilden, geht das Zahlenbeispiel exakt mit rationalen Zahlen auf, sogar mit unperiodischen Dezimalzahlen, natürlich nur, wenn ganz exakt geklebt wird.



Schiebfläche

Wird eine Kurve k (Profilkurve) entlang einer Kurve l (Leitkurve) zu sich parallel verschoben, so heißt die Menge der Punkte der dabei entstehenden zu k kongruenten Kurven eine Schiebfläche.

Wird speziell eine Gerade k längs einer Leitkurve l verschoben, so ist diese Schiebfläche eine allgemeine Zylinderfläche.

Gegeben sind eine Leitkurve l und eine Profilkurve k , die einen Punkt O gemeinsam haben (obere Abbildung):

Wendet man k Schiebungen an, welche O in Punkte der Leitkurve l überführen, so entstehen neue Lagen der Profilkurve, welche eine Schiebfläche bilden.

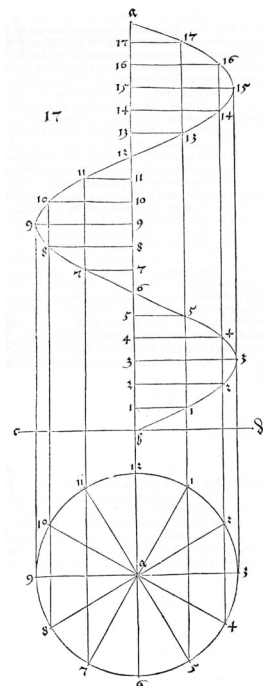
Die Rollen von Profil- und Leitkurve können vertauscht werden (untere

Abbildung):

Bei Verschiebung von k längs l entsteht dieselbe Fläche wie bei Verschiebung von l längs k. Die Fläche trägt demnach zwei Scharen von Kurven, welche zu k bzw. l schiebungsgleich sind.

In der Architektur findet man mehrere Beispiele für Schiebflächen, zum Beispiel beim Dulles Airport in Chantilly, Virginia, von Eero Saarinen.

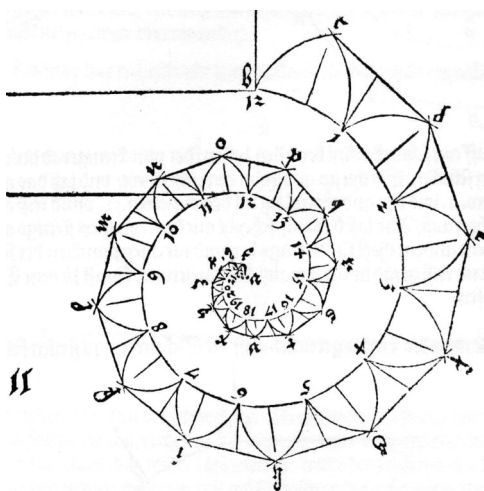
Konstruktion einer Schraubenlinie



Nach der komplizierten Konstruktion einer konischen Spirale beschreibt Dürer die Konstruktion einer eigentlich viel einfacheren Schraubenlinie.

Item noch eyn andre schneckenlini macht man auß eynem rechte zirckelryß/die auch die steyn metzen zu den stygen gebrauchen/sie wirdet aber billicher eynn schrauffen lini genant/doch man nenn sie wie man will so ist es eynn nütze lini/darumb will ich sie hynnach auch leren machenn/unnd wer suchen will mag vil darauß finden/Reyß erstlich eyn runden ryß wie vor angezeigt auß eim Centro .a. den theyl mit einer aufrechten lini/durch den Centrum .a. in zwey gleiche teil und setz oben da der zirckelriß gerürt wirdet .12. und unnden .6. darnach far auß dem punckten .12. mit eyner geradenn lini ubersich/so ferr du der bedarfst/der end sey oben .a. Darnach schneyd dise auffrechte lini unnden nahent bey dem grund des zirckelryß mit eyner zwerchlini .c.d. zu gleichen winckelen ab/der end sey .b. Darnach theyl den grund der zirckellini mit punckten in .12. gleiche theyl/unnd setz ir zal darzu/und heb zu negst bei der seyten .12. an zuzelen.1/2/3/etc. byß du wider komst zu zwölffen/ aber darnach muß die zal fort lauffen/und so weyt du der bedarfst auff eynander gestellt werden/also kumt zum ersten .13. auff eins .14. auff .2. etc./ Also mag man die zal/drey/vier/fünff/mal/unnd so oft man will ubereynander ziehe un führen/nach dem man eyn schnecke hoch machen will/So nun diser grund zugericht ist/alß dann puncttir die auffrecht lini .a.b. so in vil theyl als du wilt/und setz die zyffer darzu/und heb an bey end des .b. ubersich zu

zellen/1/2/3/4/etc. Darnach far auß dem punckten des grundes .1. aus der zirckellini ubersich durch die zwerchlini .c.d. darnach far auß der auffrechten lini .a.b. von dem punckten .j. mit einer zwerch lini gegen der auffrechten die aus dem grund des puncktes .j. ubersich gezogen ist/Wo dann dise ein eck schliessen da setz auch ein punckten .j. also thue im durch die gantz zal des grundes und der auff zognen lini .a.b. durch alle punckten/auch in der uberlauffung der zal/So nun die schneckenlini allenthalben also puncttirt ist/alßdann zeuch die schnecken lini von der hand darein wie ich dann das hynnach hab auffgerissen/Item die schnecken lini mügen auch von punctt zu punctt ecket getzogen werden/Man mag auch ein solche schnecken zwifach machen in seinem gang/Erstlich macht man die spindel im schnecken gerad und gantz/So mag man sie auch holl mache/oder gewundene also das man von oben dar durch byß auff den grund sicht/wie dan die Steynmetzen das in irem aufreissen sollen wissen zu mache/und durch verrückung der grundbretter in das werck ziehen Item auß diser vorgemelte lini macht man schrauffen von eim zweyen dreye oder vier gengen etc. da mit man so schwer unnd stark ding mag heben unnd brechen das sich deß zuverwundern ist.



Künstlerische Anwendungen von Spiralen bei Albrecht Dürer

Es folgen mehrere "künstlerische" Konstruktionen, bei denen Albrecht Dürer Spiralen zur Konstruktion eines Bischofstabes oder einer Ranke benutzte:

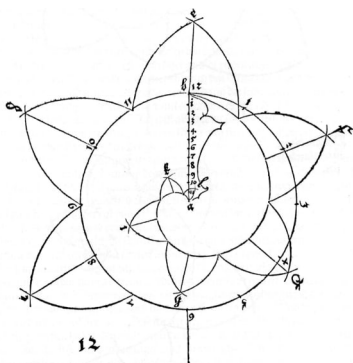
Wye du aber finden sollt nach ordnung/die leng einer yetlichen geraden Linien/die da auff den Schnecken gesetzt wurd dem thu also/Nym eyn zirckel/setz in mit dem ein fuß in den Punckten .12. Und den Andern in den Punckten .i. und reeyß vondan rund ubersich/Darnach setz des zirckels fus in den Punckten .i. und den andern in den Punckten .12. von dan reiß auch runde ubersich/wo sich dann die zwen runden ryß durch eynander schneyden/da setz eynn Punckten .c. Also thu zwischen allen Punckten der zyffern in der Schnecken Lini/als zwischen .1/2. und .2/3.etc. unnd bezeichnen oben die schluß der runden Ryß nach eynander/Als .d.e.f.g.etc. durchs ganz

abc./so weyt es reycht/So du dan mit geraden Lini zusammen zeuchst .c.d. und .d.e. und .f.g. etc./ also durch den gantzen umblauff aller buchstabenn/so schneyden sie dir ab die gestragten Linien die da getzogen sind aus den Punckten .1/2/3/4/etc./ also durch die andern zal all/So du aber die bletter/die durch die runden Ryß worden sind/füglich mit eym mittel Ryß teylen willt/so reiß erstlich aus dem

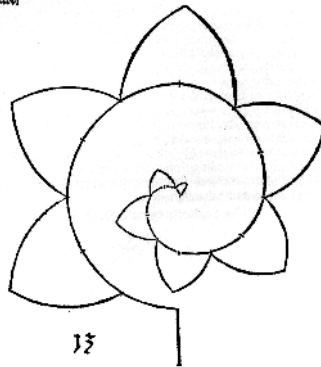
Punckten .c. darnach aus den Punckten .d.e.f.g.etc./geradt Linien gegen dem Centro .a. byß auff die Schneckenlini/Also komet diese ding ordentlich/das sichestu hieunden auffgerysen.

Dürer beschreibt, wie er die Länge der eben konstruierten "Normalen" als Höhen in gleichseitigen Dreiecken bestimmt. Dabei wird die Seitenlänge des jeweiligen Dreiecks durch die Bogenlänge der Spirale in dem jeweiligen Kreissektor bestimmt, in dem die "Normale" liegt.

Forthyn will ich die Schneckenlini eynfach machen/und vom Cirkelryß in Centru .a. füren/auch wider bletter darauff setzen/Aber die geraden Linien/die durch die bletter getzogen werden/stendt anders/dan die vorgestellten Linien/Erstlich reiß aus dem Zentrum .a. ein zirckelriß/und puncttir in mit ziffern wie vor/Aber die auffrecht Lini/.a.b. damit du umher ferst/die zerteyl mit .11. punckten in .12. gleiche felt/Und far dan wider mit herum/wie du vor bericht bist/und puncttir die Schneckenlini/byß in Centru .a. Also ist dise Lini gemacht und zu vill dingen breuchlich/ sonderlich ist sie auch zu eynem Bischoffstab zu brauchen zu dem mus man im also thun/Zeuch von dem zirckelryß/aus dem punckten .6. eyn gerade Lini undersich/un brauch den halben zirckelryß/mit der grössern zal/zu sambt der Schneckenlini/Aber den andern halben zirckel/mit der mindern zal/laß aussen/darnach nym ein zirckel/un setz in mit dem ein fuß auf der zirckellini in de punckte .9. un mit de andern fuß/in de punckte .7. un reyß von dan rund herauß/eyn rundt zirckeltrum/darnach setz den eyn fuß in den punckten .7. und reyß mit dem andern fuß auß dem punckten .9. herauß/und wo sich die zwu krumen linien oben schliessen/da setz eyn punckten .c. unnd reiß von der zirckellini/auß dem punckten .8. ein gerade lini in dem punckten .c. Also thu im auch zwischen den zweyen punckten .9. und .11. und setz oben in der runden schlyssung eyn .d. Darnach setz den zirckel/mit dem eyn fuß/im zirckelriß/in den punckten .11. unnd mit dem andern fuß/auff die schneckenlini in den punckten .1. und reyß von dann ubersich hynauß/Darnach setz wider den ein fuß in den vorgemelttem punckten .1. und den andern in den punckten .11. un reyß von dan hynaus wo dan die krumen linien schlyssen da setz eyn .e. Also thu im darnach zu gleicher weis/auff der schneckenlini/zwischen den punckten .1/2. und .3/5. und .5/7. und .7/9. und .9/11. und betzeichen oben ir schlus/ nach einander .f.g.h.i.k. Darnach reis den blettern/auff in der schneckenlini. geradt rys .e.12/.f.2/g.4/h.6/i.8/k.10/Darnach bleibt noch uber ein trum zwischen .11. und dem Centro .a. das zeuch auch mit dem zirckel zusammen/und der schlus sei oben .l. Solichs wie oben beschriben/hab ich also nachfolget zwifeltig auff geryssen/Erstlich mit allen nöttigen rissen/darauß dise ding gemacht sind/darnach ledig/Dise verzeichnus ist zu vil dingen nützlich/Auch ist dise schneckenlini/ledig zu einem laubbossen zu brauchen/wie ich das auch hie nach hab auffgerysen.



Dise bletter sind des Bischoff stabes



Dise lini dienen zu einem laubboß fen.

