

# Arithmetik und ihre Didaktik

Es gibt Vorlesungen über abzählbare Mengen und  
Vorlesungen über überabzählbare Mengen.

# Wenn die reellen Zahlen abzählbar wären...

---

... dann könnten wir sie alle auf eine lange Liste schreiben. Wir nehmen mal nur das Intervall  $]0,1[$  – alle Zahlen größer als 0 und kleiner als 1.

Diese Liste denken wir uns aufgeschrieben und beweisen nun, dass (entgegen unserer Annahme) doch nicht alle Zahlen darauf stehen.

Daraus schließen wir, dass diese Liste nicht existieren kann – es gibt *überabzählbar* viele reelle Zahlen.

Also los!

# Cantors zweites Diagonalargument

Angenommen:

$]0,1[$  wäre gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$ , d.h.  $]0,1[$  wäre abzählbar

Dann müsste es eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}$  und  $]0,1[$  geben:

Widerspruch!

1	←	0,	0	4	7	3	3	2	4	3	...	$x=0,28014\dots q'$
2	←	0,	7	7	7	7	7	7	7	7	...	
3	←	0,	4	5	9	7	8	1	2	3	...	
4	←	0,	1	1	0	0	0	0	0	0	...	
5	←	0,	8	1	0	0	3	7	7	9	...	
⋮			⋮				⋮					
z							q					

$q' \neq q$

unterscheidet sich von der reellen Zahl Nr. z der Liste mindestens an der Stelle z

Egal wie die Liste gewählt wird – es gibt stets (mindestens) ein solches  $x$  aus  $\mathbb{R}$ , das nicht auf der Liste stehen kann!

**Damit wissen\* wir:**

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

\*) wir haben es sogar bewiesen

## Können Sie noch Dualbrüche?

Über das Divisionsverfahren kann man nicht nur im Dezimalsystem Darstellungen von Brüchen als Systembrüche finden.

Im Dualsystem (Basis: 2) ist das besonders ungewohnt. Was ist  $1/1010$  (im Dualsystem) denn?

- ▶ Berechnen Sie den Dualbruch durch schriftliche Division!

Dazu müssen Sie alle Vielfachen von  $1010$  kennen...

- ▶ Wahlweise dürfen Sie auch den Dezimalbruch  $0,1$  in das Dualsystem umwandeln.

Tipp:  $(0,abcd\dots)_2$  entspricht  $a$  Halbe +  $b$  Viertel +  $c$  Achtel +  $d$  Sechzehntel + ...

# Feststellungen

---

- ▶ Das schriftliche Dividieren ist mal wieder ein **Prozess** – der uns eine reelle Zahl immer genauer angibt.
- ▶ Das Umwandeln von einem Stellenwertsystem in ein anderes ist auch ein solcher Prozess
- ▶ Die Dualbruchentwicklung von einem Zehntel ist periodisch...  
eklig.
- ▶ Dualbruchentwicklungen geben uns unendlich lange Prozesse von „ja (1)“ oder „nein (0)“

0,010100110101110100110010000110100010111001...