52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 13. Februar 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Stephan Wagner zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 9. Februar 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Stephan Wagner bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 13. Februar 2021 von 13:15–15:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Induktionsbeweise

Einführung

Dieses Aufgabenblatt soll illustrieren, wie die Methode der vollständigen Induktion auf unterschiedlichsten Gebieten von Nutzen sein kann. Etwas überspitzt formuliert: wann immer der Buchstabe n in einer Aufgabe auftaucht, sollte man an Induktion denken.

Der Standardablauf einer Induktion lautet wie folgt:

- Induktionsanfang: die Aussage stimmt für $n = 0$, $n = 1$ oder dergleichen.
- Induktionsschritt: wenn die Aussage für ein gewisses n stimmt, dann auch für $n + 1$.

Manchmal braucht man auch eine Variante, die *starke Induktion* genannt wird:

- Induktionsanfang: wie oben.
- Induktionsschritt: wenn die Aussage für alle $n \leq N$ stimmt, dann auch für $N + 1$.

Es gibt viele weitere Varianten: Vorwärts-Rückwärts-Induktion, Induktion nach mehreren Variablen, und so weiter. Gelegentlich braucht man einige Kreativität, um mit Induktion zum Ziel zu kommen.

Viel Spaß beim Lösen der folgenden Aufgaben!

Aufgaben

Aufgabe 1. Eine Folge von ganzen Zahlen wird wie folgt definiert: $a_0 = 9$ und $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$ für alle $n \geq 0$. Man bestimme die letzten 1000 Ziffern in der Dezimaldarstellung von a_{10}.

Aufgabe 2. Im ersten Quadranten eines Koordinatensystems wird ein unendliches Schachbrett gezeichnet. Es hat also unten und links einen Rand, ist aber nach rechts und oben hin unendlich. Ist es möglich, jedes Feld mit einer ganzen Zahl so zu füllen, dass am Ende jede Zeile und jede Spalte alle positiven ganzen Zahlen genau einmal enthält?

Aufgabe 3. Beweise: jede positive ganze Zahl lässt sich auf eindeutige Weise als Summe einer oder mehrerer verschiedener Fibonaccizahlen (1,2,3,5,8,13,21,...) darstellen, wobei keine zwei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen vorkommen dürfen. Also etwa: $28 = 21 + 5 + 2$.

Aufgabe 4. Adelheid und Zyriak spielen ein Spiel auf einem 2021×2021-Schachbrett. Zu Beginn erklärt Adelheid einige der Felder zu *verbotenen* Feldern. Das bedeutet, dass nichts auf diese Felder gesetzt werden kann. Danach setzen die beiden abwechselnd Münzen auf das Brett, wobei Zyriak beginnt. Es ist nicht erlaubt, eine Münze auf ein verbotenes Feld oder ein Feld in einer der Zeilen oder Spalten zu setzen, wo sich bereits eine Münze befindet. Wer die letzte Münze setzt, gewinnt das Spiel. Was ist die geringstmögliche Anzahl an Feldern, die Adelheid zu verbotenen Feldern erklären muss um sich den Sieg zu sichern? Es wird angenommen, dass beide einer optimalen Strategie folgen.

Aufgabe 5. Marjorie ist Tambourmajorin der weltgrößten Blasmusikkapelle, mit mehr als einer Million Mitgliedern. Sie würde gerne die Mitglieder der Kapelle in einer quadratischen Formation aufstellen. Dazu bestimmt sie zunächst die kleinste ganze Zahl n, für die die gesamte Kapelle in einem $n \times n$-Quadrat Platz findet, und weist die Mitglieder an Reihen von n Personen zu bilden. Sie ist allerdings mit dem Ergebnis unzufrieden, da einige Plätze leer bleiben. Sie bittet daher alle n Personen in der ersten Reihe nach Hause zu gehen und wiederholt das Prozedere mit den verbliebenen Mitgliedern. Ihr Ziel ist es, so lange auf diese Art weiterzumachen, bis die Musikkapelle ein lückenloses Quadrat bildet. Es stellt sich jedoch heraus, dass die Methode jedes Mal scheitert, bis schließlich die letzten Mitglieder der Kapelle nach Hause geschickt werden. Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Personen, die der Musikkapelle angehören.

Aufgabe 6. Eine endliche Menge von Würfeln im Raum, deren Seiten parallel zu den drei Koordinatenachsen (x-, y- und z-Achse) sind, hat die Eigenschaft, dass jeder Punkt im Raum in höchstens M Würfeln liegt. Man zeige, dass die Würfel derart auf $8M - 7$ (oder weniger) Teilmengen aufgeteilt werden können, dass die Würfel in jeder der Teilmengen keine gemeinsamen Punkte haben.

Aufgabe 7. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ für die

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt, für die $a + b + c = 0$ ist.

Aufgabe 8. Der *Preis* einer Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von reellen Zahlen ist

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + x_2 + \cdots + x_i|.$$

Gegeben seien n reelle Zahlen. Gerda und Gustav wollen sie in einer Folge anordnen, deren Preis möglichst gering ist. Die gründliche Gerda untersucht alle möglichen Reihenfolgen und findet eine mit dem geringstmöglichen Preis M. Der gierige Gustav hingegen wählt zunächst x_1 so, dass $|x_1|$ möglichst klein ist; dann wählt er von den verbliebenen Zahlen jene Zahl x_2 aus, für die $|x_1 + x_2|$ möglichst klein ist, und so weiter. Im i-ten Schritt wählt er also jene Zahl x_i, die den Wert $|x_1 + x_2 + \cdots + x_i|$ minimiert. Wenn es in einem Schritt mehrere Auswahlmöglichkeiten für x_i gibt, die auf denselben Wert führen, dann wählt Gustav zufällig eine von ihnen. Am Ende erhält er eine Folge, deren Preis G ist. Man bestimme die kleinste mögliche Konstante c mit der Eigenschaft, dass unabhängig davon, welche n reellen Zahlen gegeben werden, und welche Folge Gustav mit seiner Methode erhält, die Ungleichung $G \leq cM$ gilt.

Aufgabe 9. Ein Gitterpunkt ist ein Punkt in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. Gegeben sei ein Vieleck, dessen Eckpunkte allesamt Gitterpunkte sind. Es sei bekannt, dass a Gitterpunkte im Inneren des Vielecks liegen, und b Gitterpunkte am Rand. Man beweise, dass der Flächeninhalt des Vielecks $a + \frac{b}{2} - 1$ ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Versuche, ein Muster in den letzten Ziffern von a_n zu erraten und dieses mit Induktion zu beweisen.

Aufgabe 2. Konstruiere eine Lösung schrittweise für Schachbretter der Größe $1, 2, 4, 8, \ldots$.

Aufgabe 3. Verwende starke Induktion und ziehe in jedem Schritt die größtmögliche Fibonaccizahl ab.

Aufgabe 4. Zeige, dass 2021 Münzen ausreichen, und beweise mit Hilfe von Induktion, dass weniger Münzen nicht genügen.

Aufgabe 5. Bestimme zunächst eine allgemeine Formel für die mögliche Anzahl von Kapellmitgliedern.

Aufgabe 6. Verwende Induktion nach der Anzahl der Würfel. Zeige für den Induktionsschritt, dass einer der Würfel sich mit höchstens $8(M-1)$ anderen Würfeln überschneidet.

Aufgabe 7. Zeige zunächst, dass $f(0) = 0$ und $f(-a) = f(a)$. Bestimme nun $f(n)$ für positive ganze Zahlen n induktiv. Es gibt im Wesentlichen drei verschiedene Lösungen.

Aufgabe 8. Verwende Induktion um zu zeigen, dass $G \leq \max(\max_i |x_i|, |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|)$. Folgere daraus, dass $G \leq 2M$.

Aufgabe 9. Beweise die Aussage zuerst für einfache Spezialfälle: Rechtecke, rechtwinkelige Dreiecke, allgemeine Dreiecke, ... und verwende schließlich Induktion nach der Zahl der Ecken.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Stephan Wagner, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es ist $a_1 = 22599$ und $a_2 = 782534990456559999$. Wir vermuten also, dass a_n auf $999\ldots9$ endet (2^n Neuner). Dies ist äquivalent dazu, dass $a_n \equiv -1 \mod 10^{2^n}$, bzw. dass $a_n = b_n \cdot 10^{2^n} - 1$ für eine ganze Zahl b_n gilt. Wir beweisen diese Aussage mit vollständiger Induktion: für $n = 0$ ist sie offensichtlich wahr.

Wenn wir nun für den Induktionsschritt annehmen, dass $a_n = b_n \cdot 10^{2^n} - 1$, dann folgt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3a_n^4 + 4a_n^3 \\
&= 3\big(b_n \cdot 10^{2^n} - 1\big)^4 + 4\big(b_n \cdot 10^{2^n} - 1\big)^3 \\
&= 3b_n^4 \cdot 10^{4\cdot 2^n} - 12b_n^3 \cdot 10^{3\cdot 2^n} + 18b_n^2 \cdot 10^{2\cdot 2^n} - 12b_n \cdot 10^{2^n} + 3 \\
&\qquad + 4b_n^3 \cdot 10^{3\cdot 2^n} - 12b_n^2 \cdot 10^{2\cdot 2^n} + 12b_n \cdot 10^{2^n} - 4 \\
&= 3b_n^4 \cdot 10^{4\cdot 2^n} - 8b_n^3 \cdot 10^{3\cdot 2^n} + 6b_n^2 \cdot 10^{2\cdot 2^n} - 1 \\
&= \big(3b_n^4 \cdot 10^{2^{n+1}} - 8b_n^3 \cdot 10^{2^n} + 6b_n^2\big) \cdot 10^{2^{n+1}} - 1,
\end{aligned}$$

was von der Form $a_{n+1} = b_{n+1} \cdot 10^{2^{n+1}} - 1$ ist. Damit ist die Aussage bewiesen, und wir wissen, dass die letzten $2^{10} = 1024$ Ziffern von a_{10} allesamt Neuner sind.

Aufgabe 2.

Wir bilden induktiv ein Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$, in dem jede Zeile und Spalte jede Zahl von 1 bis 2^n genau einmal enthält. Der Anfang für $n = 0$ ist einfach: wir schreiben 1 in die (linke untere) Ecke des unendlichen Schachbretts. Im Induktionsschritt bilden wir drei weitere Kopien des Schachbretts der Größe $2^n \times 2^n$, wobei bei zwei von ihnen alle Einträge um 2^n erhöht werden. Wir haben also zwei Schachbretter, die alle Werte von 1 bis 2^n in jeder Zeile und Spalte enthalten, und zwei, die alle Werte von $2^n + 1$ bis 2^{n+1} in jeder Zeile und Spalte enthalten. Wir fügen diese nun zu einem Brett der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ zusammen, wobei je zwei identische Teile einander diagonal gegenüberstehen. Damit haben wir nun ein Schachbrett, das in jeder Zeile und Spalte alle Zahlen von 1 bis 2^{n+1} enthält. Diesen Prozess führen wir nun unendlich weiter, womit das abgebildete Muster entsteht.

8	7	6	5	4	3	2	1
7	8	5	6	3	4	1	2
6	5	8	7	2	1	4	3
5	6	7	8	1	2	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5
3	4	1	2	7	8	5	6
2	1	4	3	6	5	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Dieses Muster erfüllt die gewünschte Bedingung.

Aufgabe 3.

Wir beweisen durch starke Induktion, dass jede positive ganze Zahl n eine solche Darstellung hat, und dass diese die größte Fibonaccizahl $\leq n$ enthalten muss. Für $n = 1$ ist dies trivial, da 1 selbst eine Fibonaccizahl ist. Für $n > 1$ nehmen wir an, dass jede positive Zahl $< n$ eine eindeutige Darstellung dieser Art hat. Sei F_k die größte Fibonaccizahl $\leq n$, d.h. $F_k \leq n < F_{k+1}$. Nach Induktionsannahme hat $n - F_k$ eine eindeutige Darstellung als Summe verschiedener Fibonaccizahlen (oder $n - F_k = 0$; in diesem Fall ist n selbst eine Fibonaccizahl, und wir haben bereits eine Darstellung). Es gilt $F_k \leq n < F_{k+1}$, also $0 \leq n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Daher enthält die Darstellung von $n - F_k$ nur Fibonaccizahlen, die kleiner als F_{k-1} sind. Somit können wir F_k zu der Darstellung hinzufügen und erhalten eine gültige Darstellung für n.

Für die Eindeutigkeit bleibt zu zeigen, dass es keine Darstellung ohne F_k gibt. Sei F_r die größte Fibonaccizahl in einer Darstellung; wenn wir diese entfernen, bleibt eine Darstellung von $n-F_r$ übrig. Da $n < F_{k+1}$ gilt, ist jedenfalls $r < k+1$. Wenn $r < k$, dann folgt $n-F_r \geq n-F_{k-1} \geq F_k-F_{k-1} = F_{k-2}$. Daher enthält die Darstellung von $n - F_r$ nach Induktionsannahme jedenfalls F_{k-2} oder F_{k-1} (keine größere Zahl, da $F_r < F_k$ als größtmöglich gewählt wurde). Daraus folgt (ebenso aufgrund der Maximalität von F_r), dass F_r ebenfalls F_{k-2} oder F_{k-1} ist. Also kommt in der ursprünglichen Darstellung von n entweder F_{k-2} oder F_{k-1} doppelt vor, oder beide kommen gleichzeitig vor. Beides ist ein Widerspruch. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

Aufgabe 4.

Die minimale Anzahl ist 2021. Zum Beispiel kann Adelheid gewinnen, indem sie alle Felder der letzten Zeile zu verbotenen Feldern erklärt, woraufhin 2020 Zeilen verbleiben. Danach werden noch genau 2020 Züge gemacht, unabhängig davon, wie die beiden spielen, denn jede Münze eliminiert genau eine Zeile und eine Spalte von der weiteren Verwendung. Damit hat Adelheid den letzten Zug.

Andererseits können wir zeigen, dass 2020 oder weniger verbotene Felder nicht ausreichen, egal wie diese ausgewählt werden. Wir zeigen allgemein mit vollständiger Induktion, dass Zyriak eine Gewinnstrategie auf einem $(2n-1) \times (2n-1)$-Schachbrett hat, wenn er als erster eine Münze setzt und nicht mehr als $2n - 2$ Felder verboten wurden. Dies ist für $n = 1$ trivial: Zyriak setzt eine Münze auf das einzige Feld und gewinnt.

Für den Induktionsschritt betrachten wir ein $(2n + 1) \times (2n + 1)$-Schachbrett mit höchstens $2n$ verbotenen Feldern. Wenn es irgendwo zwei verbotene Felder in derselben Zeile oder Spalte gibt, dann kann Zyriak in dieser Zeile bzw. Spalte eine Münze setzen. Dies ist möglich, weil es weniger verbotene Felder als Felder in einer Zeile bzw. Spalte gibt. Wenn es zumindest zwei verbotene Felder gibt, von denen jedoch keine zwei in derselben Zeile oder Spalte liegen, dann wählt Zyriak zwei von ihnen aus und setzt eine Münze auf den Schnittpunkt der Zeile des ersten verbotenen Feldes und der Spalte des zweiten verbotenen Feldes. Dies ist aufgrund der Annahme möglich, dass keine zwei verbotenen Felder in derselben Zeile oder Spalte liegen. Wenn schließlich nur ein Feld verboten ist, dann setzt Zyriak eine Münze in dieselbe Zeile oder Spalte, und wenn es gar keine verbotenen Felder gibt, dann ganz beliebig.

Nach Adelheids Zug können die Zeilen und Spalten, in die die beiden gesetzt haben, entfernt werden, da dort keine weiteren Münzen gesetzt werden können. Damit bleibt ein $(2n - 1) \times (2n - 1)$-Schachbrett übrig, und aufgrund der Strategie, die Zyriak bei der Wahl seines Zuges anwendet, bleiben höchstens $2n - 2$ verbotene Felder übrig (die Anzahl wird entweder um mindestens zwei reduziert, oder zu 0). Nach der Induktionsannahme hat Zyriak damit eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 5.

Die Antwort lautet 1000977. Wenn die Anzahl der Mitglieder der Kapelle gleich M ist, wobei M keine Quadratzahl ist, dann schickt Marjorie $\lceil \sqrt{M} \rceil$ Personen nach Hause, und es bleiben $M - \lceil \sqrt{M} \rceil$ Personen übrig. Durch Rückwärtsrechnen erhalten wir die Folge

$$0, 2, 5, 8, 12, 17, 22, 28, 34, 41, 48, 56, 65, 74, \ldots$$

möglicher Mitgliederzahlen, für die in keinem Schritt eine (positive) Quadratzahl entsteht. Die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Werten sind $2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, \ldots$. Wir erkennen, dass in dieser Folge alle ganzen Zahlen, die größer sind als 1, genau zweimal vorkommen, mit Ausnahme der Zweierpotenzen, die nur einmal auftauchen.

Damit kann man letztlich die folgende allgemeine Formel „erraten“: Marjories Methode führt immer irgendwann auf ein vollständiges Quadrat, außer die Anzahl der Mitglieder ist von der Form $M = (2^a+b)^2+2b+1$ (wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen sind, und $0 \le b < 2^a$) oder $(2^a+b)^2+2^a+3b+2$ (wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen sind, und $0 \le b < 2^a - 1$). In diesen beiden Fällen werden alle Mitglieder letztlich nach Hause geschickt.

Dies gilt für $M = 1$ (das weder von der Form $(2^a+b)^2+2b+1$ noch von der Form $(2^a+b)^2+2^a+3b+2$ ist), denn das einzige Mitglied bildet in diesem Fall ein 1×1-Quadrat, und auch für $M = 2$ (das die Form $M = (2^a + b)^2 + 2b + 1$ hat, wobei $a = b = 0$), denn in diesem Fall bilden die zwei Mitglieder ein unvollständiges 2×2-Quadrat und werden nach Hause geschickt.

Für den Induktionsschritt sei $M > 2$, und es sei $n = \lceil \sqrt{M} \rceil$ jene positive ganze Zahl, für die $(n-1)^2 < M \le n^2$ gilt. Dann stehen die M Mitglieder zunächst in einem $n \times n$-Quadrat, und wenn $M \ne n^2$, dann werden n von ihnen heimgeschickt. Es sei $n - 1 = 2^a + b$, wobei 2^a die größte Zweierpotenz $\le n-1$ ist, und $0 \le b < 2^a$. Wir behaupten nun, dass Marjories Methode irgendwann auf ein vollständiges Quadrat führt, außer wenn $M = (2^a+b)^2+2b+1$ oder $M = (2^a+b)+2^a+3b+2$ (Letzteres nur, falls $b < 2^a - 1$).

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $M \le n^2 - n + 1$. In diesem Fall gilt

$$(2^a + b - 1)^2 = (n-2)^2 \le M - n \le (n-1)^2 = (2^a + b)^2,$$

und nach Induktionsannahme erreichen wir genau dann nie ein vollständiges Quadrat, wenn $M - n = (2^a + b - 1)^2 + 2b - 1$ oder $M - n = (2^a + b - 1)^2 + 2^a + 3b - 1$. Erstere Gleichung ist äquivalent zu $M = (2^a + b - 1)^2 + 2^a + 3b$. Dies ist jedoch unmöglich, denn es folgt

$$M = (2^a + b - 1)^2 + 2^a + 3b = (2^a + b)^2 - (2^a - b - 1) \le (n-1)^2.$$

Die zweite Gleichung führt auf

$$M = (2^a + b - 1)^2 + 2^{a+1} + 4b = (2^a + b)^2 + 2b + 1,$$

was genau unserer Behauptung entspricht.

Nun betrachten wir den Fall, dass $M > n^2 - n + 1$. Dann ist $M - n > (n-1)^2$, und nach Induktionsannahme erreichen wir genau dann nie ein vollständiges Quadrat, wenn $M - n = (2^a + b)^2 + 2b + 1$ oder $M - n = (2^a + b)^2 + 2^a + 3b + 2$. Erstere Gleichung ist äquivalent zu

$$M = (2^a + b)^2 + 2^a + 3b + 2,$$

was wiederum genau der Behauptung entspricht. Jedoch muss $M \ne n^2$ gelten (da die Kapelle sonst sofort ein Quadrat bildet), wofür $b < 2^a - 1$ sein muss. Die zweite Möglichkeit führt auf

$$M = (2^a + b)^2 + 2^{a+1} + 4b + 3 = (2^a + b + 1)^2 + 2(b+1) > n^2,$$

was wiederum unmöglich ist.

Damit ist die Induktion abgeschlossen, und die Aussage bewiesen. Wir suchen nun noch die kleinste Zahl M, die größer als eine Million und von der Form $(2^a + b)^2 + 2b + 1$ or $(2^a + b)^2 + 2^a + 3b + 2$ ist. Dazu halten wir fest, dass $1000000 = 1000^2$ und $1000 = 2^9 + 488$ ist, also $a = 9$, $b = 488$, und $M = (2^9 + 488)^2 + 2 \cdot 488 + 1 = 1000977$.

Aufgabe 6.

Wir verwenden Induktion nach der Anzahl n der Würfel in der Menge. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen nun für $n > 1$ an, dass die Behauptung für $n - 1$ Würfel gilt. Sei nun Q ein Würfel in der Menge, der die kleinste Seitenlänge hat. Jeder andere Würfel, der Q schneidet, muss einen Eckpunkt von Q enthalten. Dies gilt, da in jeder der drei Dimensionen die entsprechenden Intervalle einander überlappen und das größere Intervall damit wenigstens einen Endpunkt des kleineren enthält. Wir verteilen nun die übrigen Würfel (also alle bis auf Q) so auf $8M - 7$ Teilmengen, dass keine dieser Teilmengen zwei Würfel enthält, die sich schneiden. Nach Induktionsannahme ist dies möglich. Jede Ecke von Q ist in höchstens $M - 1$ anderen Würfeln enthalten, daher schneidet Q höchstens $8(M - 1) = 8M - 8$ andere Würfel. Es enthält daher mindestens eine der Teilmengen keinen dieser Würfel, und wir können Q zu dieser Teilmenge hinzufügen. Damit ist die Induktion abgeschlossen.

Aufgabe 7.

Wir setzen zunächst $a = b = c = 0$ und erhalten $3f(0)^2 = 6f(0)^2$, also $f(0) = 0$. Als nächstes setzen wir $a = 0$ und $b = -c$, womit sich

$$f(b)^2 + f(-b)^2 = 2f(b)f(-b) \quad \Rightarrow \quad (f(b) - f(-b))^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(b) = f(-b)$$

ergibt. Also ist f eine gerade Funktion, und wir können anstelle von $c = -a - b$ im Folgenden $c = a + b$ verwenden:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(a+b)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(a+b) + 2f(a+b)f(a). \tag{1}$$

Falls $f(p) = 0$ für eine ganze Zahl $p > 0$ gilt, dann setzen wir $b = p$ und erhalten

$$f(a)^2 + f(a+p)^2 = 2f(a+p)f(a) \quad \Rightarrow \quad (f(a+p) - f(a))^2 = 0,$$

also $f(a + p) = f(a)$. Mit anderen Worten, in diesem Fall ist f periodisch mit Periode p.

Es sei zunächst $f(1) = 0$. In diesem Fall ist die Periodenlänge 1 und damit $f(n) = 0$ für alle n. Wir nehmen daher in weiterer Folge an, dass $f(1) = K \neq 0$. Wir setzen $a = b = 1$ in (1) und erhalten $f(2)^2 = 4Kf(2)$, damit entweder $f(2) = 0$ oder $f(2) = 4K$. In gleicher Weise erhalten wir für $a = b = 2$ die Gleichung $f(4)^2 = 4f(2)f(4)$, also entweder $f(4) = 0$ oder $f(4) = 16K$. Nun unterscheiden wir drei Fälle.

- Fall 1: $f(2) = 0$. In diesem Fall hat die Funktion f Periode 2, also $f(2n) = f(0) = 0$ und $f(2n+1) = f(1) = K$. Man prüft leicht nach, dass die Funktionalgleichung damit tatsächlich erfüllt ist.

- Fall 2: $f(2) \neq 0$, aber $f(4) = 0$. In diesem Fall hat die Funktion f Periode 4, also $f(4n) = f(0)$, $f(4n + 1) = f(1) = K$, $f(4n + 2) = f(2) = 4K$ und $f(4n + 3) = f(-1) = f(1) = K$. Auch in diesem Fall kann man prüfen, dass die Funktionalgleichung tatsächlich erfüllt ist.

- Fall 3: $f(2) = 4K \neq 0$ und $f(4) = 16K \neq 0$. Wir zeigen in diesem Fall, dass $f(n) = Kn^2$. Für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 4$ gilt dies nach Annahme. Für alle weiteren positiven ganzen Zahlen zeigen wir dies durch Induktion (für negatives n folgt es dann, weil die Funktion gerade ist).

  Wir verwenden als Induktionsannahme, dass $f(k) = Kk^2$ für $0 \leq k \leq 2n$ und auch $k = 2n+2$ (was wir für $n = 1$ bereits wissen). Im Induktionsschritt haben wir zu zeigen, dass die Gleichung auch für $k = 2n+1$ und $k = 2n+4$ gilt. Wir setzen in (1) nun $a = 1$ und $b = 2n$ bzw. $a = 1$ und $b = 2n+1$ und erhalten damit

  $$\begin{aligned} f(1)^2 + f(2n)^2 + f(2n+1)^2 &= 2f(1)f(2n) + 2f(1)f(2n+1) + 2f(2n)f(2n+1), \\ f(1)^2 + f(2n+1)^2 + f(2n+2)^2 &= 2f(1)f(2n+1) + 2f(1)f(2n+2) + 2f(2n+1)f(2n+2). \end{aligned}$$

  Wir subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander und verwenden dann die Induktionsannahme:

  $$\begin{aligned} f(2n+2)^2 - f(2n)^2 &= 2(f(1) + f(2n+1))(f(2n+2) - f(2n)), \\ \big(K(2n+2)^2\big)^2 - \big(K(2n)^2\big)^2 &= 2(K + f(2n+1))\big(K(2n+2)^2 - K(2n)^2\big), \\ 16K^2\big((n+1)^4 - n^4\big) &= 8K(K + f(2n+1))\big((n+1)^2 - n^2\big), \\ 2K\big((n+1)^2 + n^2\big) &= K + f(2n+1), \\ K(4n^2 + 4n + 2) &= K + f(2n+1), \end{aligned}$$

  also $f(2n+1) = K(4n^2 + 4n + 1) = K(2n+1)^2$. Außerdem ist nach Induktionsannahme $f(n+3) \neq f(n+1) = f(-n-1)$. Daher kann die Funktion nicht Periode $2n+4$ haben, es gilt also $f(2n+4) \neq 0$. Setzen wir nun in (1) $a = b = n+2$, dann folgt

  $$f(2n+4)^2 = 4f(n+2)f(2n+4),$$

  damit entweder $f(2n+4) = 0$ (was wir bereits ausgeschlossen haben) oder $f(2n+4) = 4f(n+2) = 4K(n+2)^2 = K(2n+4)^2$. Damit ist die Induktion abgeschlossen.

Es gibt letztlich also drei Familien von Lösungen:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade}, \\ K & n \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad f(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \mod 4, \\ 4K & n \equiv 2 \mod 4, \\ K & n \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad f(n) = Kn^2.$$

Die konstante Lösungsfunktion ergibt sich als Spezialfall $K = 0$ in jeder der drei Familien.

Aufgabe 8.

Wenn die gegebenen Zahlen (zum Beispiel) 1, -1, 2 und -2 sind, dann würde Gerda etwa mit der Folge $1, -2, 2, -1$ den Preis $M = 1$ erzielen. Gustav dagegen würde mit seiner Methode etwa die Folge $1, -1, 2, -2$, erhalten, womit $G = 2$. Also ist c mindestens gleich 2. Wir zeigen nun, dass tatsächlich immer $G \leq 2M$ gilt, also $c = 2$.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Zahlen, die Gerda und Gustav zur Verfügung haben. Gerda ordnet sie in der Reihenfolge $m_1, m_2, \ldots, m_n$ an, Gustav dagegen in der Reihenfolge $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Weiters sei $X = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ der größte Absolutbetrag der gegebenen Zahlen, und $S = |x_1 + \cdots + x_n|$ der Absolutbetrag der Summe.

Zunächst bestimmen wir eine untere Schranke für Gerda. Klarerweise ist

$$|m_1 + \cdots + m_n| = |x_1 + \cdots + x_n| = S,$$

also $M \geq S$. Wenn wir weiters einen Index i betrachten, für den $|m_i| = X$ ist, dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$X = \big|(m_1 + \cdots + m_i) - (m_1 + \cdots + m_{i-1})\big| \leq \big|m_1 + \cdots + m_i\big| + \big|m_1 + \cdots + m_{i-1}\big| \leq M + M = 2M,$$

also $M \geq X/2$.

Nun beweisen wir eine obere Schranke für Gustav. Setze $h_i = g_1 + \cdots + g_i$. Wir beweisen mittels Induktion, dass $|h_i| \leq \max(X, S)$. Für $i = 1$ ist dies erfüllt, denn $|h_1| = |g_1| \leq X \leq \max(X, S)$. Außerdem ist klar, dass $|h_n| = S \leq \max(X, S)$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $|h_{i-1}| \leq \max(X, S)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Fall 1: die Zahlen $g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$ sind entweder alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv. In diesem Fall ist $h_{i-1}, h_i, \ldots, h_n$ eine monotone Folge (entweder schwach monoton steigend oder schwach monoton fallend). Daher liegen die Absolutbeträge aller dieser Zahlen zwischen jenen von h_{i-1} und h_n, also insbesondere

$$|h_i| \leq \max(|h_{i-1}|, |h_n|) \leq \max(X, S)$$

  nach Induktionsannahme und der Tatsache, dass $|h_n| = S$.

- Fall 2: unter den Zahlen $g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$ kommen sowohl positive als auch negative Werte vor. Das bedeutet, dass Gustav im i-ten Schritt eine Zahl zur Verfügung hat, deren Vorzeichen nicht mit dem von h_{i-1} übereinstimmt. Wenn er diese Zahl x auswählt, dann erhält er einen Wert $h_{i-1} + x$, dessen Absolutbetrag nicht größer als $\max(|h_{i-1}|, |x|)$ ist. Also gilt

$$|h_i| \leq |h_{i-1} + x| \leq \max(|h_{i-1}|, |x|) \leq \max(X, S)$$

  nach Induktionsannahme und der Tatsache, dass $|x| \leq X$.

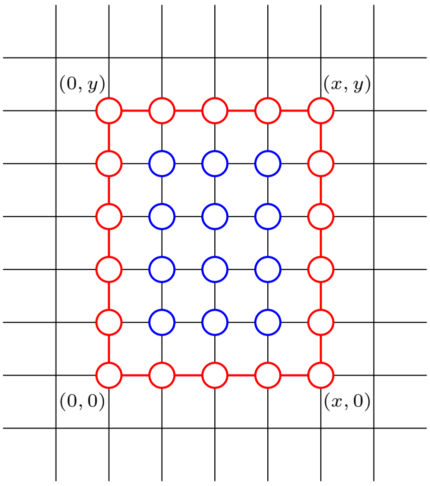
In beiden Fällen gilt die Ungleichung $|h_i| \leq \max(X, S)$, die Induktion ist also abgeschlossen. Es gilt somit

$$G \leq \max(X, S) \leq \max(2M, M) = 2M,$$

und die gewünschte Ungleichung ist bewiesen.

Aufgabe 9.

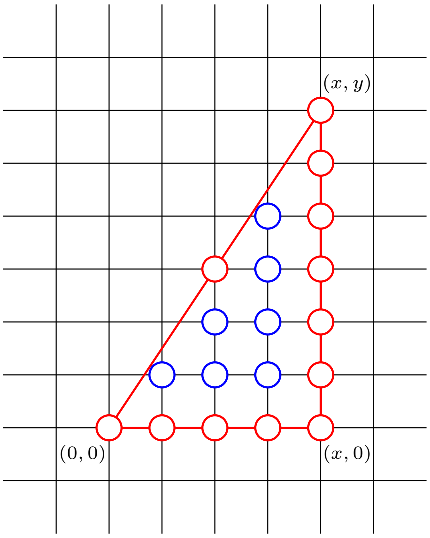
Wir beginnen mit dem einfachsten Spezialfall: ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.



Es seien (oBdA) $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$ und (x,y) die Ecken des Rechtecks. Dann ist der Flächeninhalt $F = xy$, die Anzahl der Punkte im Inneren ist $a = (x-1)(y-1)$, und die Anzahl der Punkte am Rand ist $b = 2(x+y)$. Tatsächlich gilt damit

$$F = xy = (x-1)(y-1) + \frac{2(x+y)}{2} - 1 = a + \frac{b}{2} - 1.$$

Als nächstes betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(x,0)$ und (x,y).



Die Anzahl der Gitterpunkte auf den beiden Katheten ist $x + y + 1$; auf der Diagonale liegen $\mathrm{ggT}(x,y) - 1$ (ohne die beiden Enden). Daher ist

$$b = x + y + \mathrm{ggT}(x,y).$$

Als nächstes betrachten wir die Gitterpunkte im Inneren. Wir wissen bereits, dass es $(x-1)(y-1)$ Punkte im Inneren des entsprechenden Rechtecks gibt. Wir subtrahieren die Punkte auf der Diagonalen (die nicht im Inneren des Dreiecks liegen) und dividieren durch 2:

$$a = \frac{(x-1)(y-1) - \mathrm{ggT}(x,y) + 1}{2}.$$

Wieder folgt, dass

$$a + \frac{b}{2} - 1 = \frac{xy}{2}$$

gleich der Fläche des Dreiecks ist. Dabei war es eigentlich irrelevant, wie viele Punkte auf der Diagonale liegen, denn die Anzahl kürzt sich ohnehin! Damit kommen wir zur Hauptidee unseres Beweises.

Betrachte zwei Vielecke P_1 und P_2 mit einer gemeinsamen Seite, wie in der Abbildung. Ihre Vereinigung ist ein neues Vieleck P. Es seien a_1 und a_2 die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren der beiden Vielecke, und b_1 und b_2 die Anzahl der Gitterpunkte am jeweiligen Rand. Wenn die beiden Vielecke x gemeinsame Gitterpunkte haben (die beiden Enden der gemeinsamen Seite ausgenommen), dann ist die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von P

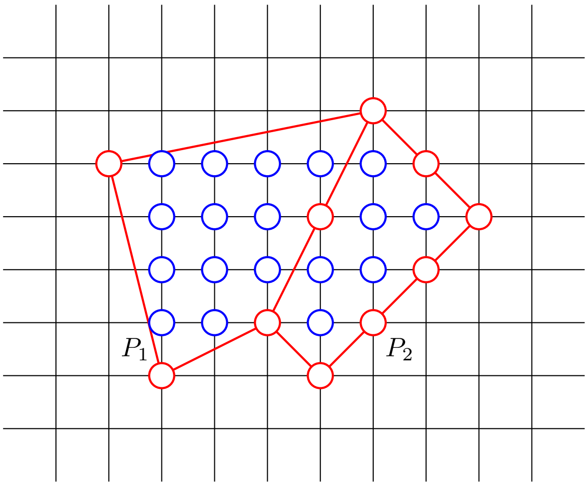
$$a = a_1 + a_2 + x,$$

und die Anzahl der Gitterpunkte am Rand ist

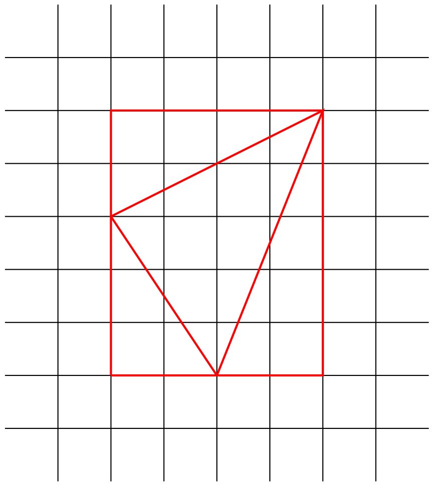
$$b = b_1 + b_2 - 2x - 2.$$

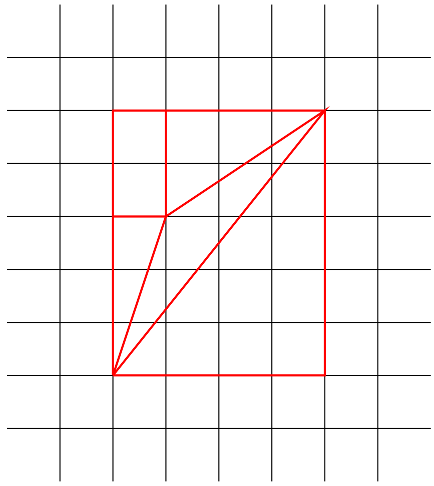
Somit ist

$$a + \frac{b}{2} - 1 = \left(a_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) + \left(a_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right).$$

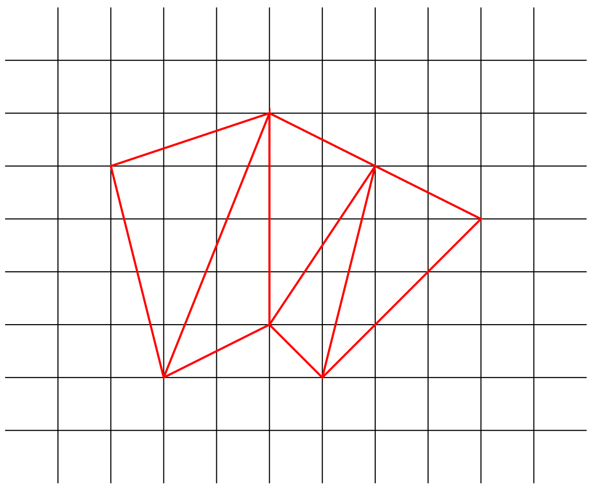


Wir stellen also fest: wenn die Gleichung $F = a + \frac{b}{2} - 1$ für P_1 und P_2 gilt, dann auch für das zusammengesetzte Vieleck P. Dieses Argument gilt auch umgekehrt: wenn die Gleichung für P und P_1 gilt, dann auch für P_2.





Wir wissen bereits, dass die Gleichung für Rechtecke (deren Seiten auf den Gitterlinien liegen) und rechtwinklige Dreiecke (deren Katheten auf den Gitterlinien liegen) gilt. Damit können wir zeigen, dass sie für beliebige Dreiecke gilt, denn wir können jedes Dreieck mit einem Rechteck umschreiben, sodass die verbleibenden Teile Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke sind, wie in der Abbildung.



Schließlich kann jedes beliebige Vieleck in Dreiecke unterteilt werden (Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Ecken), und damit folgt der allgemeine Satz induktiv.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Turnier der Städte; entnommen aus: [1], Kapitel 8, Aufgabe 13.

Aufgabe 2.

Turnier der Städte 1988; entnommen aus: [1], Kapitel 8, Aufgabe 32.

Aufgabe 3.

Bekannt als Satz von Zeckendorf, `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Zeckendorf`; entnommen aus: [1], Kapitel 8, Aufgabe 29.

Aufgabe 4.

Südafrikanische Mathematikolympiade 2017, Finalrunde Senior, Aufgabe 4.

Aufgabe 5.

Südafrikanische Mathematikolympiade 2020, Finalrunde Senior, Aufgabe 6.

Aufgabe 6.

Schwedische Mathematikolympiade 2020, Finalrunde, Aufgabe 6.

Aufgabe 7.

IMO 2012, Aufgabe 4.

Aufgabe 8.

IMO Shortlist 2014, Aufgabe A3.

Aufgabe 9.

Bekannt als Satz von Pick, `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pick`.

Literatur

[1] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.