

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Schriftliche Online-Prüfung, 14.6.2021

Pro Aufgabe sind 8 Punkte zu erreichen, insgesamt also 48. Ist m die erzielte Punktezahl zuzüglich Ihrer Bonuspunkte für die Samstag-Blöcke und $n = \min(m, 48)$, so gilt der folgende Notenschlüssel:

- $n < 24 \Rightarrow$ Note: 5
- $24 \leq n < 30 \Rightarrow$ Note: 4
- $30 \leq n < 36 \Rightarrow$ Note: 3
- $36 \leq n < 42 \Rightarrow$ Note: 2
- $42 \leq n \leq 48 \Rightarrow$ Note: 1

Bitte schreiben Sie leserlich mit einem dunklen Stift auf einem weißen (nicht-linierten und nicht-karierten) Papier! Gestalten Sie Ihre Berechnungen und Argumentationen so, dass sie gut nachvollziehbar sind!

1.) Sei V der reelle Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a + b \sin(2x) + c \cos(2x) \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$ ist!
- (ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von $\frac{d}{dx}$ bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto \sin(2x), x \mapsto \cos(2x))$.

2.) A, B und C seien 2×2 -Matrizen über \mathbb{C} .

- (i) Die Determinante von A ist gleich 6, die Spur von A ist gleich 5. Was weiß man dann über die Eigenwerte von A ? Begründen Sie!
- (ii) Ein Eigenwert von B ist gleich 0, ein Eigenwert von B ist $\neq 0$. Kann B diagonalisierbar sein? Kann B nicht-diagonalisierbar sein? Begründen Sie!
- (iii) C ist diagonalisierbar und besitzt 3 als einzigen Eigenwert. Was weiß man dann über C ? Begründen Sie!

3.) Gegeben sind vier Vektoren im \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist!
- (ii) Entwickeln Sie \mathbf{a} in diese Basis, *ohne* ein Gleichungssystem zu lösen!

4.) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x - y^2 + 4y - 7$$

und bezeichnen Sie die Niveaulinie von f zum Niveau c mit N_c .

- (i) Skizzieren Sie die Niveaulinie N_0 in einem xy -Koordinatensystem. Um welchen Kurventyp handelt es sich?
- (ii) Überprüfen Sie, ob der Punkt $P = (3, 2)$ auf N_0 liegt. Falls ja, untersuchen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob sich N_0 in einer Umgebung des Punktes P als Graph einer Funktion $x \mapsto y(x)$ darstellen lässt!
- (iii) Klären Sie die Frage in (ii) graphisch anhand Ihrer Skizze und begründen Sie Ihre Antwort.
- (iv) Vervollständigen Sie die Zuordnungsvorschrift $t \mapsto \gamma(t)$, sodass γ eine Parametrisierung der Niveaulinie N_0 ist:

$$\gamma : ? \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} ? \\ t \end{pmatrix}$$

5.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch entsprechende mathematische Überlegungen:

- (i) Ist f stetig in $(0, 0)$?
- (ii) Ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie $\text{grad}f(0, 0)$.
- (iii) Besitzt der Graph von f bei $(0, 0)$ eine Tangentialebene?
- (iv) Besitzt f ein globales Maximum?

6.) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}$$

und der Normalbereich

$$B := [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 1]$$

- (i) Skizzieren Sie B .
- (ii) Lässt sich \mathbf{F} als Gradient eines Skalarfeldes schreiben? Falls ja, geben Sie ein entsprechendes Skalarfeld an.
- (iii) Verwenden Sie den Satz von Gauß, um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

- (iv) Haben Sie bei der Berechnung des Integrals noch einen weiteren Satz der mehrdimensionalen Analysis verwendet? Falls ja, benennen Sie diesen.