8.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien f_1, f_2 stetige Funktionen und seien g_1, g_2 unstetige Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Dann gilt:

☑ $f_1 + f_2$ ist stetig.

Richtig: Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 folgt, dass $\lim_{x\to x_0}(f_1+f_2)(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = (f_1+f_2)(x_0)$ und somit ist $f_1 + f_2$ stetig.

☐ $f_1 + g_1$ ist stetig.

Falsch: Sei z.B. $f_1 = 0$, dann ist $f_1 + g_1 = g_1$ unstetig.

☐ $g_1 + g_2$ ist unstetig.

Falsch: Sei $g_2 = -g_1$. Dann ist $g_1 + g_2 = g_1 - g_1 = 0$ stetig.

☑ $f_2 + g_2$ ist unstetig.

Richtig: O.B.d.A sei g_2 an der Stelle x_0 unstetig, d.h. $\lim_{x\to x_0} g_2(x) \neq g_2(x_0)$. Dann gilt, dass $\lim_{x\to x_0}(f_2+g_2)(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) + \lim_{x\to x_0} g_2(x) = f_2(x_0) + \lim_{x\to x_0} g_2(x) \neq f_2(x_0) + g_2(x_0)$. Somit hat die Funktion $f_2 + g_2$ die gleichen Unstetigkeitsstellen wie die Funktion g_2.

☐ $f_1 + f_2 + g_1 + g_2$ ist stetig.

Falsch: Seien z.B $f_1 = -f_2$, $g_1(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$ und $g_2(x) = \operatorname{sgn}(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$. Dann ist $f_1 + f_2 + g_1 + g_2 = \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 2, & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $x = 0$ unstetig.

(b) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

☑ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Richtig: Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x^{1/2} + n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty}(x^{1/2} + n^{-1}))^2 = (x^{1/2})^2 = x$.

☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch: Aus $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n+1/n^2$ folgt, dass für $x > n^2$ auch $|f_n(x)-x| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergiern.

☑ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig: Es gilt $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n+1/n^2 \leq 2M^{1/2}/n+1/n^2$ für alle $x \in [0, M]$. Es folgt, dass $(f_n|_{[0,M]})$ gleichmässig konvergiert.

8.2. Konvergenz von Funktionenfolgen Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f? Falls ja, bestimme f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^2, \quad n \in \mathbb{N};$

(b) $f_n(x) := 1 + x^n(1 - x)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

(c) $f_n(x) := \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x < \frac{1}{2n}; \\ 2 - 2nx, & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Solution: Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(a) Beh.: $f_n(x)$ konvergiert gleichmässig (und insbesondere auch punktweise) gegen $f(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$.

Bew.: Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |(1 + \frac{x}{n})^2 - 1| = |1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1| \\ &= 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

(b) Beh.: $f_n(x)$ konvergiert gleichmässig gegen $f(x) \equiv 1$ auf $[0,1]$.

Bew.:

$$0 \leq x(1-x) \leq \tfrac{1}{4} \qquad \forall x \in [0,1].$$

Denn die erste Ungleichung gilt offensichtlich und ausserdem ist

$$x(1-x) = -x^2 + x = -(x-1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $|x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$ für $x \in [0,1]$ und

$$|f_n(x) - f(x)| = |(x(1-x))^n| = |x(1-x)|^n \leq (1/4)^n.$$

Somit gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq (1/4)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und die Folge konvergiert gleichmssig gegen f.

(c) Beh.: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0$.

Bew.: Sei $x \in [0,1]$.
Falls $x = 0$ ist, gilt $f_n(x) = 0$ für jedes x und somit sicher $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x > \frac{1}{n_0}$. Dann gilt insbesondere $x > \frac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$ und damit sicher $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beh.: $f_n(x)$ konvergiert nicht gleichmässig gegen $f(x) \equiv 0$.

Bew.: Es gilt für jedes n, dass $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ ist und damit ist $f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n}) = 1$.
Damit gilt aber auch

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = 1 \nrightarrow 0$$

und die Folge konvergiert nicht gleichmässig.

8.3. Eine Funkionenreihe Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion (Aufgabe 1.3):

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiert die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_n nach f gleichmässig?

(c) Ist f stetig?

Solution:

(a) Es immer gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ $|\langle y \rangle| < 1$, also

$$\frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < +\infty,$$

damit ist die Reihe absolut konvergent auf $\mathbb{R}$.

(b) Um gleichmässige Konvergenz zu beweisen, beobachten wir, dass *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Somit $\lim_{x\to\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$.

(c) Stetigkeit von f folgt sofort aus Satz 3.7.4 (Prof. Marc Burger, Analysis I, D-INFK).

8.4. Trigonometrische Funktion

(a) Zeigen Sie,

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(b) Zeigen Sie,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Solution:

(a) Wir haben

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ und } \sin(\pi - x) = \sin x \text{ und } \sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

Dann

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

Weil $\sin\frac{\pi}{3} > 0$,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

(b) Wenn $x, y \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $x + y, x - y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann

$$\cos x, \cos y, \cos(x+y), \cos(x-y) > 0$$

und

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}}$$

Die andern ist gleich.