Universität Bremen
Fachbereich 3 – Mathematik

Prof. Dr. Christiane Tretter
Markus Wagenhofer

Analysis III

Übungsblatt 12

45. Gibt es abzählbar unendliche σ-Algebren? (*Hinweis*: Ohne Beweis darf benutzt werden, daß $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.)

46. Es seien X eine überabzählbare Menge,

$$\mathfrak{M} := \{E \subset X : E \text{ höchstens abzählbar oder } X \setminus E \text{ höchstens abzählbar}\}.$$

und

$$\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}, \quad \mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, & X \setminus E \text{ höchstens abzählbar.} \end{cases}$$

   (a) Zeige, daß $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$ ist.

   (b) Bestimme die meßbaren Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ und dazu jeweils $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

47. (a) Ist $\mathfrak{M} := \{E \subset [0,1] : \chi_E \text{ Riemann-integrierbar über } [0,1]\}$ eine Algebra bzw. σ-Algebra?

   (b) Zeige, daß im Lemma von Fatou die strikte Ungleichung

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu < \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

   auftreten kann.

48. Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ nicht leer und

$$d_A : X \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

   (a) Zeige, daß d_A stetig ist und daß $\overline{A} = d_A^{-1}(\{0\})$.

   (b) Es seien $A \subset X$ abgeschlossen und $U \subset X$ offen mit $A \subset U$. Zeige, daß es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, so daß $f(x) = 1$, $x \in A$, und $f(x) = 0$, $x \in X \setminus U$. Folgere, daß es ein offenes $V \subset X$ gibt, so daß

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Abgabe am Donnerstag, den 22. Januar 2004, in der Vorlesung.