Lösung Serie 26

MC-Aufgaben

1. Es ist das folgende autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.

(b) $(0, 0)$ ist Gleichgewichtspunkt.

√ (c) $(1, -2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(d) $(-1, 2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

Wir setzen zugehörige Vektorfeld $v(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 + 3, 2x_1 + x_2)$ gleich Null, um die Gleichgewichtspunkte zu erhalten (siehe Stammbach, Kap. VII.12, p.106). Das ergibt $x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ und $2x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. Das DGL-System entspricht genau den Feldlinien von v, die durch $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = v(x_1, x_2)$ gegeben sind. Deshalb ist $(x_1, x_2) = (1, -2)$ eine konstante Feldlinie und damit ein Gleichgewichtspunkt.

2. Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by. \end{cases}$$

Für $b = 1$ ist die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, y(0) = 0$ gleich...

(a) $x(t) = e, y(t) = te^t$

√ (b) $x(t) = t + 1, y(t) = t$

(c) $x(t) = t, y(t) = t$

(d) $x(t) = e^t, y(t) = te^t$

Mit $b = 1$ lautet das System

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Wir führen das System auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung in x, indem wir die unbekannte Funktion y eliminieren. Es gilt

$$\dot{x} = x - y = \dot{y}, \quad \text{das heisst, } \dot{x} = \dot{y}.$$

Die Ableitung der ersten Gleichung gibt

$$\ddot{x} = \dot{x} - \dot{y},$$

und somit erhalten wir

$$\ddot{x} = \dot{x} - \dot{x} = 0.$$

Also ist

$$x(t) = C_1 + C_2 t,$$

und

$$y(t) = x(t) - \dot{x}(t) = C_1 + C_2 t - C_2.$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir $C_1 = C_2 = 1$ und somit ist die Lösung $x(t) = 1 + t, y(t) = t$.

3. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 4\,x, \\ \dot{x} - \dot{y} = 6\,y, \end{cases}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

√ (b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

(d) $x(1) + y(1) = e^3$.

Dieses System kann geschrieben werden als

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} + \dot{y} & = & 4x \\ \dot{x} - \dot{y} & = & 6y \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2\dot{x} & = & 4x + 6y \\ 2\dot{y} & = & 4x - 6y \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + 3y \\ \dot{y} & = & 2x - 3y \end{array} \Longleftrightarrow \dot{z} = Az = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} z,$$

wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ von A. Es gilt

$$0 = \det\left(A - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)\,(\lambda - 3)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = -2a, \text{ und}$$

$$(A - \lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = 3d.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2. Da die EW voneinander verschieden sind, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{z} = Az$

$$z_1\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad \text{und} \quad z_2\,(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Es folgt, dass die allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$ gegeben ist durch

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

oder

$$x(t) = \alpha e^{-4t} + 3\beta e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -2\alpha e^{-4t} + \beta e^{3t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangsbedingungen bestimmen wir die Konstanten α und β

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha + 3\beta \\ 0 & = & -2\alpha + \beta \end{array}.$$

Es folgt, dass $\alpha = \frac{1}{7}$ und $\beta = \frac{2}{7}$. Also

$$x(t) = \frac{1}{7}e^{-4t} + \frac{6}{7}e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}e^{3t}.$$

Mit Einsetzen folgt die richtige Antwort $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

4. Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

√ (a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f+g$ zweier Funktionen ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x-x_0)}{k!}$. Wegen $(f+g)^{(k)}(x-x_0) = f^{(k)}(x-x_0) + g^{(k)}(x-x_0)$ ist die erste Antwort die richtige.

5. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

(a) 0

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) ∞

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Also ist (b) richtig.

6. Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$

√ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

Dank der geometrischen Reihe haben wir für $|x-1| < 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k.$$

Die Reihe konvergliert für $|x-1| < 1$; ihr Konvergenzintervall ist also $(0; 2)$.

7. In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 (-1)^{k+1} (2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1, 2)$

(b) $(-4, 5)$

(c) $(-2, 2)$

√ (d) $(-2, 3)$

Es sei $z = (2x-1)^2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius bezüglich z gleich

$$\left| \lim_{k \to \infty} \frac{k^3 (-1)^{k+1} 5^{2k+2}}{(k+1)^3 (-1)^{k+2} 5^{2k}} \right| = \left| \lim_{k \to \infty} \frac{25k^3}{(k+1)^3} \right| = 25$$

ist. Folglich konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn $z = (2x-1)^2 < 25$ ist, also wenn $-2 < x < 3$ gilt. Um den Beweis abzuschliessen reicht es zu zeigen, dass die Potenzreihe für $x \in \{-2, 3\}$ nicht konvergiert. Dies folgt aber daraus, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^3$ divergiert.

8. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

sind korrekt?

√ (a) Für eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die die Gleichung löst, gilt $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ für $n \geq 0$.

(b) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ist eine gerade Funktion, dh. $y(-x) = y(x)$.

√ (c) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist $y(x) = e^{-x^2/2}$.

(d) Jede Lösung y erfüllt entweder $y(-x) = y(x)$ oder $y(-x) = -y(x)$.

Mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned} xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den Index n durch $n+2$ ersetzt.

Addiert man diese Gleichungen, ergibt sich

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(n+1))x^n = 0.$$

Es folgt $(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n(n+1) = 0$ für $n \geq 0$. Da $n+1 \neq 0$ gilt also $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$.

Eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist eine gerade Funktion genau dann wenn alle a_n für n ungerade verschwinden. Die Bedingung $y'(0) = 1 = a_1$ schliesst diesen Fall schon aus. Tatsächlich sieht man, dass wegen $y(0) = 0 = a_0$ gerade $2a_2 + a_0 = 0$, also $a_2 = 0$, und $4a_4 + a_2 = 0$, also $a_4 = 0$ und so weiter. Es gilt also, dass alle a_n für n gerade verschwinden, also ist diese Lösung eine ungerade Funktion.

Durch Ableiten und Einsetzen sieht man leicht, dass $y(x) = e^{-x^2/2}$ eine Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist.

Die eindeutige Lösung y mit $y(0) = 1, y'(0) = 1$ ist weder gerade noch ungerade, denn es verschwinden weder alle a_n mit n gerade noch alle a_n mit n ungerade.

Offene Aufgaben

9. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x+y \\ \dot{y} &= -x-3y \end{cases}$$

mit Anfangsbedingungen

$$x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Lösung: Das System kann man schreiben als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} - (\operatorname{spur}(A))\,\dot{x} + (\det(A)) = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(0)=0$ folgt $C_1 = 0$. Einsetzen liefert für $y(t)$

$$y(t) = \dot{x} + x = (C_2 - 2C_2 t)e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} = (C_2 - C_2 t)e^{-2t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0)=1$ folgt noch $C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung lautet daher

$$x(t) = te^{2t} \qquad y(t) = (1-t)e^{-2t}.$$

10. Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\begin{cases} \dot{x} &= 2x-y \\ \dot{y} &= x+2y \end{cases}$.

Lösung: Das System kann man schreiben als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} - (\operatorname{spur}(A))\,\dot{x} + (\det(A)) = \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Aus der ersten Gleichung ist

$$\begin{aligned} y(t) = 2x(t) - \dot{x}(t) &= 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \\ &= e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t). \end{aligned}$$

11. Skizzieren Sie das Phasenporträt des folgenden Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = \frac{x}{y} \end{cases}.$$

Hinweis: Betrachten Sie y als $y(x)$ und lösen Sie die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Lösung: Das Phasenporträt ist die Schar der Lösungen des Systems.

Mit dem Hinweis erhalten wir die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{\frac{x}{y}}{2x} = \frac{1}{2y},$$

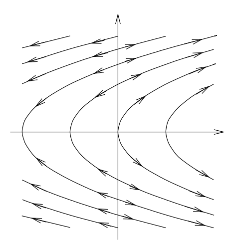
welche separierbar ist. Die Lösungen lauten

$$y^2 = x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

das heisst

$$x = y^2 + D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Dieses Schar besteht aus Parabeln mit der x-Achse als Symmetrieachse, die nach rechts geöffnet sind. Man kann den Durchlauffsinn durch Untersuchung des Differentialgleichungssystem bestimmen : Der Tangentialvektor zur Kurve $(x(t), y(t))$ im Punkt $(x(t_0), y(t_0))$ ist $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = (2x(t_0), \frac{x(t_0)}{y(t_0)})$. Also Zum Beispiel wenn $(x(t_0), y(t_0))$ im ersten Quadrant sich befindet (d.h. $x, y > 0$), dann sind beide Koordinaten von $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$ positiv und somit läuft die Kurve nach rechts.



Es ist auch möglich, eine explizite Lösung des Differentialgleichungssystems zu finden:
Die erste Differentialgleichung $\dot{x} = 2x$ lässt sich leicht lösen. Man erhält $x(t) = Ce^{2t}$. Dies eingesetzt in der zweiten Gleichung führt zu

$$\dot{y} = \frac{Ce^{2t}}{y} \quad \text{oder} \quad y\dot{y} = Ce^{2t} \implies \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}e^{2t} - \frac{D}{2}.$$

Im Phasenraum ist also die Parameterdarstellung der Lösungskurve gegeben durch

$$x(t) = Ce^{2t}$$
$$y(t) = \pm\sqrt{Ce^{2t} - D}$$

Durch Elimination von t sieht man, dass die Lösungen auf der Parabelschar $x = y^2 + D$ liegen.
Für $C > 0$ liegen die Punkte in der Halbebene $x > 0$. Für $D > 0$ bewegen sich die Punkte vom Scheitel $(D, 0)$ auf einem der beiden Parabeläste nach rechts. Diese Lösung ist nur für $t \geq \frac{1}{2} \log \frac{D}{C}$ definiert. Für $D \leq 0$ bewegen sich die Punkte ebenfalls nach rechts, aber nur auf den Parabelpunkten die in der Halbebene $x > 0$ liegen.
Für $C = 0$ (und $D \leq 0$) hat man die stationären Lösungen $(x(t), y(t)) = (0, \pm\sqrt{-D})$.
Für $C < 0$ (und $D < 0$) liegt die Lösung in der Halbebene $x < 0$ und läuft in den Scheitelpunkt $(D, 0)$. Diese Lösung ist nur für $t \leq \frac{1}{2} \log \frac{D}{C}$ definiert.

12. Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - 1\\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Hinweis: Betrachten Sie für die Stabilität das linearisierte System.

Lösung: Ein Gleichgewichtspunkt ist eine konstante Lösung des Systems. Sei also (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, eine konstante Lösung des Systems, dann gilt (eingesetzt in die Differenzialgleichung)

$$\begin{aligned}0 &= a^2 + b^2 - 1\\ 0 &= a^2 - b^2\end{aligned} \implies 0 = 2a^2 - 1, \text{ also } a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und somit } b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichgewichtspunkte sind somit

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ und } \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Um die Stabilität zu bestimmen, linearisieren wir das System im Gleichgewichtspunkt (a, b). Sei $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ und sei $g(x, y) := x^2 - y^2$. Es gilt $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$, $g_x(x, y) = 2x$ und $g_y(x, y) = -2y$. Die lineare Ersatzfunktion von f in (a, b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(x, y) \longmapsto & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)\\ &= a^2 + b^2 - 1 + 2a(x - a) + 2b(y - b) = 2ax + 2by - a^2 - b^2 - 1.\end{aligned}$$

Die lineare Ersatzfunktion von g in (a, b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(x, y) \longmapsto & g(a, b) + g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b)\\ &= a^2 - b^2 + 2a(x - a) - 2b(y - b) = 2ax - 2by - a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Das linearisierte System ist folglich

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2ax + 2by - a^2 - b^2 - 1\\ \dot{y} &= 2ax - 2by - a^2 + b^2\end{aligned} \iff \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2a & -2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a^2 - b^2 - 1\\ -a^2 + b^2\end{pmatrix}.$$

Setze

$$A := \begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2a & -2b\end{pmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung ist durch den Gleichgewichtspunkt $(x, y) = (a, b)$ gegeben. Die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems hängt nur von den Eigenwerten λ von A ab.

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix}2a - \lambda & 2b\\ 2a & -2b - \lambda\end{pmatrix} = (2a - \lambda)(-2b - \lambda) - 4ab\\ &= -4ab - 2a\lambda + 2b\lambda + \lambda^2 - 4ab = \lambda^2 + \lambda(2b - 2a) - 8ab\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2a - 2b + \sqrt{(2b - 2a)^2 + 32ab}}{2} = a - b + \sqrt{(b - a)^2 + 8ab}\\ \lambda_2 &= \frac{2a - 2b - \sqrt{(2b - 2a)^2 + 32ab}}{2} = a - b - \sqrt{(b - a)^2 + 8ab}.\end{aligned}$$

Es gilt, dass (a, b) stabil ist, falls $\mathrm{Re}(\lambda_1) \le 0$ und $\mathrm{Re}(\lambda_2) \le 0$. Wir betrachten die oben gefundenen Gleichgewichtspunkte:

- Für $(a,b) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ oder $(a,b) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Somit ist $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ und es folgt, dass die Gleichgewichtspunkte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ instabil sind.
- Für $(a,b) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2-4} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ und $\lambda_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Da $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$, ist $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ instabil.
- Für $(a,b) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2-4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Da $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$, ist $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ stabil.

13. Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

(a) $f(x) = \sinh(x)$;

(b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

Lösung:

(a) Wir wissen
$$(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$
also gilt $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$. Allgemeiner gilt $(\sinh(x))^{(2k)} = \sinh(x)$ für alle $k \geq 0$ und $(\sinh(x))^{(2k-1)} = \cosh(x)$ für alle $k \geq 1$.
Weil $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$, überleben in der Taylorreihe von $\sinh(x)$ nur die ungeraden Terme. Tatsächlich gilt
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots.$$

(b) Die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ bzgl. des Punkts $x = 0$ lautet
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
Daraus folgt
$$\ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{4k+4}}{k+1}.$$
Für $x^2 \ln(1+x^4)$ ergibt sich also die Reihenentwicklung
$$x^2 \ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{4k+6}.$$

14. Entwickeln Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$
in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

Lösung: Wir stellen fest, dass wir den Nenner der gegebenen Funktion faktorisieren können als
$$1 - x + x^2 - x^3 = (1-x)(1+x^2).$$

Wir machen daher für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Sortieren nach Potenzen von x liefert

$$2 = \underbrace{(A-B)}_{\overset{!}{=}0} x^2 + \underbrace{(B-C)}_{\overset{!}{=}0} x + \underbrace{(A+C)}_{\overset{!}{=}2}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite finden wir $A = B = C = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Die geometrische Reihe liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = (1+x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}f(x) &= (1+x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) + (1+x)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) \\ &= (1+x)(2 + 2x^4 + 2x^8 + 2x^{12} + \cdots) \\ &= (1+x)\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty}(2x^{4k} + 2x^{4k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \text{ und } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Konvergenzradius der Potenzreihendarstellung von $f(x)$ ist identisch mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(x^4)^k$ im Zwischenergebnis. (Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, hat der Vorfaktor $(1+x)$ keinen Einfluss.) Um den Konvergenzradius letzterer Reihe zu bestimmen, substituieren wir $x^4 =: y$ und erhalten damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2y^k$, deren Konvergenzradius offensichtlich 1 beträgt. Die Potenzreihe für $f(x)$ konvergiert also, falls $|x^4| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$. Ihr Konvergenzradius beträgt demnach ebenfalls 1.

15. Berechnen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$.

Lösung:

(a) Wir benutzen die Definition des Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{n!}{(n+1)^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-e, e)$.

(b) Wir setzen die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}$ in die Formel für den Konvergenzradius ein und

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}}{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{5^{(n+1)^2}(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \frac{5^{(n+1)^2}}{5^{n^2}}$$
$$= e \lim_{n\to\infty} 5^{n^2+2n+1-n^2} = \infty.$$

Die Potenzreihe besitzt demnach den Konvergenzradius ∞, konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Die Formel für den Konvergenzradius lässt sich hier leider nicht direkt anwenden, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich Null sind.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n} = 9x^2 + \frac{9^2}{2} x^4 + \cdots$$
$$= 0 \cdot x + 9x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{9^2}{2} x^4 + 0 \cdot x^5 + \cdots$$

Wir betrachten daher statt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ zunächst die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} y^n$. Aus letzterer erhält man die ursprüngliche Potenzreihe zurück, indem man $y := x^2$ einsetzt. Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe lauten $a_n = \frac{9^n}{n}$. Damit erhalten wir für deren Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{9^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{9}.$$

Die Ersatzreihe konvergiert also für $|y| < \frac{1}{9}$. Wegen des Zusammenhangs $y = x^2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{3}$. Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

(d) Der Konvergenzradius beträgt

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Da wir um den Punkt $x_0 = -3$ entwickeln konvergiert die Potenzreihe also sicher für

$$x \in (-3 - 1/2, -3 + 1/2) = (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$$

16. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 6. Ordnung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + x^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Lösung: Sei $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ die Taylorreihe einer Lösung. Damit ergibt sich für die Ableitungen

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots.$$

Schreibt man die Terme, die in der Gleichung vorkommen, geeignet untereinander, ergibt sich

$$\begin{array}{rcccccc}
x^2 y(x) = & & & a_0 x^2 & +a_1 x^3 & +a_2 x^4 + \cdots \\
xy'(x) = & & a_1 x & +2a_2 x^2 & +3a_3 x^3 & +4a_4 x^4 + \cdots \\
y''(x) = & 2a_2 & +6a_3 x & +12a_4 x^2 & +20a_5 x^3 & +30a_6 x^4 + \cdots.
\end{array}$$

Die Summe dieser Potenzreihen soll 0 ergeben. Vergleich der Koeffizienten gibt

$$2a_2 = 0, a_1 + 6a_3 = 0, a_0 + 2a_2 + 12a_4 = 0, a_1 + 3a_3 + 20a_5 = 0, a_2 + 4a_4 + 30a_6 = 0.$$

Die Bedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 1$ besagen gerade $a_0 = 0, a_1 = 1$. Mit den Gleichungen oben ergibt sich dann

$$a_2 = 0, a_3 = -1/6, a_4 = 0, a_5 = -1/40, a_6 = 0.$$

Das 6. Taylorpolynom einer Lösung lautet also

$$y(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5.$$

17. Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylor-Koeffizienten a_n der Lösung $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) + x^3 y(x) = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimmen Sie $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.

Lösung: Für $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ sind

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

und

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

Nach der Anfangsbedingungen kriegen wir sofort

$$a_0 = 0 = a_1.$$

Durch einsetzen in der Differenzialgleichung kriegen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + x^3\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = x$$

oder auch

$$(0+2)(0+1)a_2+(1+2)(1+1)a_3x+(2+2)(2+1)a_4x^2+\sum_{k=3}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+a_{k-3}x^k = x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_0 = 0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_9 = a_{10}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_8 = -\frac{1}{8\cdot 7\cdot 6}$$

und für $n \geq 11$

$$a_n = -\frac{a_{n-5}}{n(n-1)}.$$