Lösung - Schnellübung 6

1. (★★½) Ein *Gleichdick* ist eine geometrische Figur, die in jede gleiche Richtung gleich dick ist. Oder anders gesagt: Während ein Gleichdick vorwärts gerollt wird, bleibt der höchste Punkt zu jedem Zeitpunkt auf der gleichen Höhe. Ein Beispiel dafür ist ein Kreis, aber es gibt andere Figuren, die diese Eigenschaft ebenfalls haben.

Das *Reuleaux-Dreieck* besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und drei auf die Seiten gesetzten Kreisabschnitten. Die Kreisabschnitte sind dabei so konstruiert, dass man um jeden Dreieckseckpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius der Dreiecksseite zeichnet.

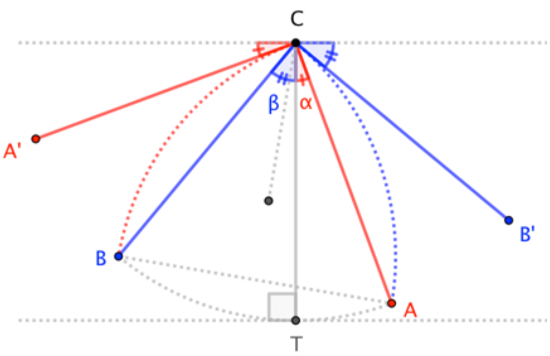
a) Beweisen Sie, dass das Reuleaux-Dreieck ein Gleichdick ist.

b) Bestimmen Sie den Umfang des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a (des inneren Dreiecks, wie oben beschrieben).

c) Bestimmen Sie die Fläche des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a.

Lösung:

a) Wir zeigen, dass, wenn das Reuleaux-Dreieck vorwärts gerollt wird, der höchste Punkt auf der Höhe a bleibt. Seien A, B, C die Ecken des Reuleaux-Dreiecks und sei T der Berührungspunkt, in dem das Reuleaux-Dreieck den Boden berührt. T liegt auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$, wie in der Figur gezeigt.



Bitte wenden!

Sei $\overline{A'C}$ die Tangente zum Kreisabschnitt $\overset{\frown}{BC}$ im Punkt C. Der Winkel zwischen $\overline{AC}$ und $\overline{A'C}$ muss dann ein rechter Winkel sein.

Analog, der Winkel zwischen $\overline{BC}$ und $\overline{B'C}$ muss ein rechter Winkel sein.

Man sieht sofort, dass der Winkel α zwischen der vertikalen Gerade $\overline{TC}$ und $\overline{AC}$ gleich wie der Winkel zwischen der horizontalen Gerade durch C und $\overline{A'C}$ ist.

Die Punkten auf der Seite $\overset{\frown}{BC}$ des Reuleaux-Dreiecks befinden sich unter dem Punkt C (das heisst unter der horizontalen Gerade durch C) solange $\alpha \geq 0$. Aber da T auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, ist α immer ≥ 0. ($\alpha = 0$ genau dann wenn T und A übereinstimmen, sonst ist $\alpha > 0$). Analog, die Punkten auf der Seite $\overset{\frown}{AC}$ befinden sich unter dem Punkt C solange $\beta \geq 0$. Da T auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, ist β immer ≥ 0.

Daraus folgt, dass, wenn das Dreieck vorwärts gerollt wird, der Eckpunkt C immer der höchste Punkt ist. Es gilt $|TC| = a$. Somit ist der höchste Punkt immer auf der Höhe a.

b) Jede Seite des Reuleaux-Dreiecks ist ein Kreisbogen eines Kreises von Radius a mit Mittelspunktswinkel $\frac{\pi}{3}$ (das heisst $60°$). Also hat Länge $a \cdot \frac{\pi}{3}$. Der Umfang ist $3 \cdot a\frac{\pi}{3} = a\pi$.

c) Das Reuleaux-Dreieck entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck und drei Kreisabschnitten. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ und jeder Kreisabschnitt hat Flächeninhalt

$$\frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\text{Fläche}_{\text{Reuleaux}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

2. (★★) Es sei $h \in [0,1]$ eine reelle Zahl und T das Tetraeder mit Ecken in $(0,0,0), (1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

a) Berechne den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnitts von T mit der Ebene $z = h$.

b) Berechne den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze von T durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

Lösung:

Siehe nächstes Blatt!

a) Zwischen $h = 0$ und $h = 1$ nehmen die Seitenlängen des Schnittes parallel zur x- und y-Achse linear ab. Auf Höhe $z = h$ haben diese rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten also Länge $1 - h$, nach der Flächenformel für Dreiecke gilt also

$$S(h) = \frac{(1-h)^2}{2}.$$

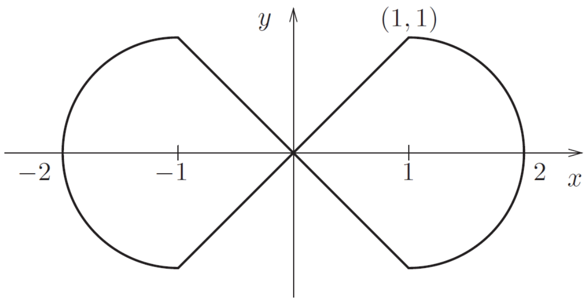
b) Der Volumeninhalt des Tetraederstumpfes ergibt sich durch Integration in z-Richtung und ist gleich

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3\right]_0^h \\ &= -\frac{1}{6}\left((1-h)^3 - 1\right) = \frac{1}{6}(1-(1-h)^3) = \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{6}. \end{aligned}$$

Im Fall $h = 1$ bekommen wir den Volumeninhalt des Tetraeders:

$$V(1) = \frac{1}{6}.$$

3. (★★) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der gezeichneten Fläche bezüglich der y-Achse.



Lösung: Da das Gebiet symmetrisch ist, ist das Trägheitsmoment J_y der ganzen Fläche gleich viermal dem Trägheitsmoment eines Viertels.

Für $x \in [0,2]$ sei $G(x)$ die Ausdehnung in y-Richtung an der Stelle x. Um $G(x)$ zu finden, beachten wir, dass die Fläche durch die Gerade $y = x$ und den Kreis $(x-1)^2 + y^2 = 1$ berandet ist. Also gilt

$$\begin{aligned} G(x) &= x \quad \text{für } 0 \le x \le 1 \\ G(x) &= \sqrt{1-(x-1)^2} \quad \text{für } 1 \le x \le 2. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
I_y &= 4\left(\int_0^1 x^2 x dx + \int_1^2 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx\right)\\
&= 4\left(\int_0^1 x^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 1)^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt\right)\\
&= 4\left(\frac{x^4}{4}|_0^1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2\sin t + 1)(1-\sin^2 t)dt\right)\\
&= 1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^4 t + 2\sin t - 2\sin^3 t + 1dt\\
&= 1 + 4(-\frac{3\pi}{16} + 2 - 2\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2})\\
&= 1 + \frac{5\pi}{4} + \frac{8}{3}\\
&= \frac{11}{3} + \frac{5\pi}{4},
\end{aligned}
$$

wobei wir die Substitution $x - 1 = \sin t$, $dx = \cos t dt$ benutzt haben.