Defn Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Cauchy Folge falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ so dass}$$

$$\forall m, n > N: \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Satz Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann

(a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist Cauchy Folge

(a_n) ist divergent $\iff$ (a_n) ist kein Cauchy Folge

Bsp (Harmonische Reihe) Sei $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Dann, (a_n) ist kein Cauchy Folge. Deswegen (a_n) ist divergent

Im gegensatz:

Bsp ① (Alternierende Harmonische Reihe)

Sei $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Dann ist b_n konvergent.

② Leibniz Reihe

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit $a_{k+1} \geq a_k$ und $\lim a_n = 0$.

Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 \dots \dots + (-1)^{k+1} a_n$

Dann ist S_n konvergent.

§ 3.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$

Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$, $n \to a_n = (a_n^1, a_n^2 \dots a_n^d)$

Sei $(a^1, a^2, \dots a^d) = a \in \mathbb{R}^d$

$(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert gegen a, Falls für jedes $\varepsilon > 0$, einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so dass $\|a_n - a\| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$.

d.h $\lim \|a_n - a\| = 0$

Satz Sei $(a_n) = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots a_n^{(d)}) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge.

Dann

$$a_n \to a = (a^{(1)}, \ldots a^{(d)}) \iff \forall i \in \{1, \ldots, d\} : a_n^{(i)} \to a^{(i)}$$

§ 3.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$

Sei $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, die Folge der Partielsumnen

- Eine Reihe ist eine unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$ einer Folge

- Die Reihe ist konvergent falls die Folge $(s_n)_{n \geq 1}$ konvergiert

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

s heisst der Wert oder die Summe der Reihe

Bsp ① **Geometrische Reihe**. Sei $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Dann, $\begin{cases} \text{ist } \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ divergent, falls } |q| \geq 1 \\ \text{ist } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ also konvergent, falls } |q| < 1. \end{cases}$

② **Harmonische Reihe**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots$ ist divergent

③ **Teleskope Reihe**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$, also konvergiert.

Konvergenz Kriteren.

Satz 37.1 (Cauchy Kriterien). Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ist konvergent} \iff \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \to 0 \quad \forall n \geq m, \; m \to \infty.$$

d.h für jedes $\varepsilon > 0$, einen Index $N(\varepsilon)$ gibt so dass

$$\forall n \geq m > N(\varepsilon), \quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Bmk Als eine Folgerung, erhalten wir die Folgende Notwendige Bedingung zur Konvergenz.

Satz Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent so muss gelten $\lim a_k = 0$.

d.h. $\sum a_k$ konv $\Longrightarrow \lim a_k = 0$.

Vorsichtig! $\lim a_k = 0 \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konv.

z.B Harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$ $\lim a_k = 0$.

aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Bmk. $\lim a_k \neq 0 \Longrightarrow \sum a_k$ divergiert.

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} k$ ist divergent, da $\lim k \neq 0$.

$\sum 2^n$ ist divergent, da $\lim 2^n \neq 0$.

Für eine Reihe mit positiven Glieder haben wir

Satz: Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k > 0$

Dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konv $\Leftrightarrow$ $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist beschränkt.

Beweis: Monotone konv. Satz.

s_n ist monotone wachsend $\quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$

s_n ist konv $\Leftrightarrow$ s_n ist beschränk.

Ob eine Reihe konvergiert oder divergiert kann man oft feststellen, indem man sie mit einer Reihe vergleicht, deren Konvergenz oder Divergenz man bereits kennt.

<u>Defn</u> (<u>Majorante</u>) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe.
Eine reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ $\forall\, k \geq 0$ heisst <u>Majorante der Reihe</u> $\sum a_k$.

Satz (Majorantenkriterien).

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen wobei

1) es gibt k_0 so dass $0 < |a_k| \leq b_k$ $\forall k > k_0$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent.

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon) > k_0$ so dass

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \right| < \varepsilon \qquad \forall n > m > N(\varepsilon) > k_0.$$

(Da $\sum b_k$ konvergiert (Cauchy Kriterium)).

Aus 1) folgt $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \leq \varepsilon$

Der Satz folgt aus dem Cauchy Kriterium.

Bsp. Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\frac{1}{k^2} \xrightarrow{?} \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k^2} \xrightarrow{?} \frac{1}{k(k+1)}$$

$k < k^2$

$\sum \frac{1}{k} > \sum \frac{1}{k^2}$ $\Rightarrow$ kein Information

$k^2 < k(k+1)$ aber $k^2 > (k-1)(k)$ $k \geq 2$

$$\sum \frac{1}{k^2} > \sum \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{1}. < \infty.$$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist auch konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

<u>Folgerung</u> (Divergente Minorante)

Seien $\sum a_k$ $\sum b_k$ Reihen mit

$0 \leq a_k < b_k \quad \forall\, k \geq 0.$

Ist $\underline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

<u>Bsp.</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\qquad \sqrt{k} < k \qquad k \geq 1$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}} > \underbrace{\sum \frac{1}{k}}_{\text{divergent}}$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist auch divergent.

Mittels Vergleich mit der geometrischen Reihe erhalten wir die folgende "Quotienten" Kriterium.

<u>Satz 3.7.2.</u> (Quotientenkriterium). Sei $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

1) Falls ein $k_0 \in \mathbb{N}$, und $0<q<1$ gibt so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \qquad \forall\, k > k_0$$

so ist $\sum a_k$ konvergent.

2) Falls ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und $q > 1$ gibt so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q > 1 \qquad \forall\, k > k_0$$

so ist $\sum a_k$ divergent.

Vorsichtig! Die genaue Formulierung "mit q" ist wesentlich.

Um die Konvergenz zu garantieren, genügt es **NICHT**, dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ gilt.

Bsp $\quad a_k = \frac{1}{k}, \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right| < 1$ aber

Sie ist divergent

$$\text{Sie} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bmk: ① Das Quotienten kriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1.$$ Dann ist $\sum a_k$ konvergent

② Die Reihe $\sum a_k$ ist divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| > 1.$$

Bsp. ① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right|$$

$$= \left|(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

mittels Quotientkrit. $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.

$\sum a_k$ konv. $\Longrightarrow$ $\lim a_n = 0$

$\Longrightarrow$ $n!/n^n \to 0$ d.h. n^n wächst schneller als $n!$

Bsp* (2). **Exponentialreihe.**

Sei $z \in \mathbb{C}$

Wir definieren die **Exponentialreihe**

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Dann konvergiert $\operatorname{Exp}(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: $a_k = \dfrac{z^k}{k!}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k}\right| = \left|\frac{z}{k+1}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|z|}{k+1} = |z| \underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}} = 0 < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

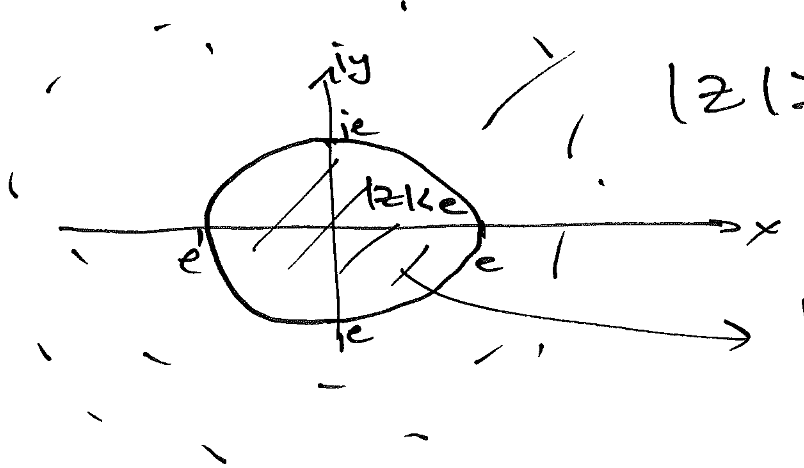
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$. For welche $z \in \mathbb{C}$, ist sie konvergent?

Sei $a_k = \frac{z^k k!}{k^k}$ $\qquad$ ($\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – Potenzreihe "unendliche Polynom")

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{z^k k!}\right| = |z| \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |z| \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{|z|}{e}.$$

Somit folgt $\begin{cases} \text{konvergenz} & \text{for } |z| < e \\ \text{divergenz} & \text{for } |z| > e. \end{cases}$



$|z| > e$.

Konvergenzkreis.

<u>Bmk</u> Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, Quotientenkriterium versagt
gibt kein INFO.

z.B. $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to 1$ $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ konv.

aber $a_n = \frac{1}{n}$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right) \to 1.$ $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ div.

Satz 3.7.2 ... Quotientenkriterium.

Sei $a_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

1) Falls $\limsup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$

so ist $\sum a_k$ konv.

2) Falls $\liminf \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$ so ist

$\sum a_k$ div.

Was sind diese limsup, liminf?

Sei (a_n) eine beschränkte Folge.

Für jedes $k \geq 1$, ist die Menge.

$$A_k = \{a_k, a_{k+1}, \ldots\} = \{a_n : n \geq k\}.$$

beschränkt und zu dem gilt

$$A_{k+1} \subset A_k.$$

Sei also $m_k := \operatorname{Inf} A_k$

$M_k := \operatorname{Sup} A_k$.

$m_{k+1} \geq m_k$, und $M_{k+1} \leq M_k$ und $m_k \leq M_k$.

d.h $c \leq m_1 \leq m_2 \cdots \leq m_k \cdots \leq \cdots \leq \cdots \leq M_2 \leq M_1 = D$.

Beide Folgen, m_k, M_k, konvergieren

Wir definieren $\underbrace{\lim_{k\to\infty} m_k}_{\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n} =: \liminf_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to\infty} M_k =: \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

<u>Beweis</u>. (Quotientenkriterium).

Es gibt k_0, und $q<1$ so dass für alle $k\geq k_0$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$$

für alle $k \geq k_0$.

$$|a_{k+1}| = \underbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{\leq q} \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|}_{\leq q} \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right| \cdot \dots \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}}\right|}_{\leq q} \underbrace{|a_{k_0}|}_{|a_{k_0}|}$$

$$\leq q^{k-k_0+1} |a_{k_0}| = q^k \underbrace{\left|\frac{a_{k_0}}{q^{k_0-1}}\right|}_{\text{konstant}} = C q^k .$$

$$\sum |a_{k+1}| \leq c \underbrace{\sum q^k}_{}$$

konv falls $q < 1$

Mit Majorantenkriterium, ist $\sum a_k$ auch konv. $\boxtimes$

Quotientenkriterium versagt, wenn unendlich viele a_k verschwinden oder falls $\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$.

<u>Satz 3.7.3.</u> (Wurzelkriterium).

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$

1) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum a_k$

2) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum a_k$.

Bmk. Falls $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = L$. Dann gilt

1) $L < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.
2) $L > 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.
3) $L = 1 \Rightarrow$ kein INFO!

Lemma Sei a_n eine Folge. Dann gilt.

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

"Coming attraction" Riemann Zeta Funktion

Für $s > 1$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Für diese reihe Funktioneren weder Quotienten noch Wurzelkriterium.