

# Übungsblatt 13

keine Abgabe

**Aufgabe 1.** Zeige

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2(\phi)} d\phi = \pi\sqrt{2}$$

und

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(\phi)}{2 + \cos(\phi)} d\phi = \pi(2 - \sqrt{3}).$$

**Aufgabe 2.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

- (i) Je zwei stetige Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$  sind homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt.
- (ii) Jede geschlossene Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  ist homotop zu einer konstanten Kurve relativ zu  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

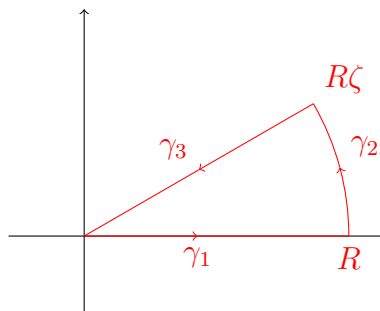
**Aufgabe 3.** Zeige, dass jede konvexe Teilmenge von  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist.

**Aufgabe 4.** Zeige, dass  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.** Zeige

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{x^m + 1} dx = \frac{\pi}{m \sin((n+1)/m \pi)}$$

für  $0 \leq n \leq m - 2$ . Sei  $R > 0$  und  $\zeta = e^{2\pi i/m}$ . Integriere  $f(z) = \frac{z^n}{z^m + 1}$  über die Strecke  $\gamma_1$  von 0 bis  $R$ , den Kreisbogen  $\gamma_2$  von  $R$  bis  $\zeta R$  und die Strecke  $\gamma_3$  von  $\zeta R$  nach 0.



Nutze die Symmetrie  $f(\zeta z) = \zeta^n f(z)$ .

★ **Aufgabe 6.** Bestimme die Automorphismengruppe des Kreisring

$$T = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

für  $0 < r < R$ .