# Lineare Algebra II - Prüfung Sommer 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $P_F = t(t-1)^3(t-2)^2$? Hierbei ist $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und Jordansche Normalformen, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden, sollen als gleich gelten.

   (a) 1
   (b) 4
   (c) 6
   (d) 9

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wobei $V$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

   (a) Jeder nilpotente diagonalisierbare Endomorphismus von $V$ ist 0.
   (b) Jeder nilpotente Endomorphismus von $V$ ist diagonalisierbar.
   (c) Es gibt ein nilpotentes $F \in \mathrm{End}(V)$ dessen charakteristisches Polynom durch $t+1$ teilbar ist.
   (d) Für jeden nilpotenten Endomorphismus $F$ von $V$ gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ so dass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

   (III) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ (und alle $n$)?

   (a) $A, B$ sind ähnlich genau dann wenn für die charakteristischen Polynome gilt $P_A = P_B$.
   (b) $A, B$ sind ähnlich genau dann wenn $P_A = P_B$ und $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda E_n)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (c) $A, B$ sind ähnlich genau dann wenn $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)^k = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda E_n)^k$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $k \geqslant 1$.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (IV) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $R \in SO(n)$ und für alle $n \geqslant 2$?

(a) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $R$.

(b) Es gibt mindestens einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Rv = v$.

(c) Es gibt einen $R$-invarianten Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension 2.

(d) $R - E_n$ ist nilpotent.

(V) Welche der folgenden Aussagen gilt nicht für alle symmetrischen positiv definiten $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Alle Eigenwerte von $A$ sind positiv.

(b) $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(c) $a_{ii}a_{jj} \geqslant a_{ij}^2$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

(d) $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

(VI) Sei $s$ eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ und seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist notwendig, damit sowohl $A$ als auch $B$ darstellende Matrizen von $s$ sind, bzgl. allenfalls verschiedener Basen.

(a) $A = B$.

(b) $A$ und $B$ sind ähnlich.

(c) Die Anzahl positiver Eigenwerte von $A$ und $B$ sind gleich, und $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(B)$.

(d) Es gibt ein $R \in O(n)$ so dass $R^T A R = B$.

(VII) Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ betrachten wir wie in der Vorlesung den Isomorphismus

$$\Psi_{\mathcal{B}} : V \to V^* \quad \text{mit} \quad \Psi_{\mathcal{B}}(v_j) = v_j^*,$$

wobei $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis des Dualraumes $V^*$ ist. Welche der folgenden Aussagen ist richtig (für alle $n$, $V$)?

(a) $\Psi_{\mathcal{B}}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$, das heisst für $\mathcal{A}$ jede beliebige andere Basis von $V$ gilt $\Psi_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{A}}$.

(b) Für verschiedene Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist stets $\Psi_{\mathcal{A}} \neq \Psi_{\mathcal{B}}$.

(c) Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von $V$ sind bzgl. des gleichen Skalarproduktes auf $V$, so gilt $\Psi_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{A}}$.

(d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

(VIII) Sei $V$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Welche der folgenden Aussagen gilt nicht?

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(b) $U_1^\perp \cap U_2 = U_1 \cap U_2^\perp$.

(c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

(d) $U_1 + U_1^\perp = U_2 + U_2^\perp$.

(IX) Sei $(v_1, v_2)$ eine Basis des $K$-Vektorraumes $V$. Welche der folgenden Familien bildet eine Basis von $\Lambda^2 V$?

(a) $(v_1 \wedge v_1, v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_1, v_2 \wedge v_2)$
(b) $(v_1 \wedge v_1, v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_2)$
(c) $(v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_1)$
(d) $(v_2 \wedge (v_1 + v_2))$

(X) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine symmetrische komplexe Matrix, also $A = A^T$. Was können Sie über die Eigenwerte von $A$ aussagen?

(a) Alle Eigenwerte von $A$ sind reell.
(b) Die nicht reellen Eigenwerte treten in konjugiert komplexen Paaren auf.
(c) Summe und Produkt der Eigenwerte müssen positiv sein.
(d) Nichts – jedes $n$-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ komplexer Zahlen kann als Eigenwerte einer solchen Matrix auftreten.

*Lösung:* (c), (a), (c), (c), (d), (c), (c), (b), (d), (d)

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) *(10 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von $A$. Berechnen Sie dabei auch eine invertierbare Matrix $S$, so dass $SAS^{-1}$ in Jordanscher Normalform ist.

*Hinweis:* 1 *ist ein Eigenwert von A.*

(b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie $S(A + A^2 + \cdots + A^{10})S^{-1}$.

*Hinweis: Für diese Rechnung benötigen Sie nur die Jordansche Normalform von A, nicht den expliziten Ausdruck für S oder A.*

*Lösung:*

(a) Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (-t-2)\big((-t+2)(-t)+1\big) \\ &= -(t+2)(t^2-2t+1) \\ &= -(t-1)^2(t+2)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $A$ sind 1 mit Vielfachheit zwei und $-2$ mit Vielfachheit eins. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A-E_3) &= \mathrm{span}\big((1,-1,1)\big)\,, \\ \mathrm{Ker}(A-E_3)^2 &= \mathrm{span}\big((1,-1,1)\,,(0,1,0)\big)\,, \\ \mathrm{Ker}(A+2E_3) &= \mathrm{span}\big((0,0,1)\big)\,. \end{aligned}$$

Die Basiswechselmatrizen sind daher

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jordansche Normalform ist

$$J = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$S(A + A^2 + \cdots + A^{10})S^{-1} = SAS^{-1} + \left(SAS^{-1}\right)^2 + \cdots + \left(SAS^{-1}\right)^{10},$$

wir müssen daher die Potenzen $J^n$ für $n = 1, \dots, 10$ bestimmen und addieren. Sei $J = D + N$ mit $D$ Diagonalmatrix ($N$ hat also nur einen Eintrag), dann gilt

$$\begin{aligned} J^n &= D^n + nD^{k-1}N = D^n + nN \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit den Formeln

$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}, \sum_{n=1}^{m} q^n = \frac{q - q^{m+1}}{1-q} \text{ für } q \neq 1$$

erhalten wir (mit $q = -2$)

$$\sum_{n=1}^{10} J^n = \begin{pmatrix} 10 & 55 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 682 \end{pmatrix}.$$

3. Betrachten Sie die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -i \\ 1-i & 0 & i & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass $A$ positiv definit ist.

   (b) *(7 Punkte)* Sei $\langle\, , \rangle_A$ das durch $A$ beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

   (c) *(4 Punkte)* Sei $B$ eine invertierbare Matrix, so dass $BA = A(\bar{B}^{-1})^T$. Zeigen Sie, dass $B$ diagonalisierbar ist. Was kann man über die möglichen Eigenwerte von $B$ aussagen?

*Lösung:*

   (a) Wir verwenden das Hauptminoren Kriterium um zu zeigen, dass $A$ positiv definit ist. Die Determinante von $A$ ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{vmatrix} - (1-i)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+i \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -i \end{vmatrix} \\ &= 9 - (1-i)(3 + 3i - 1 - i) = 5\,. \end{aligned}$$

   Die Determinanten der führenden Hauptminoren von $A$ sind daher

$$3, \quad 9, \quad 6, \quad 5$$

   und somit alle positiv, folglich ist $A$ positiv definit.

(b) Wir verwenden das Gram–Schmidt Verfahren für die Standardbasis $e_1, \dots, e_4$ des $\mathbb{C}^4$:

$$\tilde{v}_1 = e_1\,, \quad v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1\,,$$

$$\tilde{v}_2 = e_2 - \langle e_2, v_1\rangle_A v_1 = e_2\,, \quad v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_2\,,$$

$$\tilde{v}_3 = e_3 - \langle e_3, v_1\rangle_A v_1 - \langle e_3, v_2\rangle_A v_2 = e_3 - \frac{e_2}{\|e_2\|_A^2} = e_3 - \frac{1}{3} e_2\,,$$

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|_A} = \left(\left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right) A \left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right)^T\right)^{-1/2} \left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_4 &= e_4 - \langle e_4, v_1\rangle_A v_1 - \langle e_4, v_2\rangle_A v_2 - \langle e_4, v_3\rangle_A v_3 \\ &= e_4 - (1-i)\frac{e_1}{\|e_1\|_A^2} - \frac{i}{\|e_3\|_A}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right) = e_4 - \frac{1-i}{3} e_1 - \frac{3i}{2}\left(e_3 - \frac{1}{3}e_2\right),\end{aligned}$$

$$v_4 = \frac{\tilde{v}_4}{\|\tilde{v}_4\|_A} = \sqrt{\frac{6}{5}}\left(e_4 - \frac{1+i}{3} e_1 - \frac{3i}{2} e_3 + \frac{i}{2} e_2\right).$$

Die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ bilden nun eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle\,,\rangle_A$.

(c) Die Bedingung ist äquivalent zu

$$BA\bar{B}^T = A\,,$$

also dazu, dass $B$ eine unitäre Abbildung bzgl. $\langle\,,\rangle_A$ definiert. Nach dem Spektralsatz ist $B$ daher diagonalisierbar. Außerdem haben die Eigenwerte einer unitären Abbildung stets Absolutbetrag 1.

4. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix und betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_A :\ \mathrm{M}(n\times n, \mathbb{C}) &\to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})\,, \\ X &\mapsto AX - XA\,.\end{aligned}$$

(a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass durch

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}\left(X\bar{Y}^T\right)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ definiert wird, wobei tr die Spur bezeichnet.

(b) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathrm{ad}_A^{ad} = \mathrm{ad}_{\bar{A}^T}$, wobei $\mathrm{ad}_A^{ad}$ die zu $\mathrm{ad}_A$ adjungierte Abbildung bezeichnet, bzgl. des obigen Skalarproduktes.

(c) *(7 Punkte)* Sei $A = \bar{A}^T$ hermitesch mit charakteristischem Polynom

$$P_A(t) = \pm(t - \lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)\,.$$

Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom $P_{\mathrm{ad}_A}$ von $\mathrm{ad}_A$ gilt

$$P_{\mathrm{ad}_A}(t) = \pm \prod_{i,j=1}^{n} (t - \lambda_i + \lambda_j) .$$

*Hinweis: Seien $v_i, v_j \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektoren von $A$. Dann ist die $n \times n$-Matrix $v_i \bar{v}_j^T$ ein Eigenvektor von $ad_A$ (zu zeigen). Sie können dies zur Konstruktion einer Basis des* $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ *aus Eigenvektoren von $ad_A$ verwenden.*

*Lösung:*

(a) Aus der Linearität der Spur folgt direkt, dass $\langle\, , \rangle$ linear im ersten Argument und semilinear im zweiten Argument ist. Außerdem ist $\langle\, , \rangle$ hermitesch da

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\left(X\bar{Y}^T\right) = \mathrm{tr}\left(\bar{Y}X^T\right) = \overline{\mathrm{tr}\left(Y\bar{X}^T\right)} = \overline{\langle Y, X \rangle} .$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Spur invariant unter zyklischer Vertauschung der Matrizen und invariant unter Transponierung ist. Wir zeigen noch die positive Definitheit. Sei $X \neq 0$, dann gibt es $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $Xe_i \neq 0$. Insbesondere gibt es $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $e_j^*\left(Xe_i\right) \neq 0$, d.h. die $j$-te Koordinate von $Xe_i$ ist $\neq 0$. Sei $\bar{Y}^T$ die Matrix, die $e_j$ auf $e_i$ abbildet und alle anderen Basisvektoren auf Null. Dann ist

$$\mathrm{tr}(X\bar{Y}^T) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*\left((X\bar{Y}^T)e_k\right) = e_j^*\left(Xe_i\right) \neq 0 .$$

(b) Für beliebige $X, Y \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle X, \mathrm{ad}_A Y \rangle &= \mathrm{tr}\left(X(\overline{AY - YA})^T\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(X\bar{Y}^T\bar{A}^T - X\bar{A}^T\bar{Y}^T\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(X\bar{Y}^T\bar{A}^T\right) - \mathrm{tr}\left(X\bar{A}^T\bar{Y}^T\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\bar{A}^T X\bar{Y}^T - X\bar{A}^T\bar{Y}^T\right) \\
&= \mathrm{tr}\left((\mathrm{ad}_{\bar{A}^T} X)\bar{Y}^T\right) \\
&= \langle \mathrm{ad}_{\bar{A}^T} X, Y \rangle .
\end{aligned}$$

Es wurde verwendet, dass die Spur additiv und, wie in Teilaufgabe (a), invariant unter zyklischer Vertauschung der Matrizen ist.

(c) Da $A$ hermitesch ist, gibt es nach dem Spektralsatz eine ONB $\mathcal{B} = \{v_i\}$ aus Eigenvektoren von $A$. Hierbei ist $v_i$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i$ (*Achtung: Hierbei dürfen Eigenwerte mehrfach vorkommen.*). Seien $v_i$ und $v_j$ Vektoren dieser Basis zu den Eigenwerten $\lambda_i$ bzw. $\lambda_j$. Dann ist $v_i\bar{v}_j^T$ Eigenvektor von $\mathrm{ad}_A$ zum Eigenwert $\lambda_i - \lambda_j$: Es ist $(v_i\bar{v}_j^T)v_j = v_i$, da $\bar{v}_j^T v_j = 1$, also ist $v_i\bar{v}_j^T \neq 0$ und außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A(v_i\bar{v}_j^T) &= Av_i\bar{v}_j^T - v_i\bar{v}_j^T A \\
&= \lambda_i v_i\bar{v}_j^T - v_i\overline{(\bar{A}^T v_j)^T} \\
&= \lambda_i v_i\bar{v}_j^T - \lambda_j v_i\bar{v}_j^T \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)v_i\bar{v}_j^T\,.
\end{aligned}$$

(Hier wurde verwendet, dass $A$ hermitesch ist und die $\lambda_j$ reell sind.) Die $n$ Eigenvektoren von $A$ ergeben auf diese Weise also $n^2$ Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_A$. Wir zeigen, dass dies tatsächlich eine ONB von $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ definiert. Seien hierfür $v_i$, $v_j$, $v_k$, $v_l$ Vektoren aus $\mathcal{B}$ und sei $S \in U(n)$ die Basiswechselmatrix (von der ONB zur Standardbasis) mit den Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle v_i\bar{v}_j^T, v_k\bar{v}_l^T\rangle &= \mathrm{tr}\left(v_i\bar{v}_j^T\overline{(v_k\bar{v}_l^T)^T}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(v_i\bar{v}_j^T v_l\bar{v}_k^T\right) \\
&= \delta_{jl}\mathrm{tr}\left(v_i\bar{v}_k^T\right) \\
&= \delta_{jl}\mathrm{tr}\left(\bar{S}^T v_i\bar{v}_k^T S\right) \\
&= \delta_{jl}\mathrm{tr}\left(e_i e_k^T\right) \\
&= \delta_{jl}\delta_{ik}\,.
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit wurde verwendet, dass $\bar{v}_j^T v_l = \delta_{jl}$, da die Vektoren eine ONB bilden. Die Matrizen $v_i\bar{v}_j^T$ bilden also eine ONB von $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ aus Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_A$ und es folgt direkt, dass

$$P_{\mathrm{ad}_A}(t) = \pm\prod_{i,j=1}^{n}(t - \lambda_i + \lambda_j)\,.$$

5. Seien

$$U = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4, \qquad V = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

   (a) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie je Basen für die orthogonalen Komplemente $U^\perp$ und $V^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^4$.

   (b) *(9 Punkte)* Bestimmen Sie eine orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}^4$, die $U$ auf $V$ abbildet und dabei $U \cap V$ und $(U + V)^\perp$ invariant lässt. Es ist dafür die Matrix der orthogonalen Abbildung (bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$) anzugeben.

   *Hinweis: In diesem speziellen Beispiel hat man die Zerlegung* $\mathbb{R}^4 = (U \cap V) \oplus (U \cap V^\perp) \oplus (U^\perp \cap V) \oplus (U^\perp \cap V^\perp)$*, was die Rechnung etwas vereinfacht.*

*Lösung:*

(a) Durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems oder durch Raten erhält man, dass

$$U^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \qquad V^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

(b) *Achtung: Für dieses Beispiel gilt die Zerlegung im Hinweis; im Allgemeinen gilt die Zerlegung nicht.*

Aus Teilaufgabe (a) erhält man direkt (wir erinnern an $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$):

$$\begin{aligned}U \cap V &= \operatorname{span}(1,0,1,0)^T,\\ U \cap V^\perp &= \operatorname{span}(1,0,-1,0)^T,\\ U^\perp \cap V &= \operatorname{span}(0,1,0,1)^T,\\ U^\perp \cap V^\perp &= \operatorname{span}(0,1,0,-1)^T.\end{aligned}$$

Seien $x_1, \dots, x_4$ obige Vektoren. Da $\operatorname{span}(x_1,x_2) = \operatorname{span}(e_1,e_3) = U$ und $\operatorname{span}(x_3,x_4) = \operatorname{span}(e_2,e_4) = U^\perp$ bilden sie eine Basis. Man beachte auch, dass $\operatorname{span}(x_1,x_3) = V$ und $\operatorname{span}(x_2,x_4) = V^\perp$. Die vier Vektoren sind per Konstruktion paarweise orthogonal und haben alle die gleiche Länge $\sqrt{2}$.

Lösungsweg 1: Die gesuchte Abbildung des $\mathbb{R}^4$ lässt $x_1$ und $x_4$ invariant und vertauscht $x_2$ und $x_3$. Die Matrix dieser Abbildung ist also

$$R = \frac{1}{2}(x_1x_1^T + x_2x_3^T + x_3x_2^T + x_4x_4^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Achtung: $R$ ist durch die Forderungen der Aufgabe fast, aber nicht ganz eindeutig bestimmt, man könnte z.B. auch $x_2$ auf $-x_3$ abbilden.

Lösungsweg 2: Sei also

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

die Matrix mit den Vektoren als Spalten, dann ist $\sqrt{\frac{1}{2}}\,T \in O(4)$. Die zu $T$ inverse Matrix ist also

$$T^{-1} = \frac{1}{2}T^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Abbildung des $\mathbb{R}^4$ lässt $x_1$ und $x_4$ invariant und vertauscht $x_2$ und $x_3$. Die darstellende Matrix bzgl. der Basis $\{x_i\}$ ist also die Elementarmatrix $P_3^2$. Die darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis ist daher

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{1}{2}}T\right) P_3^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}}T\right)^{-1} &= T P_3^2 T^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösungsweg 3 (Skizze): Der generische Lösungsweg wäre, zwei verschiedene ONB des $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren, die man dann aufeinander abbildet. Zunächst muss man $x_1$ oben zu einer Orthogonalbasis $x_1, x_2'$ von $U$ ergänzen, und $x_4$ oben zu einer Orthogonalbasis $x_3', x_4$ von $U^\perp$, so dass $x_1, x_2', x_3', x_4$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$ bildet. Dann muss man $x_1$ oben zu einer Orthogonalbasis $x_1, x_2''$ von $V$ ergänzen, und $x_4$ oben zu einer Orthogonalbasis $x_3'', x_4$ von $V^\perp$, so dass $x_1, x_2'', x_3'', x_4$ eine weitere Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$ bildet. Die gesuchte Abbildung bildet dann die Orthogonalbasen (bis auf Vorfaktoren) aufeinander ab. Im speziellen Beispiel oben vereinfacht sich dies, da man einfach $x_2' = x_2 = x_3''$ und $x_3' = x_3 = x_2''$ wählen kann.

6. *(15 Punkte)* Sei $\tilde{O}(n) = \{R \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \mid R^T R = \lambda E_n \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes Paar $(\mu, S)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $S \in O(n)$ gilt $\mu S \in \tilde{O}(n)$, und dass für jedes $R \in \tilde{O}(n)$ solche $\mu, S$ existieren mit $R = \mu S$.

   (b) (4 Punkte) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit Singulärwertzerlegung
   $$A = UDV^T .$$
   Zeigen Sie, dass für $(\mu, S)$ wie in (a) gilt
   $$\|A - \mu S\|_F^2 = \operatorname{tr}\left(D^2\right) - 2\mu \operatorname{tr}\left(DU^T SV\right) + n\mu^2. \tag{1}$$
   Hierbei bezechnet $\|X\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(X^T X)}$ die Frobeniusnorm einer reellen quadratischen Matrix $X$.

   (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes feste $S$ der Ausdruck (1) als Funktion von $\mu$ minimiert wird durch
   $$\mu = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(DU^T SV\right) .$$

(d) (4 Punkte) Sei $A = UDV^T$ wie in (b) und sei $R = \frac{\mathrm{tr}(D)}{n} UV^T \in \tilde{O}(n)$. Beweisen Sie, dass für jedes $R' \in \tilde{O}(n)$ gilt

$$\|A - R\|_F \leqslant \|A - R'\|_F,$$

also dass $R$ die optimale Approximation von $A$ ist durch eine Matrix in $\tilde{O}(n)$.

*Bemerkung: Hierbei dürfen Sie die folgende in der Vorlesung bewiesene Aussage ohne neuerlichen Beweis verwenden:*

*Lemma: Für $D \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen und jedes $T \in O(n)$ gilt $\mathrm{tr}(DT) \leqslant \mathrm{tr}(D)$, mit Gleichheit für $T = E_n$.*

*Lösung:*

(a) Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $S \in O(n)$ ist $(\mu S)^T(\mu S) = \mu^2 S^T S = \mu^2 E_n$, also $\mu S \in \tilde{O}(n)$. Sei umgekehrt $R \in \tilde{O}(n)$. Da $R^T R$ positiv semidefinit ist, folgt $\lambda \geqslant 0$. Für $\lambda > 0$ sei $\mu = \sqrt{\lambda}$ und $S = \mu^{-1} R \in O(n)$. Wir nehmen also an, dass $\lambda = 0$, also $R^T R = 0$. Dann ist aber

$$\|R\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(R^T R)} = 0\,.$$

also $R = 0$ (da $\| - \|_F$ eine Norm ist).

(b) Weg 1: Direktes Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned}
\|A - \mu S\|_F^2 &= \mathrm{tr}\left((UDV^T - \mu S)^T(UDV^T - \mu S)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(V^T DUU^T DV\right) - \mu \mathrm{tr}(VDU^T S) - \mu \mathrm{tr}\left(S^T UDV^T\right) + \mu^2 \mathrm{tr}\left(S^T S\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(D^2\right) - 2\mu \mathrm{tr}\left(VDU^T S\right) + \mu^2 \mathrm{tr}\left(E_n\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(D^2\right) - 2\mu \mathrm{tr}\left(DU^T SV\right) + n\mu^2\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Spur invariant unter Transponierung der Matrix und unter zyklischen Vertauschungen ist, und dass $U, V, S \in O(n)$, während $D$ diagonal und damit symmetrisch ist.

Weg 2: Nach Vorlesung (Lemma 2.3 zur Singulärwertzerlegung) ist

$$\begin{aligned}
\|A - \mu S\|_F^2 &= \|U^T(A - \mu S)V\|_F^2\\
&= \|D - \mu U^T SV\|_F^2\\
&= \mathrm{tr}\left((D - U^T \mu SV)^T(D - U^T \mu SV)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left((D - V^T \mu S^T U)(D - U^T \mu SV)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(D^2\right) - \mu \mathrm{tr}(V^T S^T UD) - \mu \mathrm{tr}\left(DU^T SV\right) + \mu^2 \mathrm{tr}\left(V^T S^T UU^T SV\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(D^2\right) - \mu \mathrm{tr}\left((V^T S^T UD)^T\right) - \mu \mathrm{tr}\left(DU^T SV\right) + \mu^2 \mathrm{tr}\left(E_n\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(D^2\right) - 2\mu \mathrm{tr}\left(DU^T SV\right) + n\mu^2\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde Lemma 2.3 für die erste Gleichheit verwendet. Die vorletzte Gleichheit folgt, da die Spur invariant unter Transponierung der Matrix ist.

(c) Für festes $S$ sei $f(\mu) = \mathrm{tr}(D^2) - 2\mu\mathrm{tr}(DU^TSV) + n\mu^2$. Das Minimum lässt sich mit der Bedingung $f'(\mu) = 0$ finden (da $n > 0$ ist es tatsächlich das Minimum):

$$2n\mu - 2\mathrm{tr}\left(DU^TSV\right) = 0 \implies \mu = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(DU^TSV\right) .$$

(d) Weg 1: Nach c) ist für festes $S$ das Minimum von $f$ gegeben durch

$$g(S) := \mathrm{tr}(D^2) - \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(DU^TSV)\right)^2 .$$

Nun beachte man, dass aus dem angegebenen Lemma auch folgt $-\mathrm{tr}(DT) \leqslant \mathrm{tr}(D)$, denn für $T \in O(n)$ ist auch $-T \in O(n)$. Also können wir auch schreiben $|\mathrm{tr}(DT)| \leqslant \mathrm{tr}(D)$, mit Gleichheit für $T = E_n$. Damit ist dann

$$g(S) \geqslant \mathrm{tr}(D^2) - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(D))^2$$

mit Gleichheit für $U^TSV = E_n$, also für $S = UV^T$. Da nach a) jedes $R' \in \tilde{O}(n)$ geschrieben werden kann als $R' = \mu'S'$ folgt also, dass für solche $R$

$$\|A - \frac{\mathrm{tr}\,(D)}{n}UV^T\|_F \leqslant \|A - \mu'S'\|_F .$$

Weg 2: Sei $\mu \geqslant 0$ fest und betrachte den Ausdruck (1) für verschiedene $S \in O(n)$. Der Ausdruck wird minimiert genau dann wenn $\mathrm{tr}(DU^TSV)$ maximiert wird. Es ist aber $U^TSV \in O(n)$ und die Diagonaleinträge von $D$ sind nichtnegativ, da es gerade die Singulärwerte von $A$ sind. Nach der Bermerkung ist

$$\mathrm{tr}\left(DU^TSV\right) \leqslant \mathrm{tr}\,(D) ,$$

mit Gleichheit genau dann wenn $U^TSV = E_n$, also genau dann wenn $S = UV^T$ (unabhängig von $\mu$). Andererseits wird (1) nach Teilaufgabe (c) für gegebenes $S$ durch $\mu = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(DU^TSV)$ minimiert. Insgesamt daher

$$\|A - \frac{\mathrm{tr}\,(D)}{n}UV^T\|_F \leqslant \|A - \mu'S'\|_F ,$$

für alle $\mu' \geqslant 0$, $S \in O(n)$. Nach Teilaufgabe (a) ist aber jedes $R' \in \tilde{O}(n)$ von der Form $R' = \mu'S'$ und hierbei kann $\mu' \geqslant 0$ gewählt werden, somit folgt die Aussage.