Lineare Algebra I/II

D-MATH und D-PHYS, HS 14/FS 15 Prof. Richard Pink

Basisprüfung

8. Februar 2016

1. [*8 Punkte*] Für einen gegebenen Parameter a betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a \\ -2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie für eine beliebige Primzahl p den Rang von A über $\mathbb{F}_p$ in Abhängigkeit von a.

2. [*6 Punkte*] Sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 in $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt, welches für $p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2$ und $q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2$ in V definiert ist durch

$$\langle p(X), q(X)\rangle := p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2.$$

Betrachten Sie zudem für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ den Endomorphismus

$$\Phi_s \colon V \to V,\ p(X) \mapsto p(X+s).$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ_s bezüglich der geordneten Basis $(1, X, X^2)$.

(b) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche Φ_s normal ist.

3. [*5 Punkte*] Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der reellen symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. [*11 Punkte*] Betrachten Sie die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

(c) Berechnen Sie eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich A.

(d) Berechne die Exponentialmatrix $\exp(A)$.

5. [*7 Punkte*] Bestimmen Sie für beliebiges $n \geq 1$ die Determinante der rationalen Matrix

$$A_n := \left(\delta_{ij} + \frac{i}{j}\right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet.

6. [*9 Punkte*] Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(a) Für jeden Untervektorraum $W \subset V$ gilt $f(W) \subset W$.

(b) Es existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

(c) Für jeden Endomorphismus $g\colon V \to V$ ist $f \circ g = g \circ f$.

7. [*9 Punkte*] Sei n eine positive ganze Zahl, und sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums mit charakteristischem Polynom $X^{n^2} - 1$. Bestimmen Sie:

(a) das charakteristische Polynom von f^n.

(b) das Minimalpolynom von f^n.

(c) das charakteristische Polynom von $f + f^{-1}$ im Fall $n = 2$.

Schreiben Sie das Resultat jeweils in möglichst kurzer Form.

8. Multiple Choice-Aufgaben. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Nur Ankreuzen, ohne Begründung.

Eine korrekte Antwort gibt **1 Punkt**, keine Antwort gibt **0 Punkte**, und eine inkorrekte Antwort gibt **-1 Punkt**. Eine negative Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgaben wird zu 0 aufgerundet.

(a) Es ist $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = p(2)\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(b) Jeder surjektive Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ ist auch injektiv.

☐ Richtig ☐ Falsch

(c) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann existiert für jedes $\ell \in V^*$ genau ein Vektor $v_0 \in V$ mit $\ell(v) = \langle v_0, v\rangle$ für alle $v \in V$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(d) Jeder K-Vektorraum ist isomorph zu dem Quotientenvektorraum U_1/U_2 für geeignete *nicht-triviale* K-Vektorräume $U_2 \subset U_1$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(e) Für beliebige endlichdimensionale K-Vektorräume V und W sind $(V \boxplus W)^*$ und $\mathrm{Hom}_K(V, W^*)$ isomorph.

☐ Richtig ☐ Falsch

(f) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums. Falls f kein Isomorphismus ist, dann ist $\dim(\mathrm{Kern}(f^2)) > \dim(\mathrm{Kern}(f))$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(g) Jede Permutationsmatrix ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(h) Für jeden Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums haben f und die zu f duale Abbildung $f^* : V^* \to V^*$ dieselbe Jordansche Normalform.

☐ Richtig ☐ Falsch

(i) Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit den Eigenwerten -1 und 1. Sei B eine weitere solche Matrix. Dann liegen die Eigenwerte von $A+B$ in $\{-2, 0, 2\}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(j) Für je zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ existiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, für welches die Vektoren v_1, v_2 Teil einer Orthonormalbasis sind.

☐ Richtig ☐ Falsch

(k) Für jede symmetrische reelle $n \times n$-Matrix A ist A^2 positiv definit genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

(l) Eine symmetrische reelle Bilinearform β ist null genau dann, wenn die zugehörige quadratische Form $x \mapsto \beta(x, x)$ identisch null ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

(m) Eine Drehung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ fest lässt, ist die Identität.

☐ Richtig ☐ Falsch

(n) Jeder orthogonale Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums von gerader endlicher Dimension hat Determinante 1.

☐ Richtig ☐ Falsch

(o) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Dann ist das Bild von f orthogonal zum Kern der Adjungierten f^*.

☐ Richtig ☐ Falsch