13.1. Rotationskörper

(Lösung folgt nach Aufgabe 13.2)

13.2. Integration I

(a) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x+1} + \frac{\omega_3}{x-1}$$

und erhalten

$$\omega_1(x^2-1) + \omega_2 x(x-1) + \omega_3 x(x+1) = 1\,,$$

d.h.

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_1 = 1\,. \end{cases}$$

Die Lösungen des Systems sind

$$\omega_1 = -1\,,\ \ \omega_2 = \frac{1}{2}\,,\ \ \omega_3 = \frac{1}{2}\,,$$

und deshalb erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \overset{\text{(PBZ)}}{=} -\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{x^3-x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\ln x\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x-1)\Big|_{x=2}^{x=3} \\ &= -\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right) \\ &= \ln\sqrt{\frac{32}{27}} \end{aligned}$$

(b) Für den Nenner gilt

$$x^2 - 2x - 63 = (x+7)(x-9)$$

und daher bestimmen wir A, B so dass

$$\frac{4x-2}{(x+7)(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x+7}.$$

Wir erhalten

$$4x - 2 = A(x+7) + B(x-9).$$

Einsetzen von $x = -7$, bzw. $x = 9$ liefert

$$-30 = -16B \quad \Rightarrow B = 15/8$$

und

$$34 = 16 \cdot A \quad \Rightarrow A = 17/8.$$

Also gilt

$$\frac{4x-2}{x^2-2x-63} = \frac{17/8}{x-9} + \frac{15/8}{x+7}.$$

Das Integral ist damit

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx &= \int \frac{17/8}{x-9}dx + \int \frac{15/8}{x+7}dx \\ &= \frac{17}{8}\log(|x-9|) + \frac{15}{8}\log(|x+7|) + c.\end{aligned}$$

(c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}\,.$$

Das liefert nun

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

und somit das System

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 1\,. \end{cases}$$

d.h. $a = 2$ und $b = -3$. Wir bekommen deshalb

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} \quad = \quad \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx \\ &= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C. \end{aligned}$$

(d) Wir faktorisieren den Nenner und bekommen

$$(x^2-9)^2 = [(x-3)(x+3)]^2 = (x-3)^2(x+3)^2\,.$$

Weil die Nullstellen 3 und -3 Multiplizität 2 besitzen, folgt, dass wir den Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

machen müssen, wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind.

Somit erhalten wir

$$\frac{A(x-3)(x+3)^2 + B(x+3)^2 + C(x-3)^2(x+3) + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

und

$$(A+C)x^3+(3A+B-3C+D)x^2+(-9A+6B-9C-6D)x+(-27A+9B+27C+9D) = x^2\,,$$

was uns das System

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B-3C+D=1 \\ -9A+6B-9C-6D=0 \\ -27A+9B+27C+9D=0 \end{cases}$$

liefert. Das System besitzt die Lösungen

$$A = \frac{1}{12},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{12},\ D = \frac{1}{4}$$

und deshalb ist die gesuchte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{12(x-3)} + \frac{1}{4(x-3)^2} - \frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}\,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx &= \int \frac{1}{12(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x-3)^2}\,dx \\ &\quad - \int \frac{1}{12(x+3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+3)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}\log(|x-3|) - \frac{1}{4(x-3)} \\ &\quad - \frac{1}{12}\log(|x+3|) - \frac{1}{4(x+3)} + C\end{aligned}$$

(e) Zunächst zerlegen wir die gegebene rationale Funktion durch Polynomdivion in die Summe eines Polynoms $p(x)$ und eines rationalen Anteils $r(x)$, so dass der Grad des Zählers von $r(x)$ kleiner ist als der Grad des Nenners. Wir erhalten

$$(x^{10} - x^7 + 3x) : (x^3 - 1) = x^7 + \frac{3x}{x^3-1}\,.$$

Wir faktorisieren den Nenner von $r(x) = \frac{3x}{x^3-1}$ und bekommen

$$r(x) = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

In diesem Fall wird der Ansatz durch

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

gegeben. Somit erhalten wir

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c}{x^3-1}$$

und das System

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=3 \\ a-c=0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen

$$a=1,\ b=-1,\ c=1$$

sind. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1} = x^7 + \frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx &= \int x^7\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx + C_1.\end{aligned}$$

Um das letzte Integral zu berechnen, versuchen wir die Substitution $u = x^2+x+1$. Es gilt $\frac{du}{dx} = (2x+1)$. Wir teilen das Integral also wieder auf:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Den ersten Teil können wir nun mithilfe der Substitution $u = x^2+x+1$ berechnen:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\log(|u|) + C_2 = -\frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) + C_2.$$

Für den zweiten Teil, ergänzen wir quadratisch und benutzen Substitution:

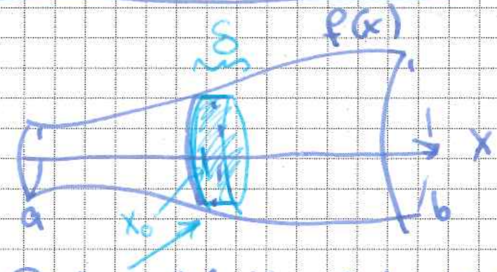
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx &= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \\ &= \sqrt{3}\arctan(v) + C_3 = \sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C_3.\end{aligned}$$

Wir schliessen daraus

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) - \frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) \\ +\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C\end{aligned}$$

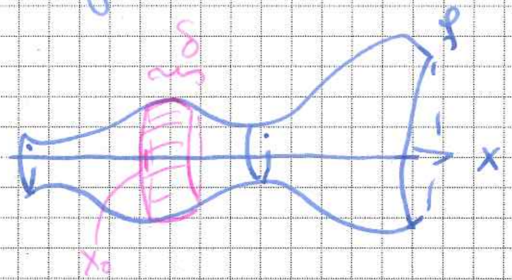
Aufgabe 13.1: Rotationskörper

a)



Diese Scheibe hat Volumen $f(x_0)^2\pi\delta$. Diese alle summiert und $\delta \to 0$ konvergiert dann gegen das Integral $\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

(Vergleiche mit Ober- und Untersummen)



Dieses Oberflächenstück hat ungefähr Grösse

$$\underbrace{\text{"Kurvenlänge"}}_{\int_{x_0}^{x_0+\delta}\sqrt{1+f'(s)^2}\,ds} \cdot \underbrace{\text{"Umfang bei } x_0\text{"}}_{2\pi f(x_0)}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta}\sqrt{1+f'(s)^2}\,ds \quad \text{(siehe Serie 12)} \approx \delta\sqrt{1+f'(x_0)^2}$$

Also ist

$$S(K) \sim \sum \delta\sqrt{1+f'(x_0)^2}\, f(x_0) \to \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

(Eine rigorosere Herleitung lässt sich mit Volumen- resp. Oberflächenintegralen machen, siehe Analysis II)

ETH zürich

b) Da $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ist $y^2+z^2 \leq 1-x^2$, also ist die Kugel mit $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ ein Rotationskörper. Dann ist

$$Vol(K) = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}},$$

$$S(K) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} 1\,dx = \underline{\underline{4\pi}},$$

was den bekannten Formeln $Vol = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$ entspricht für $r=1$.

c) $$Vol(K) = \pi \int_1^\infty x^{2\alpha}\,dx$$

Fallunterscheidung nötig!

$\alpha = -\frac{1}{2}$: $\pi \int_1^\infty x^{-1}\,dx = \pi \log x \Big|_1^\infty = \infty$

$\alpha \neq -\frac{1}{2}$: $\pi \int_1^\infty x^{2\alpha}\,dx = \frac{\pi}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1} \Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty & 2\alpha+1>0 \\ \frac{-\pi}{2\alpha+1} & 2\alpha+1<0 \end{cases}$

<u>Also ist das Volumen endlich für $\alpha < -\frac{1}{2}$</u>

$$S(K) = 2\pi \int_1^\infty x^\alpha \sqrt{1+\alpha^2 x^{2\alpha-2}}\,dx$$

Dies lässt sich zwar für bestimmte α gut berechnen,

i. A. aber nicht. Wir werden deshalb mit Abschätzungen arbeiten. Beachte dazu, dass der Wurzelterm nur dann einen entscheidenden Beitrag leistet, falls $2\alpha-2>0$, also $\alpha>1$; falls $\alpha \leq 1$ ist der x^α-Term das einzig entscheidendende. Wir werden also Fallunterscheidung machen, abhängig davon, wie sich $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ verhält

<u>Fall 1</u>: $\alpha = -1$

$$S(K) = 2\pi \int_1^\infty x \sqrt{1+1} \, dx = 2\pi\sqrt{2} \log x \Big|_1^\infty = \infty$$

<u>Fall 2</u>: $\alpha < -1$

$$S(K) = 2\pi \int_1^\infty x^\alpha \sqrt{1+\alpha^2 x^{2\alpha-2}} \, dx$$

$$\leq 2\pi\sqrt{2} \int_1^\infty x^\alpha \, dx$$

für $\alpha<1$ ist $2\alpha-2<-4$ und $x^{2\alpha-2} < 1^{2\alpha-2} = 1$

$$= 2\pi\sqrt{2} \, \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^\infty = \frac{-2\pi\sqrt{2}}{\alpha+1}$$

also ist die Oberfläche beschränkt

<u>Fall 3</u>: $\alpha > -1$

$$S(K) = 2\pi \int_1^\infty x^\alpha \underbrace{\sqrt{1+\alpha^2 x^{2\alpha-2}}}_{\geq 1} \, dx$$

$$\geq 2\pi \int_1^\infty x^\alpha \, dx$$

$$= 2\pi \, \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^\infty = \infty$$

<u>Die Oberfläche ist also endlich für $\alpha < -1$</u>

13.3. Integration II

(a) Es ist

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int_3^4 \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \int_2^3 \frac{du}{u^2+4} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}\,dv}{v^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{3}{2} - \arctan 1\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{2} - \frac{\pi}{8},$$

wobei wir zuerst $u = x-1$ und dann $u = 2v$ substituiert haben.

(b) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int t^3 \arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

und erhalten somit

$$\int t^3\arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\arctan(t) + C$$

(c) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \int (\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2})\,dt$$
$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K.$$

(d) Die Substitution $x = 4\sinh z$ ergibt $dx = 4\cosh z\,dz$ und folglich

$$\int \sqrt{x^2+16}\,dx = \int \sqrt{16\sinh^2 z + 16}\cdot 4\cosh z\,dz = 16\int \cosh^2 z\,dz$$
$$= 8\int (\cosh 2z + 1)\,dz = 4\sinh 2z + 8z + C$$
$$= 8\sinh z\cosh z + 8z + C$$
$$= 2x\cosh\Big(\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4}\Big) + 8\operatorname{Arsinh}\tfrac{x}{4} + C$$
$$= 2x\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C$$
$$= \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+16} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C.$$

Dabei haben wir die Relation

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2}\left(\cosh(2z) + 1\right) + C$$

verwendet.

Bemerkung: Alternativ könnte man das obige Integral $I := \int \cosh^2 z \, dz$ auch mithilfe einer partiellen Integration berechnen:

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh^2 z \, dz = \sinh z \cosh z - \int \sinh^2 z \, dz \\ &= \sinh z \cosh z - \int (\cosh^2 z - 1) \, dz = \sinh z \cosh z - \int \cosh^2 z \, dz + z \\ &= \sinh z \cosh z + z - I, \end{aligned}$$

also

$$I = \frac{1}{2}\left(\sinh z \cosh z + z\right) + C.$$