Prof. Richard Pink

Musterlösung Single Choice Aufgaben 5

Matrizen, Invertierbarkeit

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei $x \in \mathbb{Q}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ ist ...

   (a) ... invertierbar genau dann, wenn $x \neq 0$ ist.

   (b) ... invertierbar genau dann, wenn $x = 0$ ist.

   (c) ... nie invertierbar.

   $\boxed{\text{(d)}}$ ... immer invertierbar.

   Erklärung: Die Matrix ist immer invertierbar mit der Inversen $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Seien A und B zwei quadratische Matrizen der gleichen Grösse. Welche Aussage gilt im Allgemeinen nicht?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$

   (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

   (c) $(A^T)^T = A$

   (d) $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot A$

   Erklärung: Es ist $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Für zwei nicht-kommutierende Matrizen A und B ist dies ungleich $A^T \cdot B^T$.

3. Seien A und B zwei invertierbare $n \times n$-Matrizen über einem Körper und O die Nullmatrix derselben Grösse. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Für jede $n \times n$-Matrix C gilt $A \cdot C = O \;\Rightarrow\; C = O$.

   (b) Die Matrix $A \cdot B$ ist invertierbar.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Matrix $A + B$ ist invertierbar.

   (d) Jede $n \times n$-Matrix C mit $A \cdot C = B$ ist invertierbar.

   Erklärung: Im Allgemeinen ist $A + B$ nicht invertierbar, denn im Beispiel $B = -A$ ist $A + B = O$.

4. Sei $n \geqslant 2$. Eine $n \times n$-Matrix A über einem Körper ist invertierbar genau dann,

   (a) wenn die Diagonaleinträge von A nicht null sind.

   (b) wenn A nicht die Nullmatrix ist.

   (c) wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist.

   $\boxed{\text{(d)}}$ wenn $A \cdot A$ invertierbar ist.

Erklärung: Ist A invertierbar mit inverser Matrix A^{-1}, so ist $A^{-1} \cdot A^{-1}$ ein Inverses von $A \cdot A$. Umgekehrt sei B ein Inverses von $A \cdot A$. Dann gilt $B \cdot A \cdot A = I_n$, also ist $B \cdot A$ ein Inverses von A.

Das Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt, dass (a) und (c) falsch sind. Das Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt, dass (b) falsch ist.

5. Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar über $\mathbb{F}_p$ für

   (a) $p = 2$

   (b) $p = 3$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $p = 5$

   (d) $p = 7$

   Erklärung: Wir addieren die erste Zeile zur zweiten und erhalten $A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass A invertierbar ist genau dann, wenn A' invertierbar ist. Zudem ist A' eine obere Dreiecksmatrix, also invertierbar genau dann, wenn die Diagonaleinträge 1 und 5 ungleich null sind in $\mathbb{F}_p$. Dies ist der Fall genau dann, wenn $p \neq 5$ ist.