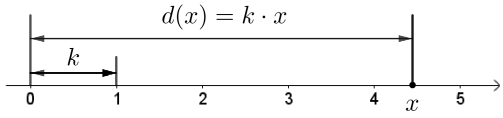
**Lineare Skala**

Der rechts dargestellte Zahlenstrahl startet bei der Zahl **0**.
Miss die Entfernung der Zahl 1 von der Zahl 0 ab:




$k = \boxed{\quad}$ mm

Diese Zahl $k$ nennen wir **Skalierungsfaktor**.

Auf dieser Skala hat die Zahl $x \geq 0$ den Abstand $\boldsymbol{d(x) = k \cdot x}$ von der Zahl 0.

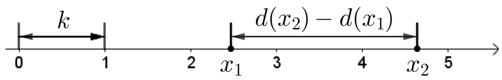
Es gilt zum Beispiel:

**a)** $d(0) = k \cdot 0 = \boxed{\quad}$ mm **b)** $d(1) = k \cdot 1 = \boxed{\quad}$ mm **c)** $d(2) = k \cdot 2 = \boxed{\quad}$ mm

Es ist $d$ eine lineare Funktion. Wir sprechen deshalb auch von einer **linearen Skala**.

**Lineare Skala**

Eine lineare Skala mit Skalierungsfaktor $k$ ist unten dargestellt.
Wie berechnet man den Abstand zweier Zahlen $x_1 < x_2$ auf dieser Skala?



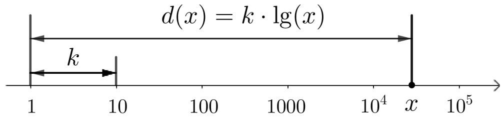

Wir stellen eine Formel für diesen Abstand auf:

$$\boldsymbol{d(x_2) - d(x_1)} = k \cdot x_2 - k \cdot x_1 = \boldsymbol{k \cdot (x_2 - x_1)}$$

Auf einer *linearen* Skala ist also zum Beispiel der Abstand zwischen 2 und 6 gleich groß wie der Abstand zwischen 5 und 9, weil $6 - 2 = 9 - 5 = 4$.

**Logarithmische Skala**

Der rechts dargestellte Zahlenstrahl startet bei der Zahl **1**.
Miss die Entfernung der Zahl 10 von der Zahl 1 ab:




$k = \boxed{\quad}$ mm

Auf dieser Skala hat die Zahl $x \geq 1$ den Abstand $\boldsymbol{d(x) = k \cdot \log_{10}(x) = k \cdot \lg(x)}$ von der Zahl 1.

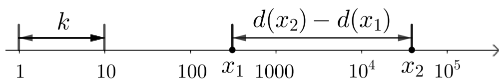
Es gilt zum Beispiel:

**a)** $d(1) = k \cdot \underbrace{\lg(1)}_{=0} = \boxed{\quad}$ mm **b)** $d(10) = k \cdot \underbrace{\lg(10)}_{=1} = \boxed{\quad}$ mm **c)** $d(100) = k \cdot \underbrace{\lg(100)}_{=2} = \boxed{\quad}$ mm

Es ist $d$ eine Logarithmusfunktion. Wir sprechen deshalb auch von einer **logarithmischen Skala**.

**Logarithmische Skala**

Eine logarithmische Skala mit Skalierungsfaktor $k$ ist unten dargestellt.
Wie berechnet man den Abstand zweier Zahlen $x_1 < x_2$ auf dieser Skala?




Wir stellen mit den Rechenregeln für Logarithmen eine Formel für diesen Abstand auf:

$$\boldsymbol{d(x_2) - d(x_1)} = k \cdot \lg(x_2) - k \cdot \lg(x_1) =$$
$$= k \cdot [\lg(x_2) - \lg(x_1)] = \boldsymbol{k \cdot \lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Auf einer *logarithmischen* Skala ist also zum Beispiel der Abstand zwischen 2 und 6 gleich groß wie der Abstand zwischen 5 und 15, weil $\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = 3$.

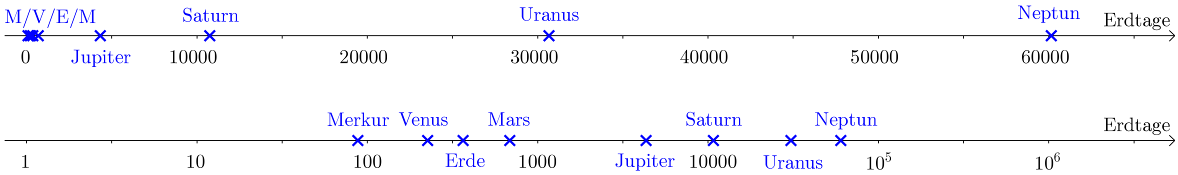
## Lineare Skalierung vs. Logarithmische Skalierung

Die folgende Tabelle enthält gerundete Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne (in Erdtagen):

| Merkur | Venus | Erde | Mars | Jupiter | Saturn | Uranus | Neptun |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 88 | 226 | 365 | 686 | 4329 | 10 753 | 30 664 | 60 148 |

Quelle: Cranial Creations in Physical Science: Interdisciplinary and Cooperative Activities

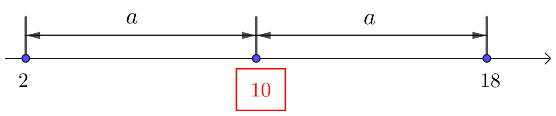
Unten sind diese Werte auf einer linearen Skala und auf einer logarithmischen Skala eingetragen:




Warum ist hier die logarithmische Skala besser geeignet? Es gibt „große“ und „kleine“ Werte.

## Mittelpunkt

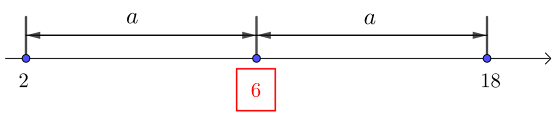
Welcher Wert liegt bei einer *linearen* Skala genau in der Mitte zwischen 2 und 18 ?




$2 + x + x = 18 \iff x = 8$

$2 + 8 = 10$

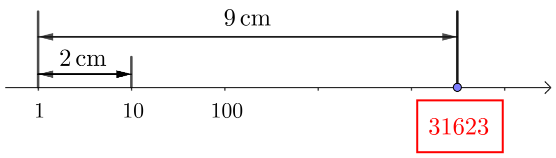
Welcher Wert liegt bei einer *logarithmischen* Skala genau in der Mitte zwischen 2 und 18 ?




$2 \cdot x \cdot x = 18 \overset{x>0}{\iff} x = 3$

$2 \cdot 3 = 6$

Berechne die markierte Zahl auf der logarithmischen Skala. Runde auf die nächste ganze Zahl.

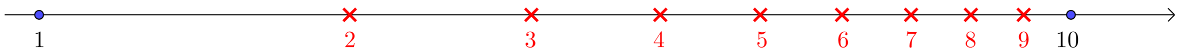



$d(x) = 2 \cdot \lg(x)$

$d(x) = 9 \iff \lg(x) = 4{,}5 \iff x = 10^{4,5} \approx 31\,623$

## 2, 3, 4, . . . , 9

Auf jeder linearen Skala sind 1 und 2 gleich weit voneinander entfernt wie 2 und 3.
Diese Eigenschaft haben logarithmische Skalen *nicht*:



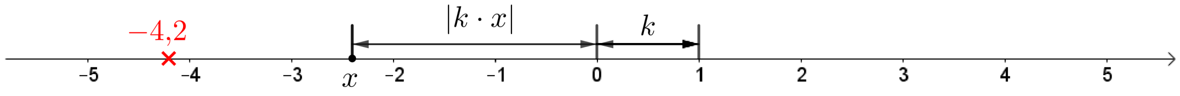

**1)** Miss den Skalierungsfaktor oben ab: $k =$  cm

**2)** Berechne mit diesem Skalierungsfaktor jeweils den Abstand von 1 auf der Skala.
Trage die Ergebnisse in der Tabelle ein, und markiere die Ergebnisse in der Skala oben.

| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k \cdot \lg(2)$ | $k \cdot \lg(3)$ | $k \cdot \lg(4)$ | $k \cdot \lg(5)$ | $k \cdot \lg(6)$ | $k \cdot \lg(7)$ | $k \cdot \lg(8)$ | $k \cdot \lg(9)$ |

**Verlängerung nach links**

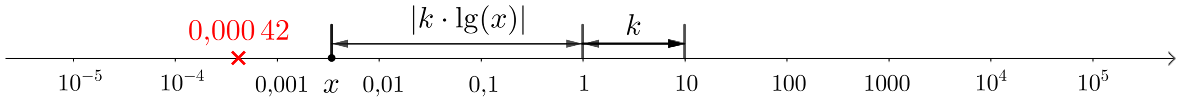
Wir verlängern die unten dargestellte *lineare* Skala mit Skalierungsfaktor $k =$ ☐ mm nach links über den Startwert 0 hinaus:




Die Zahl $x < 0$ liegt um $|d(x)| = |k \cdot x|$ links vom Startwert 0.
Trage die Zahl −4,2 auf der linearen Skala oben ein.

---

Wir verlängern die unten dargestellte *logarithmische* Skala mit Skalierungsfaktor $k =$ ☐ mm nach links über den Startwert 1 hinaus:




Die Zahl $0 < x < 1$ liegt um $|d(x)| = |k \cdot \lg(x)|$ links vom Startwert 1.
Trage die Zahl 0,000 42 auf der logarithmischen Skala oben ein.

Beachte, dass $\lg(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist. Wir können also keine negativen Zahlen auf dieser logarithmischen Skala eintragen.

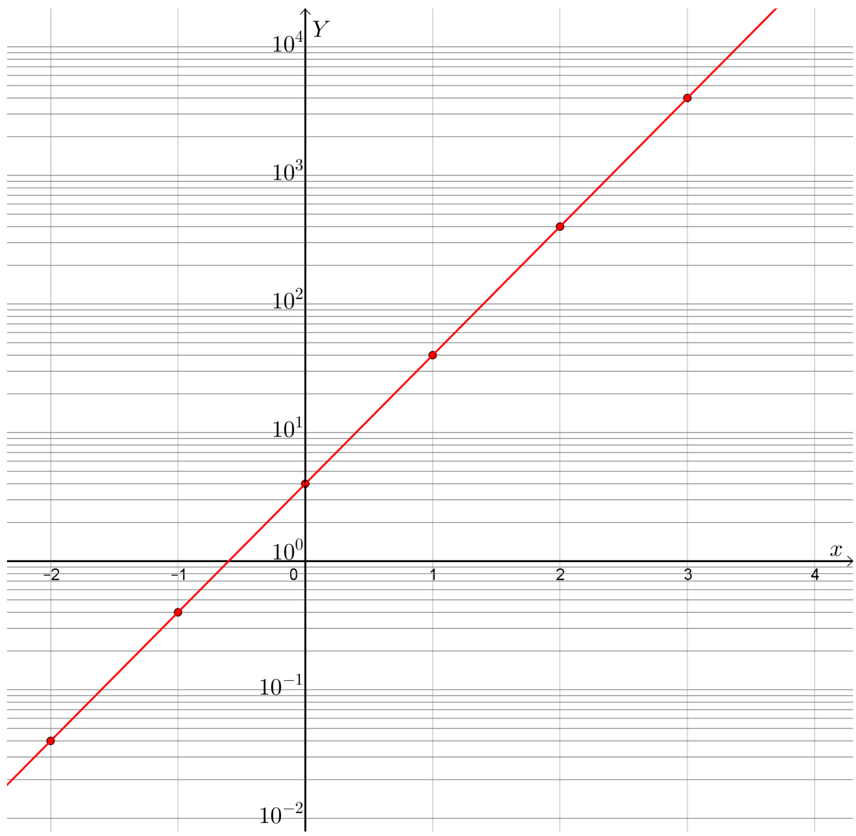
**Ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem**

In einem **ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem** ist die waagrechte Achse linear skaliert und die senkrechte Achse („Ordinatenachse“) logarithmisch skaliert.
Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt (0 | 1).

Zeichne den Graphen der Exponentialfunktion $y(x) = 4 \cdot 10^x$ in dieses Koordinatensystem ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte rechts ein.

| $x$ | $y(x)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 40 |
| 2 | 400 |
| 3 | 4000 |
| −1 | 0,4 |
| −2 | 0,04 |




Was fällt dir auf?

Die Punkte liegen auf einer Gerade.

**Ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem** MmF

Der Graph jeder Exponentialfunktion

$$y(x) = c \cdot a^x$$

ist in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

---

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Exponentialfunktion $y(x) = 4 \cdot 10^x$ nach.
Dazu logarithmieren wir beide Seiten der Funktionsgleichung.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$\lg(y(x)) = \lg(4 \cdot 10^x) = \lg(4) + x \cdot \lg(10)$$

In einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Exponentialfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = \lg(10)$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(4)$.

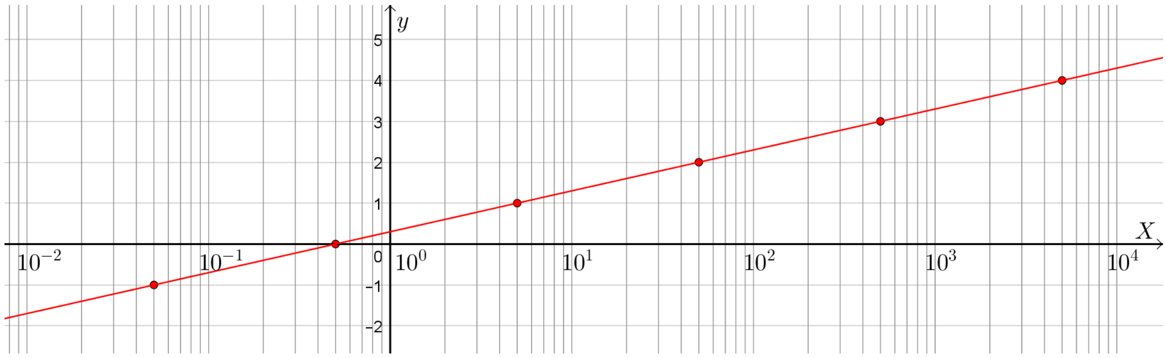
**Abszissenlogarithmisches Koordinatensystem** MmF

In einem **abszissenlogarithmischen Koordinatensystem** ist die senkrechte Achse linear skaliert und die waagrechte Achse („Abszissenachse") logarithmisch skaliert.
Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt $(1 \mid 0)$.

Zeichne den Graphen der Logarithmusfunktion $y(x) = \lg(2 \cdot x)$ in dieses Koordinatensystem unten ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte unten ein.

| $x$ | 5 | 50 | 500 | 5000 | 0,5 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | $-1$ |




**Abszissenlogarithmisches Koordinatensystem** MmF

Der Graph jeder Logarithmusfunktion

$$y(x) = \log_a(c \cdot x)$$

ist in einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

---

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Logarithmusfunktion $y(x) = \lg(2 \cdot x)$ nach.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$y(x) = \lg(2 \cdot x) = \lg(2) + \lg(x)$$

In einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Logarithmusfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = 1$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(2)$.

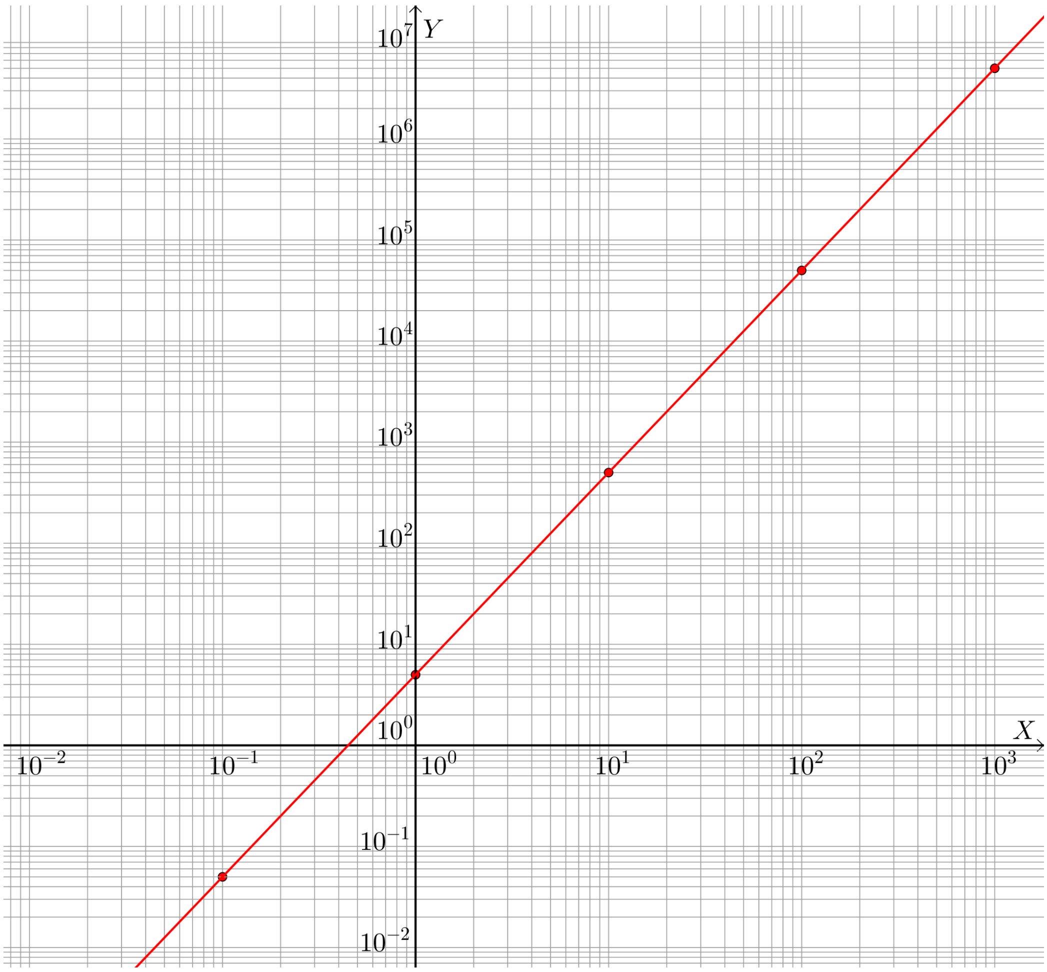
**Doppeltlogarithmisches Koordinatensystem**

In einem **doppeltlogarithmischen Koordinatensystem** sind beide Achsen logarithmisch skaliert. Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt $(1 \mid 1)$.

Zeichne den Graphen der Potenzfunktion $y(x) = 5 \cdot x^2$ in dieses Koordinatensystem unten ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte unten ein.

| $x$ | $1$ | $10$ | $10^2$ | $10^3$ | $10^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)$ | $5$ | $500$ | $5 \cdot 10^4$ | $5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^{-2}$ |




**Doppeltlogarithmisches Koordinatensystem**

Der Graph jeder Potenzfunktion

$$y(x) = a \cdot x^m$$

ist in einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

---

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Potenzfunktion $y(x) = 5 \cdot x^2$ nach.
Dazu logarithmieren wir beide Seiten der Funktionsgleichung.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$\lg(y(x)) = \lg(5 \cdot x^2) = \lg(5) + 2 \cdot \lg(x)$$

In einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Potenzfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = 2$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(5)$.