Universität Heidelberg
Vladislav Olkhovskiy
1. Oktober 2015

Mengenlehre

Übungsaufgaben

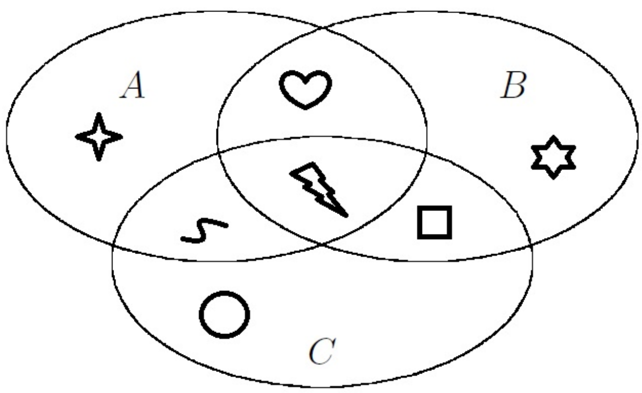
Aufgabe 1: Elementares zum Einstieg
Sei $A = \{S, O, N, E\}$ und $B = \{S, C, H, E, I\}$

1. Bestimme $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times A$, $A \cap A \cap A$, $A \cup A \cup A$, $A \Delta B$, $(A \backslash B) \times (B \backslash A)$, $A \backslash (A \cap B)$
2. Was sind die Mächtigkeiten der obigen Mengen?
3. Welche Worte lassen sich aus aus den Buchstaben der Menge A erzeugen? (Nenne mindestens 3, die auch in deutscher Sprache existieren.) Welches Wort lässt anhand von allen Buchstaben aus $A \cup B$ erzeugen? *Hinweis: Man darf die Buchstaben mehrmals in den Worten verwenden.*

Aufgabe 2: Leere Menge
Es seien folgende Mengen definiert: $C = \emptyset$, $B = \{C\}$, $A = \{B\}$.
Welche Aussagen sind wahr?

1. $\emptyset \in A$
2. $\emptyset \subset A$
3. $B \in A$
4. $B \subset A$
5. $\emptyset \subset C$
6. $\emptyset \in C$
7. $\emptyset \in P(C)$
8. $\emptyset \in \{P(C)\}$
9. $\{\mathbb{N}\}$ ist eine unendliche Menge
10. $P(\mathbb{N})$ ist eine unendliche Menge

Aufgabe 3: Durchschnitte und Vereinigungen I



Wie erhält man die mit verschiedenen Formen gekennzeichneten Mengen nicht überschneidenden Teilmengen der Ebene durch Mengenoperationen aus A, B und C?

Aufgabe 4: Durchschnitte und Vereinigungen II
Es seien A, B, C Mengen mit $A \subset B, B \subset C$. Überlege, wie du folgende Ausdrücke vereinfachen kannst:

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
3. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)$

Aufgabe 5: Kardinalität I
Es seien A, B, Ω Mengen mit $A, B \subset \Omega$. Die Menge Ω enthält 100 Elemente, die Menge A enthält 20 Elemente und die Menge B enthält 10 Elemente. Zusätzlich gilt, dass $(\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B) = 75$ gilt. Wie viele Elemente sind in $A \cap B$ enthalten?
Hinweis: Benutze die Lemmata aus dem Vortrag und überlege dir zunächst, wie du $A \cup B$ geeignet zerlegen kannst.

Aufgabe 6: Kardinalität II
Finde zwei Mengen M, N mit $\#M = \infty$ und $\#N = \infty$, aber mit $\#M \cap N = n$ für jede natürliche Zahl n.

Aufgabe 7: Durchschnitte und Vereinigungen III
Es seien A, B, C beliebige Mengen. Gilt folgende Aussage: $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$. Falls ja, beweise, falls nein, gibt ein Gegenbeispiel an und finde für diese Aussage eine Bedingung, unter der sie gilt und beweise die Aussage unter dieser Bedingung.

Aufgabe 8: Vollständige Induktion
Zeige folgende Aussagen mit Hilfe der vollständigen Induktion

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $3^n - 3$ ist teilbar durch 6.
2. $\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$
3. Man kann n unterscheidbare Elemente auf $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$ verschiedene Arten anordnen.

Aufgabe 9: Elementare Beweise zu den Mengenoperationen
Seien $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Beweise folgende Aussagen:

1. $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$,
2. $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$ sowie $A \cap B \subseteq A \cup B$,
3. $A \cap M = A$ und $A \cup M = M$

Aufgabe 10: Komplexere Beweise zu den Mengenoperationen
Seien $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Beweise folgende Aussagen:
1. $M \setminus (M \setminus A) = A$ 2. $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ 3. $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

Aufgabe 11: Komplexere Konstruktionen mit Mengen
Seien $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Welche Elemente sind in folgenden Mengen enthalten?

1. $U_1 = \cap_{i=1}^{k} A_i$
2. $U_2 = \cup_{i=1}^{k} A_i$
3. $U_3 = \cup_{i=1}^{10} (A_{3i} \setminus A_{2i})$

Aufgabe 12: Finde den Fehler im Induktionsbeweis
Satz: Alle Katzen haben dieselbe Farbe.
Beweis: (per Induktion über Katzengruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$):
Induktionsanfang: In einer Menge mit nur einer Katze haben alle Katzen dieselbe Farbe. Das ist offenbar wahr.
Induktionsschluss: Wegen der Induktionsvoraussetzung darf angenommen werden, dass bereits in jeder Menge von n Katzen alle Katzen dieselbe Farbe haben. Betrachte nun die Menge von $n+1$ Katzen. Durch Aussondern einer Katze erhält man die Menge von n Katzen - die wegen der Induktionsvoraussetzung - ale dieselbe Farbe haben. Fügt man nun eine ausgesonderte Katze hinzu und nimmt eine andere Katze heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Katzen dieselbe Farbe. Die ursprünglich herausgenommene Katze hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Katzen in der Gruppe. Daher mü ssen alle $n+1$ Katzen dieselbe Farbe haben. Somit können in jeder beliebig gro ßen, endlichen Menge von Katzen nur Katzen derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Katzen dieselbe Farbe haben. q.e.d

Bonus: Gibt es Mengen, für die gilt: $\#P(\{A\}) < \infty$, aber $\#A = \infty$?