Dr. Meike Akveld

Serie 4 – Vektorräume, Unterräume

1. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Sei $W \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge. Beweisen Sie, dass W genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $u - \lambda v \in W$ für alle $u, v \in W$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

   (b) Seien $W, W' \subseteq V$ Unterräume, dann ist $W \cup W'$ ein Unterraum genau dann, wenn $W \subset W'$ oder $W' \subset W$.

   (c) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ ein Unterraum ist und zeigen Sie, dass dies der kleinste Unterraum von V ist, der W_1 und W_2 enthält, d.h. falls $W \subset V$ ein Unterraum und $W_1 \cup W_2 \subset W$, dann gilt $W_1 + W_2 \subset W$.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\alpha \in \mathbb{K}$. Sei

   $$V_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}$$

   Zeigen Sie, dass $V_\alpha \subset \mathbb{K}^3$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $\alpha = 0$.

3. Sei $V := \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, versehen mit Addition und skalarer Multiplikation wie in der Vorlesung definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien $W_1, W_2 \subset V$ gegeben als

   $$W_1 := \{A \in V \mid i < j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
   $$W_2 := \{A \in V \mid i \geq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$

   Dann sind W_1, W_2 Unterräume von V und $V = W_1 \oplus W_2$, d.h. V ist die Summe der *oberen* und *strikt unteren Dreiecksmatrizen.*

   (b) Seien $W_3, W_4, W_5 \subset V$ gegeben als:

   $$W_3 := \{A \in V \mid i > j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
   $$W_4 := \{A \in V \mid i \neq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
   $$W_5 := \{A \in V \mid i \geq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$

   Dann sind W_3, W_4, W_5 Unterräume von V und $W_3 = W_4 \oplus W_5$.

(c) Seien $m = n$ und

$$\begin{aligned} W_6 :=& \{A \in V \mid A_{11} + \cdots A_{nn} = 0\} \\ W_7 :=& \{A \in V \mid (i \neq j \Rightarrow A_{ij} = 0) \wedge (\exists c \in \mathbb{R}\, \forall i : A_{ii} = c)\} \end{aligned}$$

Dann sind W_6, W_7 Unterräume und $V = W_6 \oplus W_7$.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Seien

$$\begin{aligned} V_1 :=& \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{K} : f(-x) = f(x)\} && \text{(gerade Funktionen)} \\ V_2 :=& \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{K} : f(-x) = -f(x)\} && \text{(ungerade Funktionen)} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume sind.

(b) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass $V = V_1 \oplus V_2$. *Hinweis:* gegeben $f \in V$, betrachten Sie $\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big)$.

(c) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $V \neq V_1 \oplus V_2$.

5. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathcal{F}(X, V)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V, mit punktweiser Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in X \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall x \in X \forall f \in \mathcal{F}(X, V) \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Seien $x \in X$ und $v \in V$, sowie $\mathcal{F}_{x,v} := \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid f(x) = v\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{x,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0$.

(b) Finden Sie einen Unterraum $W \subset \mathcal{F}(X, V)$, so dass

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{x,0} \oplus W$$

6. Online Abgabe:

1. Welche der folgenden Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^4$ sind Unterräume?

(a) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$

(b) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$

(c) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x, x + y, y, x - y)\}$

(d) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x^2 - y^2, 0, 0, 0)\}$

(e) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y \wedge v = (x, y, 0, 0)\}$

2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\emptyset \subset V$ ist ein Unterraum.

(b) V enthält einen Unterraum $W \subset V$ mit $W \neq V$.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

3. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen versehen mit der Addition

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

(b) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 1\}$ ist ein Unterraum.

(c) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid 2 \mid n \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

(d) Keine der Aussagen ist wahr.

4. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U_1, U_2 Unterräume. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Unterräume?

(a) $U_1 \cap U_2$

(b) $U_1 \cup U_2$

(c) $U_1 \setminus U_2$

(d) $\{0_V\}$

(e) Keine der Mengen ist ein Unterraum

5. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

Welche von folgenden Mengen sind Unterräume von V?

(a)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

(b)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

(c)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(d)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

6. Sei $P(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome. Wir bezeichnen mit $p'(X)$ die Ableitung von $p(X) \in P(\mathbb{R})$. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $P(\mathbb{R})$?

(a) $V := \{p(X) \in P(\mathbb{R}) \mid p(X)^2 = X\}$

(b) $V := \{p(X) \in P(\mathbb{R}) \mid p(0) = 1\}$

(c) $V := \{p(X) \in P(\mathbb{R}) \mid p''(X) = p'(X)\}$

(d) $V := \{p(X) \in P(\mathbb{R}) \mid p(-2) \geq 0\}$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 21. Oktober 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.