23.5.2022

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, λf, fg, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ integrierbar.

Falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ so ist f/g integrierbar

Satz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar

Konvention: $\int_a^a f(x)dx := 0$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall, sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Kor $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)^{1/2}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Defn Sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f falls F stetig differenzierbar ist (in $[a,b]$) und $F'=f$

Bsp. 1) $f(x)=e^x$, $F(x)=e^x$

2) $f(x)=x$, $F(x)=\frac{x^2}{2}$

$\tilde{F}(x)=\frac{x^2}{2}+1$

* * * * *

Satz (Hauptsatz der Integral Rechnung). HID

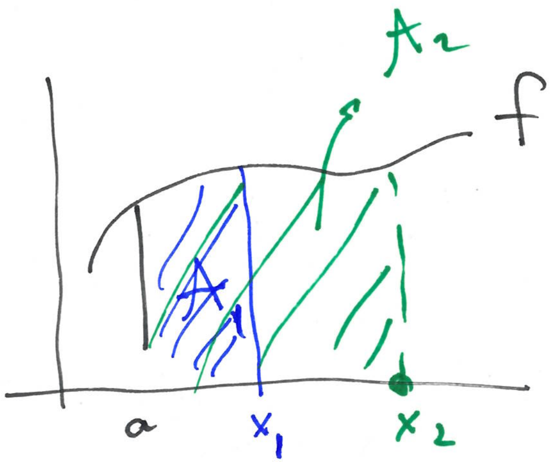
Seien $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt \qquad a\leq x\leq b.$$

Ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $F'(x)=f(x)$ $\forall\, x\in[a,b]$.

Bmk.: 1) Wegen HID, hat jede stetige Funktion f mindestens eine Stammfunktion F

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$



$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt = A_1$$

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt = A_2$$

2) Falls F, G 2 Stammfunktionen von f sind, dann

$$F' = f \qquad G' = f$$

d.h. $F' - G' = f - f = 0$.

$$(F-G)' = 0$$

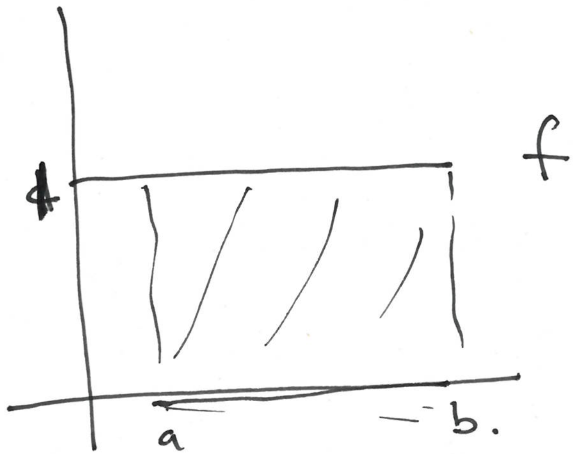
$$\Rightarrow (F-G)(x) = \text{konstant} = C.$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + C.$$

Satz Fundamental Satz der Analysis

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, und es gilt

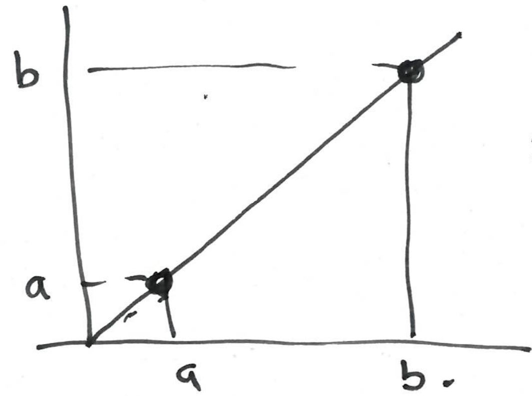
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$



$$\int_a^b f\,dx = 1(b-a)$$

$f = 1$

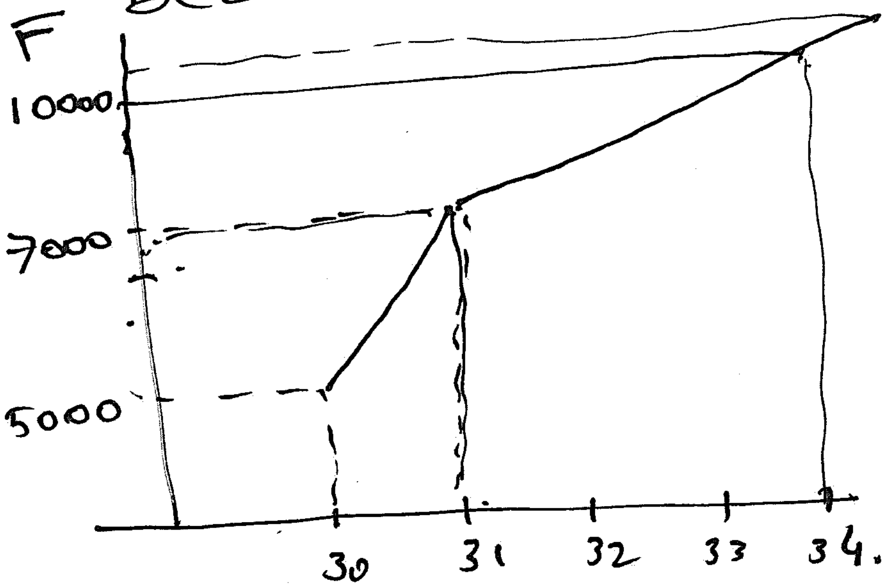
$F(x) = x.$



$$F(b) - F(a) = (b-a)$$

Bsp.

Sei $F(t)$ die Gesamtzahl der Covid-19 Fälle zu t Tagen nach dem ersten bestätigten Fall, bezeichnen.



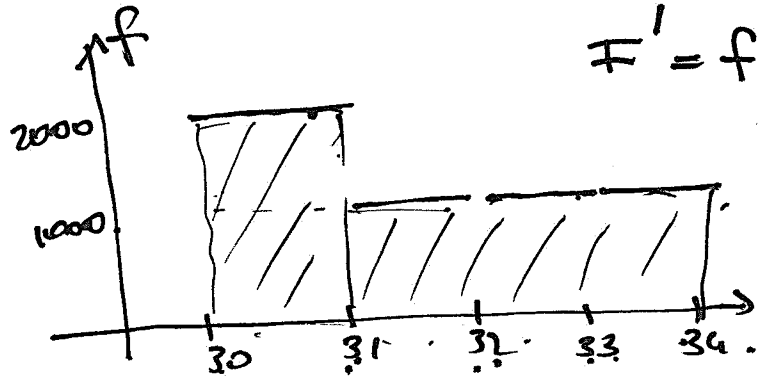
die Gesamtzahl der neuen Fälle zwischen Tag 30 und 34 ist einfach zu finden.

$$F(34) - F(30)$$

$$10000 - 5000 = 5000.$$

Betrachte $f(t)$, die Zahl der neuen Fälle angibt.

$$F' = f$$



Wir können die gleiche Menge, i.e. die Anzahl neuer Fälle von Tag 30 bis Tag 34 unter Verwendung der Funktion f berechnen.

$(1)(2000) + (3)(1000)$

$2000 + 3000 = 5000.$

$$\int_{30}^{34} f(t)\,dt = F(34) - F(30)$$

Die Gesamveränderung der Funktion F zwischen Tag 30 und Tag 34

$$= \sum \underbrace{(\text{Änderungrate})}_{F' = f} \times \Delta t$$

Δt = mit dieser Rate verbrachte Zeit.

$$F(34) - F(30) = \sum (F')(\Delta t)$$

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt}$$

Beweis (Fund.-satz).

Für $x \in [a,b]$, definiere

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Dann ist $F_0(x)$ wegen HID ein Stamfunktion von f mit

$$F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - 0$$

$$= F_0(b) - F_0(a)$$

Für beliebige Stammfunktion F gilt $F = F_0 + c$. für ein konstant c.

$$F(b) - F(a)$$

$$\left(F_0(b) + c\right) - \left(F_0(a) + c\right)$$

$$= F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Bsp. ① $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx$

$f = x^2 \longrightarrow F = \frac{x^3}{3}$

$f = x \longrightarrow F = \frac{x^2}{2}$

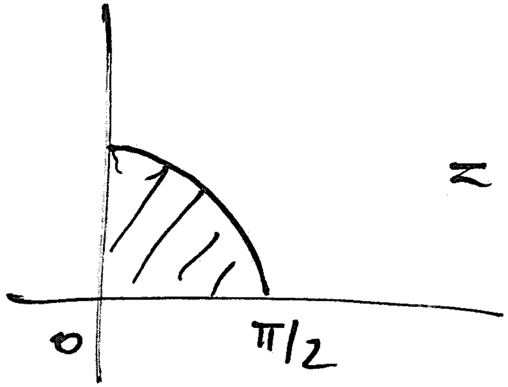
$$\int_0^1 x^2 - x\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x\,dx}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{6}.$$

② $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$= \sin x \Big|_0^{\pi/2}$.



$= \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0.}$

$= 1$

$$F \longrightarrow \boxed{d/dx} \longrightarrow f \longrightarrow \boxed{\int_a^x} \longrightarrow F$$

Beweis (Hauptsatz)

Seien $x, x_0 \in [a,b]$

$$\underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{F(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^{x} f(t)\,dt}_{F(x)}.$$

zu Erinnerung:

$$g'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Für $x \neq x_0$ folgt:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{(x - x_0)} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

mittels Mittelwertsatz für Integralrechnung

gibt es $\xi \in [x_0, x]$
$[x, x_0]$

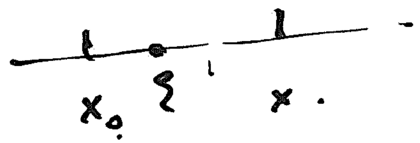
so dass

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(\xi)(x - x_0)$$

MWS.

d.h $$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$$

ξ ist ein Zahl zwischen x und x_0.



Da f stetig ist, als x gegen x_0 strebt, strebt ξ auch gegen x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi)$$

$$= f(x_0).$$

$\Downarrow$

Stetigkeit von f

$\square$

Bmk. Falls f stetig ist, nach Hauptsatz gibt es ein Stammfunktion $F(x)$ und jede andere Stammfunktion ist $F(x)+C$.

Ein Stammfunktion von f heisst auch unbestimmtes Integral (indefinite Integral) von f und wird mit

$$\int f(x)\,dx$$

bezeichnet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Integrationskonstant.

Defn.	f	F
~~Bereich~~ $\mathbb{R}$	e^x	$e^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\mathbb{R}$.	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$.	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
$(0, \infty)$	$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$.
$(-1, 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + C$
	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos x + C$.
$\mathbb{R}$.	$1/1+x^2$	$\arctan + C$.

$$F(x) = \ln|x|$$

$$= \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0. \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = 1/x & x < 0. \end{cases}$$

ln

Integrationsmethode

Bmk. Da das Integration die umkehr von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregeln eine für das Integral.

Die Produktregeln für Ableitung führt zu "Partielle Integration".

Satz (Partielle Integration)

Seien $a < b$ reelle Zahlen, und $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \overbrace{f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)}^{(fg)\big|_a^b} - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx .}$$

Bsp: (1) $\int_a^b \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\, dx.$

$f(x) = \cancel{e^x}\, x \qquad f'(x) = 1.$

$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$

$$\left(xe^x\Big|_a^b\right) - \underbrace{\int_a^b 1\cdot e^x\, dx}_{e^x\big|_a^b.}$$

$$\left(xe^x - e^x\right)\Big|_a^b$$

$$\boxed{\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C}$$

oder

(2). $\int \underbrace{x}_{g'}\,\underbrace{e^x}_{f}\, dx$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \frac{x^2}{2}.$

$$\frac{x^2}{2}\cdot e^x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} e^x\, dx}.$$

nicht einfacher!

Bmk. Die erste Wahl ($f = x$, $g' = e^x$) ist besser!

Beweis (Partielle Integration)

Sei

$$H(x) = f(x)g(x)$$

H ist diff. und

$$H'(x) = f'g + g'f = (fg)'$$

d.h $H(x) = f(x)g(x)$ ist ein Stammfunktion von $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Aus Fund. Satz folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,dx = H(b) - H(a)$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Bmk. Für unbestimmtes Integral schreibt man

Kurzschreibweise

$$\boxed{\int f\,dg = fg - \int g\,df}$$

wobei dg als

$g'(x)\,dx$ zu

lesen ist.

Bsp. $\int \ln x \, dx$.

$$\int \ln x \, dx = \int (\ln x \cdot 1) \, dx$$

Clicker Frage.

Sei $F(x) = \int_0^{x^2+5} \sin^2 t \, dt$

$F'(x) = ?$

Sei $G(x) = \int_0^{x} \sin^2 t \, dt \Rightarrow$

$F(x) = G(x^2+5)$

$= G(H(x))$ $\quad H(x) := x^2+5$

$$F'(x) = \underbrace{G'(H(x))}_{\sin^2(x^2+5)} \cdot \underbrace{H'(x)}_{2x}$$

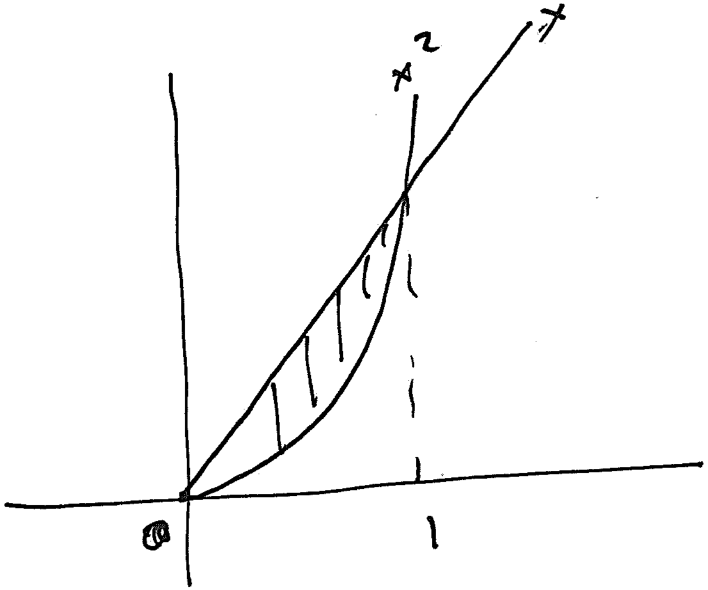
$\sin^2(x^2+5) \cdot 2x.$

$G(x) = \int_0^{x} f(t) \, dt$

$G'(x) = f(x).$

$G'(x) = \sin^2 x$

Clicker.



$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/6$$