Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq n.$$

Dabei ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ und $0! = 1$.

Sprechweisen: $\binom{n}{k} \leftrightarrow$ „n über k“

$n! \leftrightarrow$ „n Fakultät“ bzw. „n Faktorielle“

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus n Personen eine Gruppe von k Personen auszuwählen?
Die Lösung dieses Abzählproblems ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$. Eine Erklärung dafür findest du auf dem AB – Kombinatorik.

Pascalsches Dreieck

Das links dargestellte **Pascalsche Dreieck** ist durch folgende beide Regeln eindeutig festgelegt:

1) Jede Zahl am linken Rand und am rechten Rand ist 1.

2) Jede Zahl im Inneren ist die Summe der beiden benachbarten Zahlen in der Zeile darüber.

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind genau die rechts dargestellten Binomialkoeffizienten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Eine kombinatorische Erklärung dafür findest du auf dem AB – Pascalsches Dreieck II.

Wir können die Gleichheit auch rechnerisch überprüfen:

1) Rechne nach, dass $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \checkmark \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 \checkmark$$

2) Rechne nach, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für alle $0 < k < n$ gilt.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \qquad k \cdot (k-1)! = k! \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \checkmark
\end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Der **Binomische Lehrsatz**

$$\boldsymbol{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}} \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

hilft beim Ausmultiplizieren von Binomen der Form $(x+y)^n$. Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0$$
$$= 1 \cdot y^4 + 4 \cdot x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 1 \cdot x^4$$

Eine kombinatorische Erklärung für den Binomischen Lehrsatz findest du auf dem AB – Pascalsches Dreieck II.

Jetzt beweisen wir den Binomischen Lehrsatz mit vollständiger Induktion nach n:

Überprüfe den Binomischen Lehrsatz für $n = 0$:

$$(x+y)^0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k} = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1 \checkmark$$

Als Nächstes überprüfen wir den Induktionsschritt $n \to n+1$.

Wir dürfen also verwenden, dass $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$ gilt.

Daraus müssen wir folgern, dass $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$ gilt.

Wir ziehen zunächst die Summanden $k = 0$ und $k = n+1$ aus der Summe, um $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ verwenden zu können.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} =$$

$$= y^{n+1} + x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} = \qquad \text{Ausmultiplizieren, Summe aufteilen}$$

$$= \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n} + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} \right] + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \right] = \qquad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

$$= x \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] + y \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] =$$

$$= x \cdot (x+y)^n + y \cdot (x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y)^n = (x+y)^{n+1} \checkmark$$

Zeilensumme im Pascalschen Dreieck

Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz die n-te Zeilensumme im Pascalschen Dreieck:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Alternierende Zeilensumme im Pascalschen Dreieck

Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$