Technische Universität Dresden

Skript:

Zeitreihenanalyse

Verfasser Franziska Kühn

Daten Dr. Anita Behme
Wintersemester 2013/14
Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Stationarität **5**

3 Reduktion von Zeitreihen auf stationäre Zeitreihen **9**

4 Die Autokovarianzfunktion eines schwach stationären Prozesses **12**

5 Lineare Prozesse **16**

6 Spektraldarstellung einer schwach stationären Zeitreihe **23**

7 Schätzen von Erwartungswerten und Autokovarianzfunktionen stationärer Prozessen **35**

8 Schätzen der Spektraldichte **41**

Stichwortverzeichnis **50**

1 Einführung

Literatur:

- Brockwell/Davis: Time series analysis
- Kreiss/Neuaus: Zeitreihenanalyse

1.1 Definition Eine Zeitreihe ist ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$, d.h. eine Familie von Zufallsvariablen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.2 Bemerkung (i). Oft wird unter „Zeitreihe“ auch die Beobachtungsfolge $(x_t)_{t\in T}$ verstanden (eigentlich der Pfad eines stochastischen Prozesses).

(ii). T ist eine Menge von Zeitpunkten, d.h. z.B. $T = \mathbb{N}$, $T = \mathbb{Z}$, $T = \{t_i; i = 1, \ldots, n\}$ (diskret) oder $T = \mathbb{R}$, $T = [a, b]$ (stetig). Auch allgemeiner möglich, hier immer $T \subseteq \mathbb{R}$, meist $T \subseteq \mathbb{Z}$.

(iii). Zeitreihen können reell- oder komplexwertige Zufallsvariablen sein.
Beachte: Eine diskrete Zeitreihe kann auch dadurch zu Stande kommen, dass

- aus einer stetigen Zeitreihe in (gleichen) Zeitabständen Werte abgelesen oder nur Minima/Maxima abgelesen werden.
- summierte oder gemittelte Werte betrachtet werden.

Ziele der Zeitreihenanalyse:

(i). Beschreibung/Charakterisierung (Saisoneffekte, Trend, Ausreißer, Periodizität,. . .)

(ii). Konstruktion bzw. Wahl eines geeigneten Modells (Modellierung der Abhängigkeit in der Zeit durch Beschreiben der mehrdimensionalen Verteilungen der Zeitreihen)

(iii). Schätzen der Modellparameter

(iv). Treffen von Vorhersagen

1.3 Beispiel (i). zufällige Schwingung:

$$X_t(\omega) = A(\omega) \cdot \cos(\Lambda(\omega) \cdot t + \Phi(\Omega)), \qquad 0 \leq t \leq T$$

mit $A : \Omega \to (0, \infty)$ Amplitude, $\Lambda : \Omega \to [0, \infty)$ Frequenz und $\Phi : \Omega \to [0, 2\pi)$ Phase. Vorsicht: Man beobachtet im Allgemeinen nur eine Realisierung, d.h. es sind keine Aussagen über die Verteilung der Zufallsvariablen möglich.

(ii). Binärer Prozess (Münzwurf): $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_t \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, $t \in \mathbb{N}$.

(iii). Irrfahrt:

$$S_t := \sum_{i=1}^{t} X_i, \qquad t \in \mathbb{N}$$

wobei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ iid. Beacht: $S_t = S_{t-1} + X_t$ mit $S_{t-1} \perp\!\!\!\perp X_t$.

(iv). Verzweigungsprozess (Modellierung von Bevölkerungswachstum). Spezialfall: Galton-Watson-Prozess.

$$X_0 = x \qquad \text{Populationsgröße der 0-ten Generation}$$
$$X_{t+1} := \sum_{j=1}^{X_t} Z_{t,j} \qquad \text{Populationsgröße der } (t+1)\text{-ten Generation}$$

wobei $(Z_{t,j})_{t\in\mathbb{N}_0, j\in\mathbb{N}}$ iid mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

Ausblick auf die Vorlesung:

2 Stationarität

3 Reduktion von Zeitreihen auf stationäre Zeitreihen

4 Autokovarianzfunktion einer Zeitreihe

5 Lineare Modelle

>5 Statistik oder spektralanalytische Methoden

2

Stationarität

In diesem Kapitel: $(X_t)_{t\in T}$ Zeitreihe mit Indexmenge $T \subseteq \mathbb{R}$. Für einfachere Notation ist X_t hier eindimensional (der mehrdimensionale Fall läuft analog).

2.1 Definition X heißt strikt stationär (stationär im engeren Sinne), falls

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

für alle $t_1, \dots, t_n \in T$, $h \in \mathbb{R}$ mit $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$.

2.2 Bemerkung Ist X strikt stationär, so existiert eine Verteilungsfunktion F mit $X_t \sim F$ für alle $t \in T$.

2.3 Definition Sei X ein stochastischer Prozess mit $X_t \in L^2(\mathbb{P})$ für alle $t \in T$. Dann heißt

$$\gamma_X(r,s) := \operatorname{cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}((X_r - \mathbb{E}X_r) \cdot (X_s - \mathbb{E}X_s)), \qquad r, s \in T,$$

die Autokovarianzfunktion von X.

2.4 Definition X heißt schwach stationär (stationär im weiteren Sinne), falls

(i). $\forall t \in T : X_t \in L^2(\mathbb{P})$

(ii). $\exists \mu \in \mathbb{R} \forall t \in T : \mathbb{E}X_t = \mu$

(iii). $\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r+h, s+h)$ für alle $r, s \in T$, $h \in \mathbb{R}$ mit $r+h, s+h \in T$.

2.5 Bemerkung Für einen schwach stationären Prozess $(X_t)_{t\in T}$ gilt

$$\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r-s, 0)$$

Man definiert daher

$$\gamma_X(s) := \gamma_X(s,0) = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+s})$$

für alle $s, t \in T$ mit $t + s \in T$. γ_X heißt Autokovarianzfunktion von X.

2.6 Bemerkung Wenn X strikt stationär ist mit $X_t \in L^2$, dann ist X schwach stationär. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

2.7 Beispiel $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} X_t &\sim \operatorname{Exp}(1) & t \mod 2 = 1 \\ X_t &\sim N(1,1) & t \mod 2 = 0 \end{aligned}$$

mit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ unabhängig. Offenbar gilt $\mathbb{E}X_t = 1$, $\mathbb{V}X_t = 1$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = 0$ für alle $t \neq s$, also

$$\gamma_X(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Aber X ist offenbar nicht strikt stationär.

2.8 Definition X heißt Gauß-Prozess, falls alle endlich-dimensionalen Verteilungen von X (multivariat) normal sind.

2.9 Bemerkung Sei X ein Gauß-Prozess. Dann ist X durch Erwartungswerte und Autokovarianzfunktion vollständig festgelegt. Ist X schwach stationär, so ist X daher auch strikt stationär.

2.10 Beispiel (i). $X_t = A \cdot \cos(\Lambda \cdot t + \Phi)$, $t \in \mathbb{Z}$, wie in 1.3(i) mit $\Lambda > 0$.

(1) X ist im Allgemeinen nicht stationär (z.B. A, Λ, Φ deterministisch).

(2) X ist schwach stationär, falls A, Λ, Φ unabhängig sind, $\Phi \sim U([0, 2\pi))$ und $A \in L^2(\mathbb{P})$.

Beweis: Aus der Unabhängigkeit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t &= \mathbb{E}(A \cdot \cos(\Lambda \cdot t + \Phi)) \\
&= \mathbb{E}(A) \cdot \mathbb{E}\cos(\Lambda \cdot t + \Phi) \\
&= \mathbb{E}(A) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\cos(\Lambda \cdot t + \Phi) \mid \Lambda)) \\
&= \mathbb{E}(A) \cdot \mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\cos(\lambda \cdot t + \Phi)}_{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\lambda \cdot t + \varphi)\, d\varphi = 0} \Bigg|_{\lambda = \Lambda} \Bigg) = 0
\end{aligned}$$

Analog erhält man wegen $\mathbb{E}X_t = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_t, X_s) &= \mathbb{E}(X_t \cdot X_s) \\
&= \mathbb{E}(A^2) \cdot \mathbb{E}\big(\cos(\Lambda \cdot t + \Phi) \cdot \cos(\Lambda \cdot s + \Phi)\big) \\
&= \mathbb{E}(A^2) \cdot \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\cos((t-s) \cdot \Lambda) + \cos((t+s) \cdot \Lambda + 2\Phi)\right) \\
&= \mathbb{E}(A^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\cos((t-s) \cdot \Lambda)
\end{aligned}$$

Dabei benutzt:

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \qquad \square$$

(ii). Sei $S_t = \sum_{i=1}^t X_i$, $t \in \mathbb{N}$, mit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid. $(S_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist nicht (schwach) stationär (falls $X_i \neq 0$), da

$$\mathbb{E}S_t = t \cdot \mathbb{E}X_1$$

und

$$\mathbb{V}S_t = t \cdot \mathbb{V}S_1$$

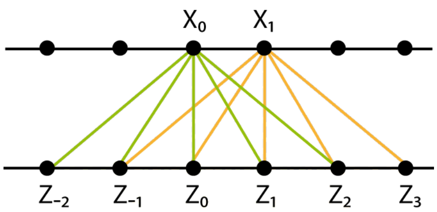
2.11 Definition Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Folge reellwertiger deterministischer Koeffizienten. Dann heißt

$$X_t := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

ein moving average (gleitendes Mittel).

Beispiel Ein einfaches Beispiel für einen moving average:

$$\psi_j := \begin{cases} 0 & |j| \geq 3 \\ \frac{1}{10} & |j| = 2 \\ \frac{1}{5} & |j| = 1 \\ \frac{2}{5} & j = 0 \end{cases}$$



2.12 Lemma

Sei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), sodass

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$$

Dann gilt:

(i). Falls $\sup_t \mathbb{E}|Z_t| < \infty$, dann konvergiert $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}$ absolut mit Wahrscheinlichkeit 1.

(ii). Falls zusätzlich $\sup_t \mathbb{E}(|Z_t|^2) < \infty$, dann konvergiert die Reihe in L^2 (gegen denselben Grenzwert).

Beweis: (i). Wegen monotoner Konvergenz gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j \cdot Z_{t-j}|\right) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\sum_{j=-n}^{n} |\psi_j| \cdot |Z_{t-j}|\right)\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=-n}^{n} |\psi_j| \cdot \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}|Z_t|\end{aligned}$$

also $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j \cdot Z_{t-j}| < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

(ii). Seien $m > n > 0$, dann folgt mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=-m}^{m} \psi_j \cdot Z_{t-j} - \sum_{j=-n}^{n} \psi_j \cdot Z_{t-j}\right|^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{n<|j|\le m} \psi_j \cdot Z_{t-j}\right|^2\right)\\ &\le \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Z_t|^2) \cdot \sum_{n<|j|\le m} |\psi_j|^2\end{aligned}$$

d.h. die Folge ist eine $L^2(\mathbb{P})$-Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{P})$ folgt die Behauptung; insbesondere existiert eine Teilfolge, die fast sicher konvergiert und damit folgt die Gleichheit der Grenzwerte (Satz von Riesz-Fischer). *Alternativ: Beweis in (i) mit Parseval'scher Gleichung.*

□

2.13 Lemma

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein moving average mit $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$, $\mathbb{E}Z_t = \mu$ und $\mathbb{V}(Z_t^2) = \sigma^2 < \infty$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

(i). Falls die Z_t unkorreliert sind, so ist X schwach stationär.

(ii). Sind die Z_t iid, so ist X strikt stationär.

Beweis: (i). Mit dominierter Konvergenz folgt:

$$\mathbb{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \psi_j \cdot \mathbb{E}(Z_{t-j}) = \mu \cdot \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j < \infty$$

d.h. ist unabhängig von t. Zudem

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot (Z_{t+h-j} - \mu)\right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \cdot (Z_{t-k} - \mu)\right)\right]\\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \psi_k \cdot \mathbb{E}((Z_{t+h-j} - \mu) \cdot (Z_{t-k} - \mu))\\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \psi_k \cdot \delta_{k,j-h}\\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \psi_{j+h} < \infty\end{aligned}$$

Folglich ist X schwach stationär.

(ii). Sind die Z_t iid, so ändert ein Verschieben nichts an der Verteilung. Also ist X strikt stationär. $\square$

Anschauliche Interpretation von Stationarität: Die Zeitreihe zeigt sich im stochastischen Gleichgewicht, d.h.

- Teilabschnitte von Pfaden „sehen ähnlich aus".
- Fluktuationen sind rein zufällig.

Insbesondere ist eine Zeitreihe *nicht* stationär, wenn

- das mittlere Niveau nicht konstant ist.
- die mittlere Größe der Fluktuationen nicht konstant ist.

Viele nicht-stationäre Zeitreihen können jedoch auf stationäre Zeitreihen zurückgeführt werden.

3

Reduktion von Zeitreihen auf stationäre Zeitreihen

Ein Plot der Zeitreihe gibt Hinweise auf

- Trend
- saisonale Abhängigkeit
- Wendepunkte/Wechsel im Modell
- Ausreißer

Im Fall von Wendepunkten macht es Sinn die Zeitreihe in homogene Abschnitte zu zerteilen und diese getrennt zu betrachten. Ausreißer können, sofern dies begründbar ist, eliminiert werden. Die meistgenutzte Modellvorstellung einer Zeitreihe mit Trend und Saisonkomponente ist

$$X_t = T_t + S_t + Z_t, \qquad t \in T$$

mit

- T_t: Trendkomponente
- S_t: Saisonkomponente mit bekannter Periode d
- Z_t: zufällige Fluktuation (stationär)

Wir wollen die determinstischen Funktionen T_t und S_t schätzen und eliminieren. Hierzu im Folgenden einige exemplarische Möglichkeiten:

(1) Bestimme T_t im Modell

$$X_t = T_t + Z_t, \qquad t \in T$$

mit o.B.d.A. $\mathbb{E}Z_t = 0$. Verschiedene Möglichkeiten:

(i) kleinste Quadrate-Schätzung: Oft macht es Sinn, T_t parametrisch zu modellieren, z.B. als Polynom.

$$T_t = \sum_{j=0}^{r} a_j \cdot t^j, \qquad r \in \mathbb{N}_0$$

für $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$. Die Parameter können dann mittels kleinste Quadrate-Schätzung bestimmt werden.

(ii) Moving average (für $T = \{1, \dots, n\}$): Für $q \in \mathbb{N}$ definiere das zweiseitige moving average

$$W_t := \frac{1}{2q+1} \cdot \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}$$

Dann gilt für $q + 1 \leq t \leq n - q$,

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} T_{t+j} + \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} Z_{t+j} \approx T_t$$

sofern T_t approximierbar linear in $[t-q, t+q]$. Also $\hat{T} = W_t$ ist Schätzer für T_t.

(iii) Differenzenbildung: Definiere den Backshiftoperator $BX_t := X_{t-1}$ und den Differenzoperator

$$\nabla X_t := X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1-B)X_t$$

Potenzen von B und ∇ sind iterativ definiert

$$B^j X_t = X_{t-j} \qquad \nabla^j X_t := \nabla(\nabla^{j-1} X_t) \quad \nabla^0(X_t) := X_t$$

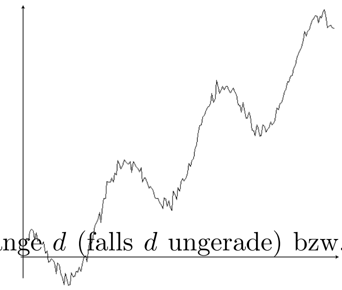
Polynome in B und ∇ können wie reguläre Polynome behandelt werden, z.B.

$$\nabla^2 X_t = (1-B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2) X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Wird ∇ auf einen linearen Trend angewendet, d.h. $T_t = a \cdot t + b$, erhält man $\nabla T_t = a$. Analog kann jeder polynomieller Trend vom Grad k durch ∇^k zu einer Konstanten reduziert werden. Für $X_t = T_t + Z_t$ mit $T_t = \sum_{j=0}^k a_j \cdot t^j$, Z_t stationär mit $\mathbb{E} Z_t = 0$, erhält man

$$\nabla^k X_t = k! \cdot a_k + \nabla^k Z_t$$

und somit ist $(\nabla^k X_t)_{t \in T}$ ein stationärer Prozess mit $\mathbb{E}(\nabla^k X_t) = k! \cdot a_k$.



(2) Eliminiere Trend- und Saisonkomponente im Modell

$$X_t = T_t + S_t + Z_t, \qquad t = 1, \ldots, n$$

mit $\mathbb{E} Z_t = 0$, $S_{t+d} = S_t$ und $\sum_{j=0}^d S_j = 0$.

(i) Moving average:

(a) Schätze Trend durch einen Movering average der Länge d (falls d ungerade) bzw. $d+1$ (falls d gerade):

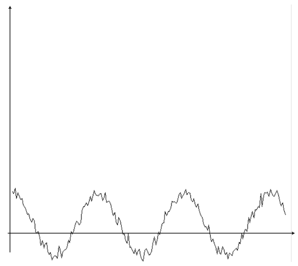
$$\hat{T}_t = \frac{1}{d} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}, \qquad d = 2q+1, q+1 \le t \le n-q$$

(für d ungerade) bzw.

$$\hat{T}_t = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{2} X_{t-q} + \sum_{j=-q+1}^{q-1} X_{t+j} + \frac{1}{2} X_{t+q} \right), \qquad d = 2q, q+1 \le t \le n-q$$

(b) Schätze Saisonkomponente: Für jedes $k = 1, \dots, d$ berechne W_k als arithmetisches Mittel (über j) von

$$(X_{k+j\cdot t} - \hat{T}_{k+j\cdot d}), \qquad q < k + j \cdot d \leq n - q$$



W_k ist möglicher Schätzer für S_k, erfüllt jedoch nicht $\sum_{k=1}^{d} W_k = 0$. Setze daher

$$\hat{S}_k := W_k - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} W_k, \quad k = 1, \dots, d$$

$$\hat{S}_k = \hat{S}_{k-j\cdot d}, \qquad k > d$$

Die desaisonalisierten Daten sind dann $D_t = X_t - \hat{S}_t$. Die geschätzten Residuen sind $\hat{Z}_t = X_t - \hat{S}_t - \hat{T}_t$, $t = 1, \dots, n$.

(ii) Kleine-Trend-Methode: Annahme: Trendkomponente T_j konstant über jede volle Periode der Saisonkomponente (z.B. über ein Jahr). Ein natürlicher erwartungstreuer Schätzer ist

$$\hat{T}_j := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} X_{d\cdot(j-1)+k}$$

für Trend in j-ter Periode (da $\sum_{k=1}^{d} S_k = 0$). Dann schätzt man S_k durch

$$\hat{S}_k := \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} (X_{d\cdot(j-1)+k} - T_j)$$

wobei m die Anzahl der Perioden, deren Daten vorliegen. Dann gilt $\sum_{k=1}^{d} \hat{S}_k = 0$. Die Residuen sind dann

$$\hat{Z}_{d\cdot(j-1)+k} = X_{d\cdot(j-1)+k} - \hat{T}_j - \hat{S}_k, \quad j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, d$$

Im Fall anderer Modellvorstellungen ergeben sich entsprechende Möglichkeiten die Zeitreihe stationär zu machen aus dem Modell.

3.1 Beispiel Bei Finanzdaten ist ein gängiges Modell die geometrische Brownsche Bewegung

$$X_t = x \cdot e^{\mu \cdot t + \sigma^2 \cdot B_t}, \qquad t \in [0, T]$$

wobei $x \in \mathbb{R}$, $(B_t)_{t\in[0,T]}$ eine 1-dim. Brownsche Bewegung ist. Dann gilt

$$\ln X_t - \ln X_{t-1} = \mu + \sigma^2 \cdot \underbrace{(B_t - B_{t-1})}_{\sim N(0,1)},$$

für $1 \leq t \leq T$. Die sogenannten log-returns $Y_t := \ln X_t - \ln X_{t-1} - \mu$ sind iid-normalverteilt, also stationär.

4

Die Autokovarianzfunktion eines schwach stationären Prozesses

4.1 Proposition

Sei γ die Autokovarianzfunktion eines schwach stationären Zeitreihe $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{Z}$

(i). $\gamma(0) \geq 0$

(ii). $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

(iii). $\gamma(h) = \gamma(-h)$, d.h. γ ist eine gerade Funktion.

Beweis: (i). Nach Definition gilt $\gamma(0) = \mathbb{V}X_t \geq 0$.

(ii). Mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$|\gamma(h)| = |\operatorname{cov}(X_t, X_{t+h})| \leq \sqrt{\mathbb{V}X_t} \cdot \sqrt{\mathbb{V}X_{t+h}} = \gamma(0)$$

(iii). Wegen der schwachen Stationarität gilt

$$\gamma(h) = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+h}) = \operatorname{cov}(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h)$$

□

4.2 Definition Eine Funktion $\kappa : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ heißt nicht-negativ definit, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot k(t_i - t_j) \cdot a_j \geq 0$$

gilt.

4.3 Satz

Es sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i). γ ist Autokovarianzfunktion eines schwach stationären Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

(ii). γ ist gerade und nicht-negativ definit.

Beweis:
- $(i) \Rightarrow (ii)$: γ ist gerade nach Proposition 4.1. Seien $a \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{Z}^n$ und setze $Z_t := (X_{t_1} - \mathbb{E}X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - \mathbb{E}X_{t_n})^T$. Dann

$$0 \leq \mathbb{V}(a^T \cdot Z) = a^T \cdot \mathbb{E}(Z \cdot Z^T) \cdot a = a^T \cdot \Gamma_n \cdot a = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot \gamma(t_i - t_j) \cdot a_j$$

wobei $\Gamma_n = (\operatorname{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}))_{i,j} = (\gamma(t_i - t_j))_{i,j}$ die Kovarianzmatrix von $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

- $(ii) \Rightarrow (i)$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{Z}^n$ mit $t_1 < \ldots < t_n$ sei F_t die Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^n$ mit charakteristischer Funktion
$$\Phi_t(u) \coloneqq \exp\left(-\frac{1}{2}u^T \cdot \Gamma \cdot u\right)$$
wobei $\Gamma = (\gamma(t_i - t_j))_{i,j}$. Dann ist Γ eine nicht-negativ definite Matrix. Somit ist Φ_t die charakteristische Funktion einer n-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix Γ. Die Familie der Verteilungsfunktionen (F_t) ist konsistent, daher existiert nach Kolmogorov's Existenzsatz ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen F_t und charakteristischer Funktion Φ_t. Insbesondere ist die gemeinsame Verteilung von zwei X_i, X_j normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix
$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(i-j) \\ \gamma(i-j) & \gamma(0) \end{pmatrix}$$
also gilt $\operatorname{cov}(X_i.X_j) = \gamma(i-j)$.

$\square$

4.4 Bemerkung Wir haben eigentlich gezeigt: $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist gerade und nicht-negativ definit $\Leftrightarrow \gamma$ ist Autokovarianzfunktion eines (schwach) stationären Gauß'schen Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Häufig betrachtet man statt der Kovarianzen einer Zeitreihe die Korrelation
$$\varrho_X(s,t) \coloneqq \operatorname{corr}(X_s, X_t) \coloneqq \frac{\operatorname{cov}(X_s, X_t)}{\sqrt{\mathbb{V}X_s \cdot \mathbb{V}X_t}}$$

4.5 Definition Sei $(X_t)_{t\in T}$ ein schwach stationärer Prozess. Dann heißt
$$\varrho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \frac{\operatorname{cov}(X_t, X_{t+h})}{\mathbb{V}X_t}$$
für alle $t, t+h \in T$, die Autokorrelationsfunktion von $(X_t)_{t\in T}$.

4.6 Bemerkung Die Autokorrelationsfunktion besitzt dieselben Eigenschaften wie die Autokovarianzfunktion und erfüllt zusätzlich $\varrho_X(0) = 1$.

4.7 Beispiel (i). $(Z_t)_{t\in T}$ sei ein schwach stationärer Prozess mit $\mathbb{E}Z_t = 0$ und Autokovarianzfunktion
$$\gamma(h) = \begin{cases} \gamma_Z^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$
Dann heißt $(Z_t)_{t\in T}$ weißes Rauschen (white noise) mit Erwartungswert 0 und Varianz σ_Z^2. Notation: $\mathrm{WN}(0, \sigma_z^2)$.

(ii). Moving average der Ordnung q (MA(q)): Sei $q \in \mathbb{N}$,
$$X_t \coloneqq \sum_{j=0}^{q} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$
wobei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_z^2)$ und $(\psi_j)_{j=0,\ldots,q}$ reellwertige deterministische Koeffizienten. Dann gilt $\mathbb{E}X_t = 0$ und
$$\mathbb{V}X_t = \sigma_z^2 \cdot \sum_{j=0}^{q} \psi_j^2$$
Weiterhin gilt (vgl. Lemma 2.13),
$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{q} \psi_j \cdot Z_{t-j} \cdot \sum_{k=0}^{q} \psi_k \cdot Z_{t-k+h}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{q} \psi_j \cdot \psi_k \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Z_{t-j} \cdot Z_{t-k+h})}_{\sigma_z^2 \delta_{k,j+h}} \\ &= \begin{cases} 0 & |h| > q \\ \sigma_z^2 \cdot \sum_{j=0}^{q} \psi_j \cdot \psi_{j+|h|} & |h| \leq q \end{cases}\end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\varrho(h) = \begin{cases} 0 & |h| > q \\ \frac{\sum_{j=0}^{q} \psi_j \cdot \psi_{j+|h|}}{\sum_{j=0}^{q} \psi_j^2} & |h| \le q \end{cases}$$

(iii). Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 (AR(1)):

$$X_t = \Phi \cdot X_{t-1} + Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$, $\Phi \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$X_t - \Phi \cdot X_{t-1} = (1 - \phi \cdot B) \cdot X_t = Z_t$$

Folglich

$$X_t = (1 - \Phi \cdot B)^{-1} \cdot Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \cdot B^j \cdot Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \cdot Z_{t-j}$$

Für alle $|\Phi| < 1$ konvergiert diese Reihe nach Lemma 2.12. Zudem gilt dann

$$\mathbb{E}X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \cdot \mathbb{E}(Z_{t-j}) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_t, X_{t+h}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{j+k} \cdot \operatorname{cov}(Z_{t-j}, Z_{t-k+h}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi^{2j+h} \cdot \sigma_Z^2 = \Phi^h \sigma_Z^2 \frac{1}{1 - \Phi^2} = \Phi^h \cdot \sigma_X^2 < \infty \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ für $|\Phi| < 1$ schwach stationär ist. Weiter gilt $\varrho(h) = \Phi^{|h|}$, $h \in \mathbb{Z}$. Für $\Phi > 0$ fällt ϱ geometrisch ab, für $\Phi < 0$ alterniert ϱ. Beachte: AR(1) ist ein Markov-Prozess.

(iv). Autoregressiver Prozess der Ordnung p (AR(p)):

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} \Phi_j \cdot X_{t-j} + Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} X_t - \sum_{j=1}^{p} \Phi_j \cdot X_{t-j} &= Z_t \\ \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{j=1}^{p} \Phi_j B^j\right) X_t &= Z_t \\ \Leftrightarrow X_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{p} \Phi_j \cdot B^j\right)^{-1} Z_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j (B^j Z_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j} \end{aligned}$$

wobei die ψ_j durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden können. Nach Lemma 2.12 konvergiert X_t $\mathbb{P}$-f.s. und in L^2 falls $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Zudem gilt dann nach Rechunung wie unter (iii), dass $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist mit

$$\gamma(h) = \sigma_Z^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+|h|}, \qquad \varrho(h) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+|h|}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$$

für $h \in \mathbb{Z}$.

(v). Autoregressiver Prozess mit bedingter Heteroskedastizität der Ordnung 1 (autoregressive process with conditional heteroscedasticity, ARCH(1)): Es sei $Z := (Z_t)_{t\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{WN}(0,1)$ wobei die Z_t iid seien. X_0 sei eine Zufallsvariable mit $X_0 \in L^2$, $X_0 \perp\!\!\!\perp Z$. Weiterhin sei $a_0 > 0$, $a_1 \in (0,1)$. Dann heißt

$$X_t := \sqrt{a_0 + a_1 \cdot X_{t-1}^2} \cdot Z_t, \qquad t \in \mathbb{N}$$

ARCH(1)-Prozess. Der ARCH-Prozess wurde 1982 von Robert Engle zur Modellierung von Finanzzeitreihen eingeführt (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 2003). Offensichtlich gilt $X_{t-1} \perp\!\!\!\perp Z_t$, sodass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t &= \mathbb{E}\sqrt{a_0 + a_1 \cdot X_{t-1}^2} \cdot \mathbb{E}Z_t = 0 \\ \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}(a_0 + a_1 \cdot X_{t-1}^2) \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Z_t^2)}_{1} = a_0 + a_1 \cdot \mathbb{E}(X_{t-1}^2) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{N}$. Weiterhin für $t \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+h}) &= \mathbb{E}(X_t \cdot \sqrt{a_0 + a_1 \cdot X_{t+h-1}^2} \cdot Z_{t+h}) \\ &= \mathbb{E}(X_t \cdot \sqrt{a_0 + a_1 \cdot X_{t+h-1}^2}) \cdot \mathbb{E}Z_{t+h} = 0 \end{aligned}$$

Wählt man $\mathbb{E}(X_0^2) = \frac{a_0}{1-a_1}$, so folgt $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(X_0^2)$, also

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \frac{a_0}{1-a_1} & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

d.h. $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ist wieder ein weißes Rauschen (aber nicht mehr iid, sondern nur unkorreliert).

5
Lineare Prozesse

5.1 Definition und Eigenschaften

5.1 Definition Die Zeitreihe $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt linearer Prozess, falls $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Darstellung der Form

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$ und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ reellwertig und deterministisch, sodass $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, besitzt.

5.2 Bemerkung (i). Nach Lemma 2.12 konvergiert $\sum_j \psi_j \cdot Z_{t-j}$ $\mathbb{P}$-f.s. und in L^2.

(ii). Wir werden sehen, dass jeder schwach stationäre Prozess auf $\mathbb{Z}$ entweder linear ist oder durch Subtrahieren einer deterministischen Komponente in einen linearen Prozess transformiert werden kann.

(iii). Falls $\psi_j = 0$ für alle $j < 0$, so heißt X MA-Prozess. Gilt zudem $\psi_j = 0$ für $j > q$, $\psi_q \neq 0$, dann heißt X MA(q)-Prozess ($q \leq \infty$).

(iv). Mit Hilfe des Backshiftoperators B kann man schreiben

$$X_t = \psi(B) Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

wobei $\psi(B) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \cdot B^j$.

(v). Man kann $\psi(B)$ auch als linearen Filter auffassen: Eine Input-Folge $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ produziert eine Output-Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Stationarität bleibt hierbei erhalten, vgl. Proposition 5.3.

5.3 Proposition

Sei $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär mit $\mathbb{E}Y_t = 0$ und Autokovarianzfunktion γ_Y. Falls $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$, so ist

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \cdot Y_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

schwach stationär mit Erwartungswert 0 und Autokovarianzfunktion

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_k \cdot \Gamma_Y(h + k - j)$$

Falls $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Y^2)$, dann gilt

$$\gamma_X(h) = \sigma_Y^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+h}$$

Beweis: Es gilt $\mathbb{E}|Y_t|^2 = \gamma_Y(0) < \infty$, d.h. nach Lemma 2.12 konvergiert die Reihe $\mathbb{P}$-f.s. und in L^2. Außerdem gilt $\mathbb{E}X_t = 0$, $t \in \mathbb{Z}$, und wegen $\sum_j |\psi| < \infty$ und der L^2-Konvergenz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+h}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Y_{t+h-j} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \cdot Y_{t-k}\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \psi_k \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y_{t+h-j} \cdot Y_{t-k})}_{\gamma_Y(h-j+k)}\end{aligned}$$

Falls $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Y^2)$, so gilt $\gamma_Y(h-j+k) = \sigma_Y^2 \delta_{j,h+k}$. Damit folgt die Behauptung. □

5.2 ARMA-Prozesse

5.4 Definition (i). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt ARMA(p,q)-Prozess (Autoregressiver Moving average Prozess der Ordnung (p,q)), falls $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär ist und für $t \in \mathbb{Z}$ gilt die ARMA-Gleichung

$$X_t - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \cdot X_{t-j} = Z_t + \sum_{k=1}^{q} \Theta_k \cdot Z_{t-k} \tag{5.1}$$

wobei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

(ii). $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt ARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert μ, falls $(X_t - \mu)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p,q)-Prozess ist.

Man kann (5.1) schreiben als

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.2}$$

mit

$$\phi(z) := 1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \cdot z^j \qquad\qquad \Theta(z) := 1 + \sum_{k=1}^{q} \Theta_j \cdot z^j,$$

die charakteristischen Polynome von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

5.5 Beispiel Der MA(q)-Prozess (vgl. Beispiel 4.7(ii)) sowie der schwach stationäre AR(p)-Prozess (vgl. Beispiel 4.7(iv)) sind Spezialfälle des ARMA(p,q).

5.6 Definition Ein ARMA(p,q)-Prozess definiert durch

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$$

heißt kausal, falls es eine Folge $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ reell- oder komplexwertig gibt, sodass $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\psi_j| < \infty$ und

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

5.7 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p,q)-Prozess, sodass die beiden charakteristischen Polynome ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle haben. Dann sind äquivalent:

(i). $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist kausal.

(ii). Es gilt $\phi(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

In diesem Fall ist

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

wobei

$$\psi(z) := \sum_j \psi_j \cdot z^j = \frac{\Theta(z)}{\phi(z)}, \qquad |z| \leq 1$$

Beweis: • (ii) $\Rightarrow$ (i): Aus $\phi(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$ folgt, dass $B(0,1) \ni z \mapsto \frac{1}{\phi(z)}$ holomorph ist, d.h. insbesondere existieren $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, sodass

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \zeta_j \cdot z^j =: \zeta(z), \qquad |z| < 1+\varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$. Aus der Konvergenz der Reihe ζ folgt insbesondere

$$\zeta_j \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^j \overset{j\to\infty}{\to} 0$$

Damit existiert $K > 0$ mit

$$|\zeta_j| < K \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-j}, \qquad j \in \mathbb{N}_0$$

Folglich

$$\sum_{j\geq 0} |\zeta_j| < K \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-j} < \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent. Weiterhin gilt $\zeta(z)\cdot\phi(z) = 1$ für $|z| \leq 1$. Nach Proposition 5.3 kann man nun $\zeta(B)$ auf Gleichung (5.2) anwenden und erhält

$$X_t = \zeta(B)\phi(B)X_t = \zeta(B)\Theta(B)Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}$$

wobei $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ definiert durch $\psi(z) = \frac{\Theta(z)}{\phi(z)}$.

• (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $X_t = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \psi_j \cdot Z_{t-j}$, $t \in \mathbb{Z}$, für eine Folge $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\psi_j| < \infty$. Dann gilt

$$\Theta(B)Z_t = \phi(B)X_t = \phi(B)\psi(B)Z_t$$

Sei nun

$$\eta(z) := \phi(z)\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot z^j, \qquad |z| \leq 1$$

dann gilt offenbar

$$\sum_{j=0}^{q} \phi_j \cdot Z_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot Z_{t-j}$$

also

$$\operatorname{cov}\left(Z_{t-k}, \sum_{j=0}^{q} \phi_j \cdot Z_{t-j}\right) = \operatorname{cov}\left(Z_{t-k}, \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot Z_{t-j}\right)$$

Folglich

$$\begin{aligned} \Theta_k \cdot \sigma_Z^2 &= \eta_k \cdot \sigma_Z^2, \qquad k = 0, \dots, q \\ 0 &= \eta_k \cdot \sigma_z^2, \qquad k > q \end{aligned}$$

also $\Theta(z) = \eta(z) = \phi(z) \cdot \psi(z)$, $|z| \leq 1$. Da ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle haben und $|\psi(z)| < \infty$ für $|z| \leq 1$ folgt $\phi(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.

□

5.8 Bemerkung (i). Falls $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p,q)-Prozess ist, sodass ϕ und Θ gemeinsame Nullstellen haben, so gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) keine gemeiname Nullstelle liegt auf dem Einheitskreis: $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist eindeutige stationäre Lösung der ARMA-Gleichung mit Polynomen $\tilde{\phi}$, $\tilde{\Theta}$ ohne gemeinsame Nullstelle wobei $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\Theta}$ aus ϕ und Θ durch Kürzen der gemeinsamen Faktoren entstehen.

(2) mindestens eine der gemeinsamen Nullstellen liegt auf dem Einheitskreis: Dann kann Gleichung (5.1) mehr als eine schwach stationäre Lösung haben.

(ii). Falls $\phi(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$, dann ist

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $\psi(z) = \frac{\Theta(z)}{\phi(z)}$ aus Satz 5.7 die eindeutige schwach stationäre Lösung der ARMA-Gleichung (5.2), denn: Für die Lösung muss gelten $\phi(B)X_t = \phi(B)\psi(B)Z_t = \Theta(B)Z_t$.

(iii). Falls ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle haben und $\phi(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, dann hat (5.2) keine stationäre Lösung. Beweis zum Beispiel in Kreiss-Neuhaus.

5.9 Definition Ein ARMA(p, q)-Prozess, definiert durch

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

heißt invertierbar, falls es eine Folge $(\pi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ gibt, sodass $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} |\pi_j| < \infty$ und

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \cdot X_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

5.10 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p, q)-Prozess, sodass die charakteristischen Polynome ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle haben. Dann sind äquivalent:

(i). $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist invertierbar.

(ii). Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt $\Theta(z) \neq 0$.

In jedem dieser Fälle ist

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \cdot X_{t-j}$$

für

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \cdot z^j = \frac{\phi(z)}{\Theta(z)}$$

Beweis: Wie Satz 5.7. Siehe auch Brockwell-Davis, Theorem 3.1.2 □

5.11 Beispiel Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ der ARMA$(1, 1)$-Prozess definiert durch

$$X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = Z_t + \frac{6}{5}Z_{t-1}, t \in \mathbb{Z}$$

wo $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Die charakteristischen Polynome sind gegeben durch

$$\phi(z) = 1 - \frac{1}{2}z \qquad\qquad \Theta(z) = 1 + \frac{6}{5}z$$

Nullstelle von ϕ ist $z = 2$ (außerhalb des Einheitskreises) und von Θ ist $z = -\frac{5}{6}$ (innerhalb des Einheitskreises). Offenbar besitzen also ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle und ist kausal nach Satz 5.7, aber nicht invertierbar nach Satz 5.10. Bestimme ψ_j, sodass$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j}$:

$$\psi(z) \cdot \phi(z) = \Theta(z)$$
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}z\right) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot z^j = 1 + \frac{6}{5}z$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 \\
\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_0 &= \frac{6}{5} \Rightarrow \psi_1 = \frac{17}{20} \\
\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1 &= 0 \Rightarrow \psi_2 = \frac{1}{2}\psi_1 = \frac{17}{20}\frac{1}{2} \\
\psi_3 - \frac{1}{2}\psi_2 &= 0 \Rightarrow \psi_3 = \frac{1}{2}\psi_2 = \frac{17}{20}\frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

Folglich

$$X_t = Z_t + \frac{17}{20}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Der folgende Satz zeigt, dass ARMA-Prozesse auch unter schwächeren Bedingungen als in Satz 5.7 linear sind.

5.12 Satz

Falls $\phi(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, so hat die ARMA-Gleichung $\phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$, die eindeutige schwach stationäre Lösung

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.3}$$

wobei die Koeffizienten $(\psi_j)_{h\in\mathbb{Z}}$ bestimmt sind durch

$$\frac{\Theta(z)}{\phi(z)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot z^j \tag{5.4}$$

und die Reihe konvergiert absolut für $r^{-1} < |z| < r$ für ein $r > 1$.

Beweis: (i). $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ definiert in (5.3) ist eine schwach stationäre Lösung von (5.2): Nach Lemma 2.13 ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär. Wendet man $\phi(B)$ auf (5.3) an, folgt zudem

$$\phi(B)X_t = \Phi(B)\psi(B)Z_t = \Theta(B)Z_t$$

(ii). Eindeutigkeit: Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige Lösung von (5.2). Da $\phi(z) \neq 0$ für alle $|z| = 1$ und ϕ holomorph ist, existiert ein $\delta > 1$ sodass die Laurent-Reihe

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \zeta_j \cdot z^j = \zeta(z) := \phi(z)^{-1},$$

für $\delta^{-1} < |z| < \delta$ absolut konvergiert. Wende nun $\zeta(B)$ auf (5.2) an, dann folgt

$$\begin{aligned}
\zeta(B)\phi(B)X_t &= \zeta(B)\Theta(B)Z_t \\
\Leftrightarrow X_t &= \psi(B)Z_t
\end{aligned}$$

d.h. X hat die Form (5.3). Die absolute Konvergenz der Reihe (5.4) folgt schließlich wiederum aus der Funktionentheorie.

□

5.3 Zwei weitere wichtige Strukturresultate

Nach Satz 5.12 haben ARMA(p,q)-Prozesse unter sehr einfachen Bedingung eine Darstellung als lineares Modell $X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}$, unter Kausalität sogar als einseitige MA(∞)-Prozess.

Man kann MA-Prozesse auch über die Autokovarianzfunktion charakterisieren:

5.13 Proposition

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit Erwartungswert 0 und Autokovarianzfunktion γ, sodass $\gamma(h) = 0$ für $|h| > q$ und $\gamma(q) \neq 0$. Dann ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{MA}(q)$, d.h. es existieren $\sigma^2 > 0$, $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ sowie $\Theta_1,\dots,\Theta_q$, $\Theta_q \neq 0$, sodass

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \Theta_j Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Definiere für $t \in \mathbb{Z}$ den Unterraum

$$M_t := \overline{\mathrm{span}(X_s; \mathbb{Z} \ni s \le t)}$$

des Hilbertraums L^2 (Unterraum der quadratintegrierbaren Zufallsvariablen). Setze

$$Z_t := X_t - \mathcal{P}_{M_{t-1}} X_t \tag{5.5}$$

wobei $\mathcal{P}_{M_{t-1}}$ die Projektion auf M_{t-1} bezeichnet. Dann gilt $Z_t \in M_t$, $Z_t \in M_{t-1}^{\perp}$ (Orthogonalraum). Falls also $s < t$, so gilt $Z_s \in M_s \subseteq M_{t-1}$ und damit

$$\mathbb{E}(Z_s \cdot Z_t) = 0$$

Zudem gilt

$$\mathcal{P}_{\overline{\mathrm{span}(X_s; s=t-n,\dots,t-1)}} X_t \overset{L^2}{\to} \mathcal{P}_{M_{t-1}} X_t, \qquad n \to \infty$$

(denn: Die Projektion entspricht der bedingten Erwartung, damit folgt die Behauptung aus Lévy's Konvergenzsatz, vgl. Wahrscheinlichkeitstheorie.) sodass aus Stetigkeit der L^2-Norm und Stationarität von X folgt,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{t+1}^2) &= \|X_{t+1} - \mathcal{P}_{M_t} X_{t+1}\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|X_{t+1} - \mathcal{P}_{\overline{\mathrm{span}(X_s; s=t+1-n,\dots,t)}} X_{t+1}\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|X_t - \mathcal{P}_{\overline{\mathrm{span}(X_s; s=t-n,\dots,t-1)}} X_t\|^2 \\
&= \|X_t - \mathcal{P}_{M_{t-1}} X_t\|^2 = \mathbb{E}(Z_t^2)
\end{aligned}$$

Definiere $\sigma^2 := \|Z_t\|^2$, dann folgt also $Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$. Nach (5.5) folgt

$$M_{t-1} = \overline{\mathrm{span}(X_s, Z_{t-1}; s < t-1)} = \overline{\mathrm{span}(X_s, Z_{t-q},\dots,Z_{t-1}; s < t-q)}$$

also kann M_{t-1} in zwei orthogonale Unterräume zerlegt werden:

$$M_{t-1} = M_{t-q-1} \oplus \overline{\mathrm{span}(Z_{t-1},\dots,Z_{t-q})}$$

Da $\gamma(h) = \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+h}) = 0$ für $|h| > q$ gilt $X_t \perp M_{t-q-1}$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{M_{t-1}} X_t &= \mathcal{P}_{M_{t-q-1}} X_t + \mathcal{P}_{\overline{\mathrm{span}(Z_{t-1},\dots,Z_{t-q})}} \\
&= 0 + \sigma^{-2} \cdot \sum_{j=1}^{q} \mathbb{E}(Z_{t-j} \cdot X_t) \cdot Z_{t-j}
\end{aligned}$$

(da $\sigma^{-1} Z_{t-j}$ orthonormal), d.h.

$$\mathcal{P}_{M_{t-1}} X_t = \sum_{j=1}^{q} \Theta_j \cdot Z_{t-j} \tag{5.6}$$

wobei $\Theta_j := \sigma^{-2} \cdot \mathbb{E}(Z_{t-j} \cdot X_t)$. Beachte, dass Θ_j unabhängig von t auf Grund der Stationarität von t. Einsetzen von (5.6) in (5.5) liefert die Behauptung. $\square$

5.14 Definition Ein stochastischer Prozess $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt vorhersagbar (oder deterministisch), wenn $V_t \in M_{t-1}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

5.15 Beispiel Betrachte den Prozess

$$X_t = A \cdot \cos(\lambda \cdot t) + B \cdot \sin(\lambda \cdot t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $\lambda \in (0, \pi)$ konstant und A, B unkorreliert mit $\mathbb{E}A = \mathbb{E}B = 0$, $\mathbb{V}A = \mathbb{V}B = \sigma^2$. Dann gilt

$$X_t = 2\cos(\lambda) \cdot X_{t-1} - X_{t-2}$$

also $X_t \in M_{t-1}$, d.h. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vorhersagbar.

5.16 Satz (Wold-Zerlegung)

Jeder nicht-deterministische schwach stationäre Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{E}X_t = 0$ und $\mathbb{V}X_t = \sigma^2 < \infty$ hat eine Darstellung der Form

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot Z_{t-j} + V_t, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.7}$$

wobei

(i). $\psi_0 = 1$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

(ii). $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$

(iii). $Z_t \in M_t := \overline{\mathrm{span}(X_s; s \leq t)}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$

(iv). $\mathbb{E}(Z_t \cdot V_s) = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$.

(v). $V_t \in M_{t-1}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$

(vi). $V_t \in \overline{\mathrm{span}(V_s; s \leq t-1)}$

Die Folge $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sind eindeutig bestimmt durch (5.7) und (i)-(vi).

Beweis: Mittels Hilbertraumtheorie, z.B. Brockwell-Davis Theorem 5.7.1 □

6 Spektraldarstellung einer schwach stationären Zeitreihe

Stochastisches Analogon zur Fourierdarstellung von determinstischen Funktionen.

6.1 Spektraldarstellung der Autokovarianzfunktion

Im Folgenden sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit Werten in $\mathbb{C}$.

6.1 Definition Die Zeitreihe in $\mathbb{C}$ ist schwach stationär, falls $X_t \in L^2$, $\mathbb{E}X_t = \mu$ und $\mathbb{E}(X_{t+h} \cdot \overline{X}_t)$ unabhängig von t ist. Für eine schwach stationäre Zeitreihe in $\mathbb{C}$ definiert man die Autokovarianzfunktion

$$\gamma(h) := \mathbb{E}(X_{t+h} \cdot \overline{X}_t) - \mathbb{E}X_{t+h} \cdot \mathbb{E}\overline{X_t}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Diese erfüllt

(i). $\gamma(0) \geq 0$

(ii). $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ für $h \in \mathbb{Z}$

(iii). $\gamma(h) = \overline{\gamma(-h)}$, d.h. γ ist hermitesch.

Es gilt das folgende Analogon zu Satz 4.3:

6.2 Satz

Es sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i). γ ist Autokovarianzfunktion eines (komplexwertigen) schwach stationären Prozesses.

(ii). γ ist hermitesch und nicht-negativ definit, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot \gamma(t_i - t_j) \cdot a_j \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$.

6.3 Beispiel Sei $-\pi < \lambda_1 < \ldots \leq \pi$ und

$$X_t := \sum_{j=1}^{n} A(\lambda_j) \cdot e^{\imath\, t \cdot \lambda_j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

wobei $(A(\lambda_j))$ unkorrelierte zufällige Koeffizienten in $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{E}A(\lambda_j) = 0$ und $\mathbb{E}(A(\lambda_j) \cdot \overline{A(\lambda_j)}) = \sigma_j^2 < \infty$. Behauptung: $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist schwach stationär.

Beweis: Aus $\mathbb{E}A(\lambda_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, folgt offenbar

$$\mathbb{E}X_t = \sum_{j=1}^{n} e^{\imath\, \lambda_j \cdot t}\mathbb{E}(A(\lambda_j)) = 0.$$

Weiterhin gilt wegen der Unkorreliertheit der Koeffizienten

$$\mathbb{E}(X_{t+h} \cdot \overline{X_t}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\imath\, t \cdot \lambda_j} e^{\imath\, (t+h) \cdot \lambda_k} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(A(\lambda_k) \cdot \overline{A(\lambda_j)})}_{\delta_{jk} \cdot \sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{n} e^{\imath\, h \cdot \lambda_j} \cdot \sigma_j^2 \qquad \square$$

Weiter gilt

$$\gamma(h) := \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cdot e^{\imath\, h \cdot \lambda_j} = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath\, h \cdot \lambda}\, dF(\lambda)$$

für $F(\lambda) := \sum_{j: \lambda_j \leq \lambda} \sigma_j^2$. F heißt Spektralverteilungsfunktion von X. Eigenschaften von F:

(i). Träger ist Teilmenge von $(-\pi, \infty)$

(ii). F hat Atome $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(iii). $F(\pi) = F(\infty) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = \gamma(0)$, also insbesondere i.A. $F(\pi) \neq 1$.

(iv). $F(\lambda_j) - F(\lambda_j -) = \mathbb{V}A(\lambda_j)$

(v). $F(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \mathbb{E}|A(\lambda_j)|^2$

6.4 Satz (Herglotz)

$\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist nicht-negativ definit genau dann wenn

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath\, \lambda \cdot h}\, dF(\lambda), \qquad h \in \mathbb{Z} \tag{6.1}$$

wobei F eine rechtsstetige, monoton wachsende, beschränkte Funktion auf $[-\pi, \pi]$ ist mit $F(-\pi) = 0$ (d.h. F ist eine nicht-normierte Verteilungsfunktion). Die Funktion F heißt Spektralverteilungsfunktion. Falls F eine Lebesguedichte f besitzt, so heißt f Spektraldichte von γ.

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: Für $a = (a_1, \dots, a_n)^\top \in \mathbb{C}^n$, $t = (t_1, \dots, t_n)^\top \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{r,s=1}^{n} a_r \cdot \gamma(t_r - t_s) \cdot \overline{a_s} &= \int_{(-\pi,\pi]} \sum_{r,s=1}^{n} a_r \cdot \overline{a_s} \cdot e^{\imath\, \lambda \cdot (t_r - t_s)}\, dF(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi,\pi]} \left(\sum_{r=1}^{n} a_r \cdot e^{\imath\, \lambda \cdot t_r} \right) \cdot \overline{\sum_{s=1}^{n} a_s \cdot e^{\imath\, \lambda \cdot t_s}}\, dF(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi,\pi]} \left| \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot e^{\imath\, \lambda \cdot t_r} \right|^2 dF(\lambda) \geq 0\end{aligned}$$

  Zudem gilt für γ in (6.1) offensichtlich $\gamma(h) = \overline{\gamma(-h)}$, d.h. γ ist hermitesch.

- „$\Rightarrow$“: Definiere für $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}f_N(\lambda) &:= \frac{1}{2\pi\, N} \sum_{r,s=1}^{N} e^{-\imath\, r \cdot \lambda} \gamma(r-s) \cdot e^{\imath\, s \cdot \lambda} \\ &\overset{m:=r-s}{=} \frac{1}{2\pi\, N} \sum_{|m|<N} (N - |m|) \cdot \gamma(m) \cdot e^{-\imath\, m \cdot \lambda} \geq 0\end{aligned}$$

  da γ nicht-negativ definit. Sei F_N die zugehörige Verteilungsfunktion zur Dichte $f_n \cdot 1_{(-\pi,\pi]}$. Dann gilt

$$F_n(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \leq -\pi \\ \int_{-\pi}^{\lambda} f_N(\nu)\, d\nu & \lambda \in (-\pi, \pi] \\ F_N(\pi) & \lambda > \pi \end{cases}$$

Für $h \in \mathbb{Z}, |h| < N$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\lambda} dF_N(\lambda) &= \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\lambda} \cdot f_N(\lambda)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \cdot \gamma(m) \cdot \underbrace{\int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath (h-m)\cdot\lambda}\, d\lambda}_{2\pi\cdot\delta_{h,m}} \\ &= \left(1 - \frac{|h|}{N}\right) \cdot \gamma(h) \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Weiterhin

$$F_N(\pi) = \int_{(-\pi,\pi]} dF_N(\lambda) = \gamma(0) < \infty$$

(selbe Rechnung mit $h = 0$). Nach dem Auswahlsatz von Helly gibt es eine Teilfolge $(F_{N_k})_k$ von $(F_N)_N$ und eine Verteilungsfunktion F, sodass für alle beschränkten stetigen Funktionen g gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(-\pi,\pi]} g(\nu) dF_{N_k}(\nu) = \int_{(-\pi,\pi]} g(\nu)\, dF(\nu)$$

(Alternativ: Argumentiere mit Stetigkeitssatz von Lévy.) Setze $g(\nu) := e^{\imath h\cdot\nu}$, dann

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu}\, dF_{N_k}(\nu) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu} dF(\nu) \overset{(6.2)}{=} \gamma(h)$$

□

6.5 Korollar

$\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist Autokovarianfunktion eines schwach stationären Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ genau dann wenn

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu}\, dF(\nu), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

wobei F eine rechtsstetige, monoton wachsende, beschränkte Funktion auf $[-\pi,\pi]$ mit $F(-\pi) = 0$.

6.6 Proposition

F ist auf $[-\pi,\pi]$ eindeutig bestimmt durch γ.

Beweis: Seien F und G zwei Verteilungsfunktionen, sodass die Darstellung (6.1) gilt. Nach dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt $F = G$. □

Der folgende Satz ist hilfreich zur Bestimmung der Spektralverteilungsfunktion F in vielen Fällen.

6.7 Satz

Sei $\kappa : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\kappa(n)| < \infty$. Dann hat κ die Darstellung

$$\kappa(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath h\cdot\nu} \cdot f(\nu)\, d\nu, \qquad h \in \mathbb{Z}$$

mit

$$f(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\imath n\cdot\nu} \cdot \kappa(n)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath h\cdot\nu} \cdot f(\nu)\, d\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\imath (h-n)\cdot\nu} \cdot \kappa(n)\, d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \kappa(n) \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath (h-n)\cdot\nu}\, d\nu}_{2\pi\delta_{h,n}} \\ &= \kappa(h)\end{aligned}$$

für $h \in \mathbb{Z}$. Im zweiten Schritt ist dominierte Konvergenz anwendbar da

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\imath\,(h-n)\cdot\nu} \cdot \kappa(n)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\kappa(n)| < \infty$$

□

6.8 Korollar

Sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i). γ ist eine Autokovarianzfunktion eines schwach stationären Prozesses.

(ii). Es gilt

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\imath\,n\cdot\lambda} \cdot \gamma(n) \geq 0, \quad \lambda \in (-\pi, \pi]$$

In diesem Fall ist f die Spektraldichte von γ.

Beweis:

- (i) ⇒ (ii): Nach Satz 6.2 ist γ nicht-negativ definit. Damit insbesondere

$$\begin{aligned} 0 \leq f_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi\, N} \int_{r,s=1}^{N} e^{-\imath\,r\cdot\lambda} \cdot \gamma(r-s) \cdot e^{\imath\,s\cdot\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \cdot e^{-\imath\,m\cdot\lambda} \cdot \gamma(m) \\ &\overset{N\to\infty}{\to} f(\lambda) \end{aligned}$$

Nach Satz 6.7 gilt

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath\,h\cdot\nu} \cdot f(\nu)\, d\nu, \qquad h \in \mathbb{Z}$$

d.h. f ist die Spektraldichte von γ (vgl. Satz 6.4).

- (ii) ⇒ (i): Aus $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ folgt aus Satz 6.7, dass

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath\,h\cdot\nu}\, dF(\nu), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

mit F wie in Korollar 6.5. Aus Korollar 6.5 folgt somit die Behauptung.

□

6.9 Beispiel Sei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Dann gilt

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus Korollar 6.8 folgt dann $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$, für $\lambda \in (-\pi, \pi]$. Jede Frequenz trägt in gleichem Maß zur Varianz

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f_Z(\lambda)\, d\lambda$$

bei.

6.10 Proposition

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ist die Spektraldichte eines reellwertigen schwach stationären Prozesses genau dann wenn f symmetrisch, $f \geq 0$ und $f \in L^1((-\pi, \pi))$.

Beweis: Übung. □

6.2 Das Spektrum von ARMA-Prozessen

6.11 Satz

Es sei $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mathbb{E}Y_t = 0$ und Spektralverteilungsfunktion F_Y. Definiere

$$X_t := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Y_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

wobei $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$. Dann ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär mit Spektral-Verteilungsfunktion

$$F_X(\lambda) = \int_{(-\pi,\lambda]} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot e^{-\imath j\cdot\nu} \right|^2 dF_Y(\nu)$$

für $-\pi < \lambda \le \pi$.

Beweis: Nach Proposition 5.3 ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär mit Erwartungswert 0 und Autokovarianzfunktion

$$\gamma_X(h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \overline{\psi_k} \cdot \gamma_Y(h - j + k), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

Nach Korollar 6.5 gilt

$$\gamma_Y(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu}\, dF_Y(\nu).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot \overline{\psi_k} \cdot \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath (h-j+k)\cdot\nu}\, dF_Y(\nu) \\
&= \int_{(-\pi,\pi]} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot e^{-\imath j\cdot\nu} \right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\psi_k} \cdot e^{\imath k\cdot\nu} \right) e^{\imath h\cdot\nu}\, dF_Y(\nu) \\
&= \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu} \cdot \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot e^{-\imath j\cdot\nu} \right|^2 dF_Y(\nu) \\
&= \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath h\cdot\nu}\, dF_X(\nu)
\end{aligned}$$

□

6.12 Bemerkung Falls $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Spektraldichte f_Y besitzt, dann besitzt $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ nach Gleichung (6.11) ebenfalls eine Spektraldichte f_X,

$$f_X(\lambda) = \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot e^{-\imath \lambda\cdot j}}_{=:\psi(|e^{-\imath\lambda}|^2)} f_Y(\lambda)$$

Die Funktion $\lambda \mapsto \psi(e^{-\imath\lambda})$, $\lambda \in (-\pi, \pi]$, heißt Transferfunktion und $|\psi(e^{-\imath\lambda})|^2$ quadratierte Transferfunktion (power transfer function).

6.13 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p,q)-Prozess, der die ARMA-Gleichung

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

erfüllt, mit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$, sodass die charakteristischen Polynome ϕ und Θ keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Zudem gelte $\phi(z) \ne 0$ für $|z| = 1$. Dann hat $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die Spektraldichte

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(e^{-\imath\lambda})}{\phi(e^{-\imath\lambda})} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{6.3}$$

Beweis: Die ARMA-Gleichung hat nach Satz 5.12 eine eindeutige schwach stationäre Lösung

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

wobei $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$. Nach Beispiel 6.9 hat $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die Spektraldichte $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi}$. Setzt man $U_t := \phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$, dann folgt nach Bemerkung 6.12

$$f_U(\lambda) = |\phi(e^{-\imath\lambda})|^2 \cdot f_X(\lambda) = |\Theta(e^{\imath\lambda})|^2 \cdot \frac{\sigma_Z^2}{2\pi}$$

Da $\phi(e^{-\imath\lambda}) \neq 0$ für alle λ folgt (6.3). □

6.14 Beispiel (i). MA(1):

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

mit $Z \sim \text{WN}(0, \sigma_Z^2)$. Dann

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \cdot |\Theta(e^{-\imath\lambda})|^2 = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-\imath\lambda}|^2 \\ &= \frac{\sigma_Z^2}{2\pi}(1 + \theta e^{-\imath\lambda}) \cdot (1 + \theta \cdot e^{\imath\lambda}) = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \cdot (1 + \theta^2 + \theta \cdot (e^{\imath\lambda} + e^{-\imath\lambda})) \\ &= \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \cdot \left(1 + \theta^2 + 2\theta \cdot \cos\lambda\right) \end{aligned}$$

für $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

(ii). AR(1):

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$$

mit $Z \sim \text{WN}(0, \sigma_Z^2)$. Wie in (i) erhält man

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \cdot |1 - \phi \cdot e^{-\imath\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \cdot (1 + \phi^2 - 2\phi \cdot \cos\lambda)^{-1}$$

6.3 Die Spektraldarstellung eines schwach stationären Prozesses

Ziel:

$$X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath t \cdot \nu}\, dZ(\nu)$$

wobei $(Z(\nu))_{\nu\in(-\pi,\pi]}$ ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen.

6.15 Definition $(Z(\lambda))_{\lambda\in(-\pi,\pi]}$ sei ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{C}$, sodass $\mathbb{E}(Z(\lambda)) = 0 = \langle Z(\lambda), 1\rangle$ und

(i). $\|Z(\lambda)\|^2 = \langle Z(\lambda), Z(\lambda)\rangle = \mathbb{E}|Z(\lambda)|^2 < \infty$ für alle $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

(ii). $\langle Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3), Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\rangle = 0$ für alle $-\pi \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_4 \leq \pi$.

Dann heißt $(Z(\lambda))_{\lambda\in(-\pi,\pi]}$ Prozess mit orthogonalen Zuwächsen. $(Z(\lambda))_{\lambda\in(-\pi,\pi]}$ heißt rechtsseitig stetig (in L^2), wenn

$$\lim_{\delta\to 0} \|Z(\lambda + \delta) - Z(\lambda)\|^2 = 0$$

für alle $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

In der Folge betrachten wir nur Prozesse mit orthogonalen Zuwächsen, die rechtsseitig stetig sind.

6.16 Proposition

Sei $(Z(\lambda))_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Verteilungsfunktion F (monoton wachsend, rechtsstetig, nicht unbedingt normiert), sodass

- $F(\lambda) = 0$ für $\lambda \le -\pi$ und $F(\lambda) = F(\pi)$ für $\lambda \ge \pi$
- Es gilt
$$F(\mu) - F(\lambda) = \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2, \quad -\pi \le \lambda \le \mu \le \pi$$

Beweis: Setze
$$F(\mu) := \|Z(\mu) - Z(-\pi)\|^2, \quad -\pi \le \mu \le \pi$$
dann hat F die gewünschten Eigenschaften:

- Monotonie: Sei $-\pi \le \mu \le \mu \le \pi$. Dann gilt wegen der orthogonalen Zuwächse
$$\begin{aligned} F(\mu) &= \|Z(\mu) - Z(-\pi)\|^2 = \|Z(\mu) - Z(\lambda) + Z(\lambda) - Z(-\pi)\|^2 \\ &= \underbrace{\|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2}_{\ge 0} + \|Z(\lambda) - Z(-\pi)\|^2 \ge F(\lambda) \end{aligned}$$
- F rechtsstetig, da $(Z(\lambda))_{\lambda \in [-\pi,\pi]}$ rechtsstetig ist.
- Es gilt
$$F(\lambda) - F(\mu) = \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2$$
nach obiger Rechnung.

□

6.17 Definition Sei $(Z(\lambda))_{\lambda \in [-\pi,\pi]}$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen wie in Proposition 6.16. Dann heißt F die zu Z assoziierte Verteilungsfunktion.

6.18 Beispiel (i). $B = (B(\lambda))_{\lambda \in [-\pi,\pi]}$ sei eine Brownian motion mit $\mathbb{E}B(\lambda) = 0$, $\mathbb{V}B(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(\lambda + \pi)$. B ist ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und
$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \le -\pi \\ \frac{\sigma^2}{2\pi}(\lambda + \pi) & \lambda \in [-\pi,\pi] \\ \sigma^2 & \lambda \ge \pi \end{cases}$$
denn
$$\|B(\lambda) - B(-\pi)\|^2 = \|B(\lambda)\|^2 = \mathbb{V}B(\lambda)$$

(ii). $N = (N(t))_{t \ge 0}$ sei ein Poisson-Prozess mit Intensität c. Dann definiert $Z(\lambda) := N(\lambda + \pi) - \mathbb{E}N(\lambda + \pi)$, $-\pi \le \lambda \le \pi$, einen Prozess mit orthogonalen Zuwächsen mit assoziierter Verteilungsfunktion
$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \le -\pi \\ c \cdot (\lambda + \pi) & -\pi \le \lambda \le \pi \\ 2\pi \cdot c & \lambda > \pi \end{cases}$$
Beachte: Für $c = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ haben B und Z die gleiche assoziierte Verteilungsfunktion.

6.3.1 Integration bzgl. eines Prozesses mit orthogonalen Zuwächsen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Z(\lambda))_{\lambda \in [-\pi,\pi]}$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. F bezeichne die zu Z assoziierte Verteilungsfunktion. Weiterhin sei
$$L^2(F) := L^2((-\pi,\pi]; \mathcal{B}, F) := \left\{ f : (-\pi,\pi] \to \mathbb{C};\ \int |f(\nu)|^2 \, dF(\nu) < \infty \right\}.$$

(i). 1. Schritt: Definiere Integral für Treppenfunktionen. Es sei

$$\mathcal{D} := \{f \in L^2(F); f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot 1_{(\lambda_i,\lambda_{i+1}]}(\lambda); -\pi = \lambda_0 < \ldots < \lambda_{n+1} = \pi, f_i \in \mathbb{C}\}$$

Für $f \in \mathcal{D}$ definiere das Integral $I : \mathcal{D} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch

$$I(f) := \int_{(-\pi,\pi]} f(\nu)\, dZ(\nu) := \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot (Z(\lambda_{i+1}) - Z(\lambda_i))$$

Eigenschaften:

- $I(f)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Darstellung für f.
- $\mathbb{E}I(f) = 0$
- I ist linear.
- I erhält Skalarprodukte: Seien $f, g \in \mathcal{D}$ mit

$$f(\lambda) = \sum_{i=0} n f_i \cdot 1_{(\lambda_i,\lambda_{i+1})}(\lambda) \qquad\qquad g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} g_i \cdot 1_{(\lambda_i,\lambda_{i+1})}(\lambda)$$

für geeignete Partitionen $-\pi = \lambda_0 < \ldots < \lambda_{n+1} = \pi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle I(f), I(g)\rangle &= \langle \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot (Z(\lambda_{i+1}) - Z(\lambda_i)), \sum_{j=0}^{n} g_j \cdot (Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j))\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f_i \cdot \overline{g_j} \cdot \langle Z(\lambda_{i+1}) - Z(\lambda_i), Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j)\rangle \\
&\overset{\text{POZ}}{=} \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \overline{g_i} \cdot \|Z(\lambda_{i+1}) - Z(\lambda_i)\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \overline{g_i} \cdot (F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)) \\
&= \int_{(-\pi,\pi]} f(\nu) \cdot \overline{g(\nu)}\, dF(\nu) = \langle f, g\rangle_{L^2(F)}
\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{D}$ und $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ haben die gleiche Geometrie.

(ii). 2.Schritt: Erweitere I zu einem Isomorphismus von $L^2(F)$ in einen Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Schließe $\mathcal{D}$ ab in $L^2(F)$:

$$\overline{\mathcal{D}} = \{f \in L^2(F); \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D} : \|f_n - f\|_{L^2(F)} \to 0\}$$

Zeige:

(1) $I(f_n)$ konvergiert in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(2) Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten approximierenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) I hat auf $\mathcal{D}$ Integraleigenschaften, d.h. I ist linear, $\mathbb{E}I(f) = 0$ und Skalarprodukte bleiben erhalten.

(4) $\overline{D} = L^2(F)$.

Dazu:

(1) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{D}$ mit $\|f_n - f\|_{L^2(F)} \to 0$. Dann gilt

$$\|I(f_n) - I(f_m)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|I(f_n - f_m)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|f_n - f_m\|_{L^2(F)} \to 0$$

d.h. $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{P})$, also konvergent.

(2) Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{D}$, sodass $\|f_n - f\| \to 0$ und $\|g_n - f\| \to 0$. Dann konvergiert auch die Folge $(f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots)$ in $L^2(F)$ gegen f und damit konvergiert (nach (1)) auch $(I(f_1), I(g_1), I(f_2), I(g_2), \ldots)$. Dies kann nur gelten, falls die Teilfolgen $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ denselben $L^2(\mathbb{P})$-Grenzwert besitzen.

(3) Folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften auf $\mathcal{D}$.

(4) a. $\mathcal{D}$ ist dicht (im $L^2(F)$-Sinn) in $C([-\pi,\pi])$:
Sei $f \in C([-\pi,\pi])$. Dann ist f gleichmäßig stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle Partition $-\pi \le t_0 < \ldots < t_{N(n)+1} \le \pi$, sodass

$$\sup_{s\in[t_k,t_{k+1})} |f(s) - f(t_{k+1})| < \frac{1}{n}, \qquad k = 0, \ldots, N(n),$$

und setze $f_n := \sum_{k=0}^{N(n)} f(t_{k+1}) \cdot 1_{(t_k,t_{k+1}]}$. Dann gilt

$$\sup_{s\in(-\pi,\pi]} |f_n(s) - f(s)|^2 \le \frac{1}{n^2}$$

und somit
$$\int_{(-\pi,\pi]} |f_n(s) - f(s)|^2 \, dF(s) \le \frac{1}{n^2} \cdot F(\pi) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

b. $C([-\pi,\pi])$ ist dicht in $L^2(F)$:
Sei $f \in L^2(F)$. Angenommen, es gibt keine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([-\pi,\pi])$ mit $f_n \to f$ in $l^2(F)$, also $f \notin \overline{C([-\pi,\pi])}^{L^2(F)}$. Es bezeichne Pf die Orthogonalprojektion von f auf $\overline{C([-\pi,\pi])}^{L^2(F)}$. Dann folgt

$$\langle Pf, e^{\imath t\cdot}\rangle_{L^2(F)} = \langle f, e^{\imath t\cdot}\rangle_{L^2(F)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, also

$$\int_{(-\pi,\pi]} e^{-\imath t\cdot x} \cdot Pf(x) \, dF(x) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{-\imath t\cdot x} \cdot f(x) \, dF(x)$$

d.h. $\hat{Pf}^F = \hat{f}^F$ (Fourier-Transformation bzgl. F). Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation folgt $Pf = f$ μ-fast überall wobei μ Maß zur Verteilungsfunktion F. Da $Pf \in \overline{C([-\pi,\pi])}$ folgt $f \in \overline{C([-\pi,\pi])}$. Widerspruch!

6.19 Definition Das so definierte Integral $I(f)$ heißt stochastisches Integral von f bzgl. $(Z(\lambda))$. Wir schreiben
$$I(f) = \int_{(-\pi,\pi]} f(\nu) \, dZ(\nu)$$

Ziel: Zeige, dass für jeden schwach stationären Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit Spektralverteilungsfunktion F ein Prozess mit orthogonalen Inkrementen $(Z(\lambda))_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ existiert, sodass

$$X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath t\cdot\nu} \, dZ(\nu), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Zunächst: Umgekehrt: Sei $(Z(\lambda))_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen. Setze $f_t(\lambda) = e^{\imath t\cdot\lambda}$ und
$$X_t := I(f_t) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath t\cdot\lambda} \, dZ(\lambda), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Dann ist $X_t \in L^2(\mathbb{P})$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist schwach stationär, denn

- $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}I(f_t) = 0$.

- Da I Skalarprodukte erhält, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{t+h}\cdot\overline{X_t}) &= \langle X_{t+h},X_t\rangle = \langle I(f_{t+h}),I(f_t)\rangle\\ &= \langle f_{t+h},f_t\rangle = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath\,(t+h)\cdot\nu}\cdot e^{-\imath\,t\cdot\nu}\,dF(\nu)\\ &= \int e^{\imath\,h\cdot\nu}\,dF(\nu)\end{aligned}$$

d.h. unabhängig von t.

Methode zur Bestimmung von $(Z(\lambda))$ aus X: Definiere Isometrie zwischen

$$\overline{\mathcal{H}} \coloneqq \overline{\operatorname{span}(X_t;t\in\mathbb{Z})}\subseteq L^2(\mathbb{P}) \qquad \overline{\mathcal{K}} \coloneqq \overline{\operatorname{span}(e^{\imath\,t\cdot};t\in\mathbb{Z})} = L^2(F)$$

Welche Zufallsvariable im „Zeitbereich" mit Funktionen im „Frequenzbereich" verbindet.

(i). Endliche Linearkombinationen:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\coloneqq \operatorname{span}(X_t;t\in\mathbb{Z}) = \left\{\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j};n\in\mathbb{N},a_j\in\mathbb{C};t_j\in\mathbb{Z}\right\}\\ \mathcal{K} &\coloneqq \operatorname{span}(e^{\imath\,t\cdot};t\in\mathbb{Z}) = \left\{\sum_{k=1}^n b_k\cdot e^{\imath\,t_k\cdot};n\in\mathbb{N},b_k\in\mathbb{C},t_k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Definiere $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ durch

$$T\left(\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j}\right) \coloneqq \sum_{j=1}^n a_j\cdot e^{\imath\,t_j\cdot}$$

d.h. insbesondere $T(X_t) = e^{\imath\,t\cdot}$. Zeige: T ist wohldefiniert, linear und erhält das Skalarprodukt, d.h. insbesondere ist T eine Isometrie zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$.

Beweis: Wohldefiniert: Angenommen,

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j} - \sum_{k=1}^m b_k\cdot X_{t_k}\right\|_{L^2(\mathbb{P})} = 0$$

dann gilt nach dem Satz von Herglotz

$$\begin{aligned}&\left\|T\left(\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j}\right) - T\left(\sum_{k=1}^m b_k\cdot X_{t_k}\right)\right\|^2_{L^2(F)}\\ &\qquad= \int_{(-\pi,\pi]}\left|\sum_{j=1}^n a_j\cdot e^{\imath\,t_j\cdot\nu} - \sum_{k=1}^m b_k\cdot e^{\imath\,t_k\cdot\nu}\right|^2 dF(\nu)\\ &\qquad= \mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j} - \sum_{k=1}^m b_k\cdot X_{t_k}\right|^2 = 0\end{aligned}$$

Linearität: Folgt aus der Definition und Wohldefiniertheit. Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\langle T\left(\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j}\right),T\left(\sum_{k=1}^m b_k\cdot X_{s_k}\right)\rangle_{L^2(F)} &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m a_j\cdot\overline{b_k}\cdot\langle e^{\imath\,t_j},e^{\imath\,s_k}\rangle_{L^2(F)}\\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m a_j\cdot\overline{b_k}\cdot\int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath\,(t_j-s_k)\cdot\nu}\,dF(\nu)\\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_j\cdot\overline{b_k}\cdot\langle X_{t_j},X_{s_k}\rangle_{L^2(\mathbb{P})}\\ &= \langle\sum_{j=1}^n a_j\cdot X_{t_j},\sum_{k=1}^m b_k\cdot X_{s_k}\rangle_{L^2(\mathbb{P})}\end{aligned}$$

□

(ii). Ausdehnen auf $\overline{\mathcal{H}}$ und $\overline{\mathcal{K}}$: s. nächster Satz

6.20 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mathbb{E}X_t = 0$ und Spektralverteilungsfunktion F.

(i). Dann existiert eine eindeutige Isometrie $T : \overline{\operatorname{span}\{X_t; t\in\mathbb{Z}\}} \to L^2(F)$, sodass $TX_t = e^{\imath t\cdot}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

(ii). Definiere $Z(\lambda) := T^{-1}(1_{(-\pi,\lambda]}(\cdot))$ für $-\pi < \lambda \le \pi$. Dann ist $(Z(\lambda))$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und die zu Z assoziierte Verteilungsfunktion ist gerade F.

Beweis: (i). Sei $Y \in \overline{\mathcal{H}}$ mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$, sodass $\|Y - Y_n\| \to 0$. Definiere

$$TY := L^2(F) - \lim_{n\to\infty} TY_n.$$

Wohldefiniertheit und Isometrie-Eigenschaften folgen über Standardargumente (Cauchy-Folgen).

(ii). Nach a) ist $Z(\lambda) \in \overline{\operatorname{span}\{X_t; t\in\mathbb{Z}\}} \subseteq L^2(\mathbb{P})$ für $\lambda \in (-\pi,\pi]$ wohldefiniert (beachte: $\overline{\mathcal{K}} = L^2(F)$). Insbesondere gilt $\langle Z(\lambda), Z(\lambda)\rangle < \infty$, da $Z(\lambda) \in L^2(\mathbb{P})$. Außerdem gibt es eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{span}\{X_t; t\in\mathbb{Z}\}$ mit $\|Y_n - Z(\lambda)\| \to 0$. Aus der Stetigkeit des Skalaproduktes folgt

$$\mathbb{E}(Z(\lambda)) = \langle Z(\lambda), 1\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Y_n, 1\rangle = 0$$

da $\mathbb{E}X_t = 0$. Für $-\pi < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \lambda$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3), Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\rangle_{L^2(\mathbb{P})}\\
&= \langle TZ(\lambda_4) - TZ(\lambda_3), TZ(\lambda_2) - TZ(\lambda_1)\rangle_{L^2(F)}\\
&= \langle 1_{(\lambda_3,\lambda_4]}, 1_{(\lambda_1,\lambda_2]}\rangle\\
&= \int_{(-\pi,\pi]} 1_{(\lambda_3,\lambda_4]}(\nu)\cdot 1_{(\lambda_1,\lambda_2]}(\nu)\, dF(\nu) = 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist $(Z(\lambda))$ ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen. Analog erhält man

$$\langle Z(\lambda) - Z(\mu), Z(\lambda) - Z(\mu)\rangle = \int_{(-\pi,\pi]} 1_{(\mu,\lambda]}(\nu)\, dF(\nu) = F(\lambda) - F(\nu)$$

für $-\pi < \mu \le \lambda \le \pi$. Nach Proposition 6.16 ist F die zu Z assoziierte Verteilungsfunktion. Zudem folgt für $\lambda = \mu + \varepsilon$, dass

$$\|Z(\mu+\varepsilon) - Z(\mu)\|^2 = F(\mu+\varepsilon) - F(\mu) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

da F rechtsstetig ist. Also ist Z rechtsstetig.

□

6.21 Satz (Spektraldarstellung eines schwach stationären Prozesses)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mathbb{E}X_t = 0$ und Spektralverteilungsfunktion F. Dann existiert ein rechtsseitig stetiger Prozess mit orthogonalen Zuwächsen $(Z(\lambda))_{\lambda\in[\pi,\pi]}$, sodass

(i). $\mathbb{E}|Z(\lambda) - Z(-\pi)|^2 = F(\lambda)$, $-\pi \le \lambda \le \pi$

(ii). $X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath t\cdot\nu}\, dZ(\nu)$, $t \in \mathbb{Z}$

Beweis: $(Z(\lambda))_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ sei der Prozess definiert in Satz 6.20 und $I : \overline{\mathcal{D}} = L^2(F) \to I(\overline{\mathcal{D}}) \subseteq L^2(\mathbb{P})$ sei die Isometrie

$$I(f) = \int_{(-\pi,\pi]} f(\nu)\, dZ(\nu)$$

Falls $f = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 1_{(\lambda_i, \lambda_{i+1}]}$, dann

$$I(f) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot (Z(\lambda_{i+1}) - Z(\lambda_i)) = T^{-1}(f).$$

Da I und T^{-1} Isometrie sind, bleibt diese Beziehung für $f \in \overline{\mathcal{D}}$ erhalten, d.h. $I = T^{-1}$. Damit

$$X_t = I(T(X_t)) = I(e^{\imath t \cdot}) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{\imath t \cdot \nu} \, dF(\nu)$$

also gilt (ii). Aussage (i) folgt aus dem Beweis von Satz 6.20(ii). □

6.22 Bemerkung Falls $(Y(\lambda))$ und $(Z(\lambda))$ Prozesse mit orthogonalen Zuwächse sind für die die Spektraldarstellung von (X_t) gilt, so

$$\mathbb{P}(\forall \lambda \in (-\pi,\pi] : Y(\lambda) = Z(\lambda)) = 1$$

d.h. die Prozesse sind ununterscheidbar.

7 Schätzen von Erwartungswerten und Autokovarianzfunktionen stationärer Prozessen

In diesem Kapitel bezeichne $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer (reell-wertiger) Prozess mit $\mathbb{E}X_t = \mu$ und Autokovarianzfunktion γ.

7.1 Schätzen von μ

Ein erwartungstreuer Schätzer für μ ist

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \in \mathbb{N}$$

7.1 Satz

Es gilt

(i). Falls $\gamma(n) \to 0$ as $n \to \infty$, dann $\mathbb{V}\overline{X}_n = \mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] \to 0$ as $n \to \infty$.

(ii). Falls $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$, dann gilt

$$n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n &= n \cdot \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\ &\overset{h=i-j}{=} \sum_{|h|<n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \cdot \gamma(h) \le \sum_{|h|<n} |\gamma(h)| \end{aligned} \tag{7.1}$$

Damit:

(i). Falls $\gamma(n) \to 0$ gilt nach dem Satz von Cesaro, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|h|<n} |\gamma(h)| = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} |\gamma(h)| = 2 \lim_{n\to\infty} |\gamma(n)| = 0$$

also $\mathbb{V}\overline{X}_n \to 0$ as $n \to \infty$.

(ii). Falls $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ gilt mit dominierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{|h|<n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right)\gamma(h) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)$$

□

7.2 Bemerkung (i). Falls $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ gilt nach Korollar 6.8

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h) = 2\pi \cdot f(0)$$

wobei f die Spektraldichte von X ist.

(ii). Sei $X_t = \mu + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}$ mit $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$, $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$. Dann gilt $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ nach Proposition 5.3 und nach Bemerkung 6.12

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n = 2\pi f(0) = \sigma_Z^2 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \right)^2$$

(iii). Falls $\gamma(n) \to 0$ as $n \to \infty$, also $\mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] \to 0$, dann insbesondere $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ nach Markov-Ungleichung.

Unter gewissen Bedingungen gilt ein central limit theorem für $\overline{X}_n$:

7.3 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein linearer Prozess von der Form

$$X_t = \mu + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \cdot Z_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $Z_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma_Z^2)$ wobei $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$ und $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \neq 0$. Dann gilt

$$\overline{X}_n \sim \mathrm{AN}\left(\mu, \frac{1}{n} v\right) :\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n} v}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

(AN: asymptotisch normalverteilt) wobei $v = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h) = \sigma^2 \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \right)^2$.

Für den Beweis benötigen wir einige Hilfsmittel:

7.4 Lemma

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_{n,j})_{n\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^k$, sodass

(i). $Y_{n,j} \xrightarrow{d} Y_j$ für $n \to \infty$

(ii). $Y_j \xrightarrow{d} Y$ für $j \to \infty$

(iii). $\lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_{n,j}| > \varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$

Dann gilt $X_n \xrightarrow{d} Y$ für $n \to \infty$.

Beweis: Es bezeichne Φ_X die charakteristische Funktion eines Zufallsvektors X. Es genügt zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi_Y(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}^k$. Mit der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\Phi_{X_n}(t) - \Phi_Y(t)| &\le |\Phi_{X_n}(t) - \Phi_{Y_{n,j}}(t)| + |\Phi_{Y_{n,j}}(t) - \Phi_{Y_j}(t)| + |\Phi_{Y_j}(t) - \Phi_Y(t)| \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{7.2}$$

(i) und (ii) implizieren

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_{Y_{n,j}}(t) - \Phi_{Y_j}(t)| = \lim_{j\to\infty} |\Phi_{Y_j}(t) - \Phi_Y(t)| = 0$$

während aus (iii) folgt, dass

$$\lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty}|\Phi_{X_n}(t)-\Phi_{Y_{n,j}}(t)|=0 \tag{$*$}$$

Für jedes $\delta > 0$ können wir j so groß wählen, dass $I_1 + I_3 \le \delta$. Damit erhält man

$$\limsup_{n\to\infty}|\Phi_{X_n}(t)-\Phi_Y(t)|<\delta \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

d.h. es gilt die Behauptung. Zu $(*)$: Es gilt

$$|e^{\imath t\cdot x}-e^{\imath t\cdot y}|=|1-e^{\imath t\cdot(y-x)}|<\delta$$

falls $|x-y|<\varepsilon=\varepsilon(\delta)$. Damit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|e^{\imath t\cdot X_n}-e^{\imath tY_{n_j}}|\\
&=\mathbb{E}|1-e^{\imath t(Y_{n,j}-X_n)}|\\
&=\mathbb{E}\left(|1-e^{\imath t(Y_{n,j}-X_n)}|\cdot 1_{[|Y_{n,j}-X_n|<\varepsilon]}\right)+\mathbb{E}\left(|1-e^{\imath t(Y_{n,j}-X_n)}|\cdot 1_{[|Y_{n,j}-X_n|\ge\varepsilon]}\right)\\
&\le \delta+2\mathbb{P}(|Y_{n,j}-X_n|>\varepsilon)\to 0
\end{aligned}$$

□

7.5 Definition Eine strikt stationäre Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt m-abhängig, wenn für alle $n\in\mathbb{Z}$ die Folgen $(X_j)_{j\le n}$ und $(X_j)_{j\ge n+m+1}$ unabhängig sind.

7.6 Satz (CLT für m-abhängige strikt stationäre Zeitreihen)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein m-abhängiger strinkt stationärer Prozess mit $\mathbb{E}X_t = 0$ und Autokovarianzfunktion $\gamma<\infty$. Falls $v_m := \sum_{|h|\le m}\gamma(h)\neq 0$, so gilt

(i). $\lim_{n\to\infty} n\cdot\mathbb{V}\overline{X}_n v_m$

(ii). $\overline{X}_n \sim \mathrm{AN}(0,\frac{v_m}{n})$, $n\to\infty$

Beweis: (i). Nach (7.1) gilt

$$\begin{aligned}
n\cdot\mathbb{V}\overline{X}_n &= \sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma(h)=\sum_{|h|\le m}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\cdot\gamma(h)\\
&\xrightarrow{n\to\infty}\sum_{|h|\le m}\gamma(h)=v_m
\end{aligned}$$

für $n>m$. *(Alternativ: Wende Lemma 7.1(ii) an.)*

(ii). Sei $k\in\mathbb{N}$, $k>2m$. Definiere für $r:=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$

$$Y_{n,k}:=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{k-m}X_j+\sum_{j=k+1}^{2k-m}X_j+\ldots+\sum_{j=(r-1)k+1}^{rk-m}X_j\right)$$

Dann ist $\sqrt{n}Y_{n,k}$ die Summe von r iid Zufallsvariablen. Jeder Summand hat den Erwartungswert 0 und Varianz

$$R_{k-m}:=\mathbb{V}(X_1+\ldots+X_{k-m})=\sum_{|j|\le m}(k-m-|j|)\cdot\gamma(j)$$

Nach dem (klassischen) zentralen Grenzwertsatz gilt

$$Y_{n,k}\xrightarrow[d]{m\to\infty}Y_k\sim N(0,\frac{1}{k}R_{k-m})$$

mit

$$\frac{1}{k}R_{k-m} = \sum_{|j|\le m}\left(1+\frac{m+|j|}{k}\right)\cdot\gamma(j) \xrightarrow{k\to\infty} v_m$$

Damit folgt $Y_k \xrightarrow{d} Y \sim N(0,v_m)$ *(z.B. nach Stetigkeitssatz von Lévy)*. Noch zu zeigen: Lemma 7.4(iii) gilt. Schreibe

$$\sqrt{n}\overline{X}_n - Y_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{r-1}\underbrace{(X_{jk-m+1}+\ldots+X_{jk})}_{\text{m Summanden}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{(X_{rk-m+1}+\ldots+X_n)}_{n-kr+m=:k(n)\,\text{Summanden}}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{V}(\sqrt{n}\overline{X}_n - Y_{n,k}) = \frac{1}{n}\left((r-1)R_m + R_{k(n)}\right).$$

Offenbar ist $R(m)$ unabhängig von n und $0 \le k(n) \le k+m$, d.h. $R_{k(n)}$ ist beschränkt (Schranke unabhängig von n). Damit folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{V}(\sqrt{n}\overline{X}_n - Y_{n,k}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\left(\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-1\right)\cdot R_m + R_{k(n)}\right)\\ &= \frac{1}{k}R_m + 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0\end{aligned}$$

Nach Tschebysheff's Ungleichung folgt Lemma 7.4(iii) und damit die Behauptung.

□

7.7 Beispiel (MA(q) mit iid Noise) Sei $X_t = \sum_{j=0}^q \Theta_j\cdot Z_{t-j}$ mit $Z_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$ und $\Theta_0 = 1$, $\sum_{j=0}^q \Theta_j \neq 0$. X_t ist q-abhängig und

$$v_q = \sum_{j=-q}^{q}\gamma(j) = \sigma^2\cdot\left(\sum_{j=0}^{q}\Theta_j\right)^2$$

Nach Satz 7.6:

$$\overline{X}_n \sim \mathrm{AN}\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\left(\sum_{j=0}^{q}\Theta_j\right)^2\right), n\to\infty$$

Beweis von Satz 7.3. Definiere für $m \in \mathbb{N}$

$$X_{t,m} := \mu + \sum_{j=-m}^{m}\psi_j\cdot Z_{t-j},\qquad t\in\mathbb{Z}$$

und

$$Y_{n,m} := \overline{X}_{n,m} := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_{t,m}.$$

$(X_{t,m})_t$ ist $2m$-abhängig und nach Satz 7.6 gilt

$$\sqrt{n}(\overline{X}_{n,m}-\mu) = \sqrt{n}(Y_{n,m}-\mu) \xrightarrow[d]{n\to\infty} Y_m \sim N\left(0,\sigma^2\left(\sum_{j=-m}^{m}\psi_j\right)^2\right).$$

Weiter gilt

$$\sigma^2\left(\sum_{j=-m}^{m}\psi_j\right)^2 \xrightarrow{m\to\infty} \sigma^2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\right)^2$$

Damit folgt $Y_m \xrightarrow[d]{m\to\infty} Y \sim N\left(0,\sigma^2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\right)^2\right)$. Außerdem gilt

$$\mathbb{V}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - Y_{n,m})) = n\cdot\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{|j|>m}\psi_j\cdot Z_{t-j}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sigma^2\left(\sum_{|j|>m}\psi_j\right)^2$$

und somit
$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - Y_{n,m})) = 0$$

Folglich ist (nach Tschebyscheff) Bedingung 7.4(iii) erfüllt, d.h. $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu) \xrightarrow[d]{n\to\infty} Y \sim N\left(0, \sigma^2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\right)^2\right)$ nach Lemma 7.4. □

7.8 Bemerkung Falls $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein Gauß-Prozess ist, so ist $\overline{X}_n$ normalverteilt und nach Gleichung (7.1)
$$\mathbb{V}\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\cdot\gamma(h)$$
also $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu) \sim N\left(0, \sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\cdot\gamma(h)\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

7.2 Schätzen von γ und ϱ

Gegeben Beobachtungen $X_1,\ldots,X_n$ einer rellwertigen stationären Zeitreihe sind klassische Schätzer für γ und ϱ
$$\hat{\gamma}(h) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t-\overline{X}_n)(X_{t+h}-\overline{X}_n), \qquad 0\le h\le n-1$$
$$\hat{\varrho}(h) := \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma(0)}}, \qquad 0\le h\le n-1$$

7.9 Bemerkung (i). $\hat{\gamma}(h)$ ist nicht erwartungstreu, jedoch asymptotisch erwartungstreu, d.h.
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\hat{\gamma}(h) = \gamma(h)$$

(ii). Die Matrix $\hat{\Gamma}_n := (\hat{\gamma}(i-j))_{i,j=1,\ldots,n}$ ist nicht-negativ definit: Setze $Y_t := X_t-\overline{X}_n$ für $t=1,\ldots,n$. Dann
$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h} Y_t\cdot Y_{t+h}$$
und $\hat{\Gamma}_n = \frac{1}{n}T\cdot T^T$ für
$$T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & Y_1 & \ldots & Y_n & 0\\ 0 & Y_1 & \ldots & Y_n & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$$
Für $a\in\mathbb{R}^n$ gilt
$$a^T\hat{\Gamma}_n\cdot a = \frac{1}{n}(a^T\cdot T)\cdot(a^T\cdot T)^T \ge 0$$

(iii). Beachte: Die Schätzung $\hat{\gamma}(h)$ wird ungenau für h nahe bei n. Z.B. $h=n-1$ benutzt nur ein Paar der Beobachtungen zum Schätzen: $\hat{\gamma}(n-1) = \frac{1}{n}Y_1Y_n$.

7.10 Satz

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess der Form
$$X_t = \mu + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\cdot Z_{t-j}, \qquad t\in\mathbb{Z}$$
mit $Z\sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$ wobei $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\psi_j|<\infty$ und $\mathbb{E}Z_t^4<\infty$. Dann gilt
$$\underline{\hat{\varrho}(h)} \sim \mathrm{AN}(\underline{\varrho(h)}, \frac{1}{n}w), \qquad h\in\mathbb{N}$$

wobei

$$\underline{\hat{\varrho}(h)} := (\hat{\varrho}(1), \dots, \hat{\varrho}(h))^T$$

und die Kovarianzmatrix $w = (w_{ij})_{i,j=1,\dots,h}$ gegeben ist durch

$$w_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\varrho(k+i)\varrho(k+h) + \varrho(k-i)\varrho(k+j) + 2\varrho(i)\varrho(j)\varrho^2(k) \tag{7.3}$$

$$-2\varrho(i)\varrho(k)\varrho(k+j) - 2\varrho(j)\varrho(k)\varrho(k+i)\Big) \tag{7.4}$$

Beweis: z.B. Brockwell & Davis, Theorem 7.2.1 □

7.11 Bemerkung (i). (7.4) heißt Formel von Bartlett.

(ii). Es gilt

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varrho(k+i) + \varrho(k-i) - 2\varrho(i)\varrho(k)\big)\cdot\big(\varrho(k+j) + \varrho(k-j) - 2\varrho(j)\varrho(k)\big)$$

(iii). Aus Satz 7.10 und (ii) folgt

$$\sqrt{n}(\underline{\hat{\varrho}(h)} - \underline{\varrho(h)}) \xrightarrow{d} \underline{Y}$$

wobei $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_h)^T$ mit

$$Y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varrho(k+i) + \varrho(k-i) - 2\varrho(i)\varrho(k)\big)N_k, \quad i = 1, \dots, h$$

mit $N_k \sim N(0,1)$ iid.

(iv). Satz 7.10 gilt auch unter leicht veränderten Bedingungen (z.B. $Z_t \sim$ IID kann ersetzt werden durch $Z_t \sim$ WN und $\mathbb{E}Z_t^6 < \infty$); siehe Brockwell & Davis.

7.12 Beispiel (i). Ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$, dann gilt $\varrho(h) = 0$ für $h \neq 0$. Formel von Bartlett:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Folglich

$$\sqrt{n}(\underline{\hat{\varrho}(h)} - \underline{\varrho(h)}) \xrightarrow{d} (N_1, \dots, N_h)^T$$

mit $N_i \sim N(0,1)$ iid, d.h. $\hat{\varrho}(1), \dots, \hat{\varrho}(h) \sim \mathrm{AN}(0, 1/n)$ und alle unabhängig.

(ii). Für den kausalen AR(1)-Prozess

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $Z \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$, $|\phi| < 1$, gilt $\varrho(h) = \phi^{|h|}$ und damit folgt aus Bartletts Formel

$$\begin{aligned} w_{ii} &= \sum_{k=1}^{i} \phi^{2i}(\phi^{-k} - \phi^k)^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty} \phi^{2k}(\phi^{-i} - \phi^i)^2 \\ &= (1-\phi^{2i})(1+\phi^2)(1-\phi^2)^{-1} - 2i\phi^{2i} \\ &\approx (1+\phi^2)(1-\phi^2)^{-1} \quad \text{für große}\, i. \end{aligned}$$

8

Schätzen der Spektraldichte

8.1 Das Periodogramm

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit Autokovarianzfunction γ und Spektraldichte f. Weiterhin sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ der Vektor der Beobachtungen. Vorstellung: $x_1, \dots, x_n$ sind Werte einer Zeitreihe mit Periode n. Definiere

$$F_n := \left\{\omega_k = \frac{2\pi k}{n}; k = -\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\} \subseteq (-\pi, \pi]$$

dann gilt $|F_n| = n$. F_n ist die Menge der Fourierfrequenzen zur Stichprobengröße n. Definiere weiter n Vektoren

$$e_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} e^{\imath\,\omega_k} & \dots & e^{\imath\, n\omega_k} \end{pmatrix}^T, \qquad k = -\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

8.1 Proposition

Die Vektoren $(e_k)_{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$.

Beweis: Es gilt

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} e^{\imath\, r(\omega_j - \omega_k)} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left(e^{\imath\,(\omega_j - \omega_k)}\right)^r \qquad = \begin{cases} 1 & j = k \\ \frac{1}{n} e^{\imath\,(\omega_j - \omega_k)} \frac{1 - e^{\imath\, n(\omega_j - \omega_k)}}{1 - e^{\imath\,(\omega_j - \omega_k)}} & j \neq k \end{cases}$$

Nach Definition gilt $e^{\imath\, n(\omega_j - \omega_k)} = e^{\imath\, 2\pi(j-k)} = 1$ und somit folgt $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$. □

8.2 Korollar

Für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$x = \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_j \cdot e_j \tag{8.1}$$

wobei

$$a_j = \langle x, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} x_t \cdot e^{-\imath\, t\omega_j}$$

Beweis: Offenbar gilt

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_k a_k \langle e_k, e_j \rangle \overset{8.1}{=} a_j.$$

Zweite Behauptung folgt durch Einsetzen. □

8.3 Definition Die Folge $(a_j)_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ heißt diskrete Fouriertransformation von x. Es gilt

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j a_j \cdot e^{\imath\, t\omega_j}$$

8.4 Definition Für $x \in \mathbb{C}^n$ und die Fourierfrequenzen $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$ definiere

$$I_n(\omega_j) := |a_j|^2 = |\langle x, e_j\rangle|^2 = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^n x_t e^{-\imath t\omega_j}\right|^2.$$

Die Funktion I_n heißt Periodogramm von x.

8.5 Bemerkung (i). $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle = \langle x, \sum_j a_j e_j\rangle = \sum_j |a_j|^2 = \sum_j I_n(\omega_j)$. Der Wert des Periodogramms an der Stelle ω_j liefert ein Maß für den Beitrag zur Länge des Vektors x (Varianz).

(ii). Nach Korollar 6.8 gilt für einen schwach stationären Prozess mit Autokovarianzfunktion γ (mit $\sum_h |\gamma(h)| < \infty$), dass

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-\imath k\cdot\lambda}$$

für $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

8.6 Proposition

Sei $x \in \mathbb{C}^n$, $(-\pi,\pi] \ni \omega_j = \frac{2\pi j}{n} \neq 0$. Dann gilt

$$I_n(\omega_j) = \sum_{|k|<n} \hat{\gamma}(k) e^{-\imath k\omega_j} \tag{8.2}$$

wobei $\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_{t+k} - m)(\overline{x}_t - \overline{m})$, $k \geq 0$, und $m = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n x_t$ und $\hat{\gamma}(-k) = \overline{\hat{\gamma}(k)}$.

Beweis: Nach Definition gilt

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^n x_t e^{-\imath t\omega_j}\right|^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^n x_t e^{-\imath t\omega_j}\right)\left(\sum_{s=1}^n \overline{x}_s e^{\imath s\omega_j}\right)$$

Es gilt

$$\sum_{t=0}^n e^{\imath 2\pi \frac{j}{n}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^n e^{\imath t 2\pi\frac{j}{n}}.$$

Wegen $\omega_j \neq 0$ folgt also

$$\sum_{t=1}^n e^{\imath t\omega_j} = 0 = \sum_{j=1}^n e^{\imath s\omega_j}$$

Damit

$$\begin{aligned} I_n(\omega_j) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\sum_{s=1}^n (x_t - m)(\overline{x}_s - \overline{m}) e^{-\imath(t-s)\omega_j} \\ &= \sum_{|k|<n} \hat{\gamma}(k) e^{-\imath k\omega_j} \end{aligned}$$

□

8.7 Bemerkung Falls $m = 0$ oder falls man $\hat{\gamma}$ ersetzt durch $\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k} x_{t+k}\overline{x}_t$, so gilt (8.2) für alle Fourierfrequenzen.

8.2 Das Periodogramm als Schätzfunktion für die Spektraldichte

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein reellwertiger schwach stationärer Prozess mit Erwartungswert μ, Autokovarianzfunktion γ, $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$. Dann hat X nach Korollar 6.8 die Spektraldichte

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) e^{-\imath\omega k}, \qquad \omega \in (-\pi, \pi].$$

f ist stetig, da die Reihe gleichmäßig konvergiert. Nach Definition 8.4 ist das Periodogramm von $(x_1, \ldots, x_n)$

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t e^{-\imath t\omega_j} \right|^2$$

für die Fourierfrequenzen $\omega_j = 2\pi \frac{j}{n} \in (-\pi, \pi]$. Nach Proposition 8.6 gilt

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t \right|^2 = n \cdot |\overline{x}_n|^2 \\ I_n(\omega_j) &= \sum_{|k|<n} \hat{\gamma}(k) e^{-\imath k\omega_j}, \qquad \omega_j \neq 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Nach dem Beweis von Proposition 8.6 kann $\overline{x}_n$ in $\hat{\gamma}(k)$ durch jede andere Konstante ersetzen werden, z.B. durch μ (falls bekannt), dann

$$I_n(\omega_j) = \sum_{|k|<n} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_{t+k} - \mu)(x_t - \mu) \right) e^{-\imath k\omega_j}. \tag{8.4}$$

für $\omega_j \neq 0$. Vergleich mit Korollar 6.8: Ein natürlicher Schätzer für $f(\omega_j)$ ist $\frac{1}{2\pi} I_n(\omega_j)$ für $\omega_j \neq 0$. Aber: Wollen $f(\omega)$ für alle $\omega \in (-\pi, \pi]$ schätzen.

8.8 Definition Das Periodogramm für beliebige $\omega \in [-\pi, \pi]$ ist

$$I_n(\omega) := \begin{cases} I_n(\omega_k) & \omega \in \left(\omega_k - \frac{\pi}{n}, \omega_k + \frac{\pi}{n}\right] \cap [0, \pi] \\ I_n(-\omega) & w \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

I_n ist gerade und stimmt für die Fourierfrequenzen mit (8.3) überein. Für $w \in [0, \pi]$ sei $g(n, \omega)$ das Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$, das am Nächsten liegt (falls es zwei gibt, das Kleinere). Für $\omega \in [-\pi, 0)$ sei $g(n, \omega) = g(n, -\omega)$ Dann gilt

$$I_n(\omega) = I_n(g(n, \omega)) \tag{8.5}$$

8.9 Proposition

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mathbb{E}X_t = \mu$ und Autokovarianzfunktion γ, sodass $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$. Dann gilt

(i). $\mathbb{E}I_n(0) - n\mu^2 \to 2\pi f(0)$ für $n \to \infty$.

(ii). Für $\omega \neq 0$ gilt $\mathbb{E}I_n(\omega) \to 2\pi f(\omega)$ für $n \to \infty$.

Falls $\mu = 0$, dann $\mathbb{E}I_n \to 2\pi f$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$.

Beweis: (i). Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_n(0) - n \cdot \mu^2 &\overset{(8.3)}{=} n \cdot (\mathbb{E}\overline{X}_n^2 - \mu^2) = n \cdot \mathbb{V}\overline{X}_n \\ &\overset{7.1(ii)}{\to} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \overset{6.8}{=} 2\pi f(0). \end{aligned}$$

(ii). Sei $\omega \in (0, \pi]$. Für n hinreichend groß gilt $g(n, \omega) \neq 0$. Mit (8.4) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_n(\omega) &= \sum_{|k|<n} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} \underbrace{\mathbb{E}[(X_t - \mu) \cdot (X_{t+k} - \mu)]}_{\gamma(k)} \right) \cdot e^{-\imath k g_n(n,\omega)} \\ &= \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) \gamma(k) \cdot e^{-\imath k g(n,\omega)} \end{aligned}$$

Da $\gamma(k)$ absolut summierbar ist, folgt gleichmäßig für $\lambda \in (0,\pi]$

$$\sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\gamma(k)\cdot e^{-\imath k\lambda} \overset{\text{glm}}{\to} \sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma(k)e^{-\imath k\lambda} = 2\pi f(\lambda)$$

Da weiter $g(n,\omega) \to \omega$ gleichmäßig, $n \to \infty$, folgt aus der Stetigkeit von f, dass $\mathbb{E}I_n(\omega) \to 2\pi f(\omega)$. Für $\mu = 0$ ist die obige Konvergenz gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$, da f gleichmäßig stetig auf $[-\pi,\pi]$.

$\square$

8.10 Lemma

Sei $\omega_j = 2\pi\frac{j}{n}$, $i,j \in \left\{-\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\dots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}\setminus\{0\}$.

(i). $\sum_{t=1}^n \cos(\omega_j t) = \sum_{t=1}^n \sin(\omega_j t) = 0$

(ii).

$$\sum_{t=1}^n \cos(\omega_j t)\cdot\cos(\omega_i t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ n & i = j = \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & i = j \neq \frac{n}{2} \end{cases}$$

(iii).

$$\sum_{t=1}^n \sin(\omega_j t)\cdot\sin(\omega_i t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 0 & i = j = \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & i = j \neq \frac{n}{2} \end{cases}$$

(iv). $\sum_{t=1}^n \cos(\omega_j t)\cdot\sin(\omega_j t) = 0$

8.11 Beispiel Definiere für$j = 1,\dots,q := \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$

$$\begin{aligned} c_j^T &:= \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{pmatrix}\cos(\omega_j) & \dots & \cos(n\omega_j)\end{pmatrix} \\ s_j^T &:= \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{pmatrix}\sin(\omega_j) & \dots & \sin(n\omega_j)\end{pmatrix} \\ e_0^T &= \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix} \\ e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}^T &= \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & \dots\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann bilden

- für n gerade $(e_0, c_1, s_1, \dots, c_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, s_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor})$
- für n ungerade $(e_0, c_1, s_1, \dots, c_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, s_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor})$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $(c_j, s_j)_{j=1,\dots,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}$ sind orthonormal und spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ auf.
Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein reellwertiger WN$(0,\sigma^2)$-Prozess und definiere für $X = (X_1,\dots,X_n)$, $j = 1,\dots,q$,

$$\begin{aligned} \alpha_n(\omega_j) &:= \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{t=1}^n X_t\cdot\cos(\omega_j t) \\ \beta_n(\omega_j) &:= \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{t=1}^n X_t\cdot\sin(\omega_j t) \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathbb{E}\alpha_n(\omega_j) = \mathbb{E}\beta_n(\omega_j) = 0$ für $j = 1, \dots, q$. Weiterhin gilt

$$\mathbb{E}\alpha_n^2(\omega_j) = \frac{2}{n}\sigma^2 \underbrace{\sum_{t=1}^n \cos^2(\omega_j t)}_{\overset{8.10}{=}\frac{n}{2}} = \sigma^2$$

$$= \mathbb{E}\beta_n^2(\omega_j)$$

$$\operatorname{cov}(\alpha_n(\omega_j), \beta_n(\omega_i)) = \frac{2}{n}\sigma^2 \sum_{t=1}^n \cos(\omega_j t)\sin(\omega_i t) \overset{8.10}{=} 0$$

$$= \operatorname{cov}(\alpha_n(\omega_j), \alpha_n(\omega_i)) = \operatorname{cov}(\beta_n(\omega_j), \beta_n(\omega_i))$$

für $i, j = 1, \dots, q$, $i \neq j$. Damit

$$\begin{aligned}
I_n(\omega_j) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^n X_t e^{-\imath t\omega_j}\right|^2 \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^n X_t \cdot e^{-\imath t\omega_j}\right)\left(\sum_{s=1}^n X_s \cdot e^{\imath s\omega_j}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^n X_t(\cos(\omega_j t) - \imath\sin(\omega_j t))\right)\cdot\left(\sum_{s=1}^n X_s(\cos(\omega_j s) + \imath\sin(\omega_j s))\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{t} X_t\cos(\omega_j t)\right)^2 + \left(\sum_{s=1}^n X_s\cdot\sin(\omega_j s)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

da sich die gemischten Terme zu 0 addieren. Damit

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2}\alpha_n^2(\omega_j) + \frac{1}{2}\beta_n^2(\omega_j)$$

Speziell: Falls $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ iid $N(0,\sigma^2)$, dann sind $\alpha_n(\omega_j)$ und $\beta_n(\omega_j)$, $j = 1, \dots, q$, iid $N(0,\sigma^2)$. Durch Nachrechnen folgt: $I_n(\omega_j)$, $j = 1, \dots, q$, sind iid und exponentialverteilt mit Erwartungswert $\sigma^2 = 2\pi f(\omega_j)$.

8.12 Proposition

Sei $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$ reellwertig. $I_n(\omega)$, $\omega \in [-\pi,\pi]$, sei das in (8.5) definierte Periodogramm von $(Z_1, \dots, Z_n)$.

(i). Für $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < \pi$ konvergiert $(I_n(\lambda_1), \dots, I_n(\lambda_m))^T$ für $n \to \infty$ gegen einen Vektor von iid $\operatorname{Exp}(\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen.

(ii). Falls $\mathbb{E}(Z_1^4) = \eta\cdot\sigma^4 < \infty$ und $\omega_j = 2\pi\frac{j}{n} \in [0,\pi]$, so gilt

$$\mathbb{V}I_n(\omega_j) = \begin{cases} \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + 2\sigma^4 & \omega_j \in \{0,\pi\} \\ \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + \sigma^4 & \omega_j \in (0,\pi) \end{cases}$$

und $\operatorname{cov}(I_n(\omega_j), I_n(\omega_k)) = \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4$ für $\omega_j \neq \omega_k$.

Beweis: (i). Setze

$$\alpha_n(\omega_j) := \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{t=1}^n Z_t\cdot\cos(\omega_j t)$$

$$\beta_n(\omega_j) := \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{t=1}^n Z_t\cdot\sin(\omega_j t)$$

und $\alpha_n(\lambda) := \alpha(g(n,\lambda))$, $\beta_n(\lambda) := \beta(g(n,\lambda))$. Da

$$I_n(\lambda_j) = \frac{1}{2}\Big(\alpha_n^2(\lambda_j) + \beta_n^2(\lambda_j)\Big)$$

nach Beispiel 8.11, genügt es zu zeigen

$$(\alpha_n(\lambda_1), \beta_n(\lambda_1), \ldots, \alpha_n(\lambda_m), \beta_n(\lambda_m)) \sim \mathrm{AN}(0, \sigma^2 E_{2m}) \tag{8.6}$$

wobei E_{2m} die $2m \times 2m$-Einheitsmatrix bezeichnet. Betrachte $\alpha_n(\lambda)$ für $\lambda \in (0, \pi)$. Für n groß gilt $g(n, \lambda) \in (0, \pi)$. Verwende das CLT von Lindeberg für unabhängige nicht identisch verteilte Zufallsvariablen. Dazu: Checke Lindeberg-Bedingung. Sei $\varepsilon > 0$, dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{E}\left(\cos^2(g(n,\lambda)t) Z_t^2 1_{\{|\cos(g(n,\lambda)t)Z_t| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}\right) &\leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{E}(Z_t^2 1_{\{|Z_t| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}) \\ &= \mathbb{E}(Z_1^2 1_{\{|Z_1| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Damit $\alpha_n(\lambda) \sim \mathrm{AN}(0, \sigma^2)$. $\beta_n(\lambda) \sim \mathrm{AN}(0, \sigma^2)$ folgt analog. Sei $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi$. Für n groß gilt $g(n, \lambda_j) \in (0, \pi)$ für $j = 1, \ldots, m$. Da die Kovarianzmatrix von $(\alpha_n(\lambda_1), \beta_n(\lambda_1), \ldots, \alpha_n(\lambda_m), \beta_n(\lambda_m))$ durch $\sigma^2 E_{2m}$ gegeben ist (da Z iid wie in Beispiel 8.11) folgt die gemeinsame Konvergenz von (8.6) nach Satz von Cramer-Wold.

(ii). Nach Definition gilt

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} Z_s Z_t e^{\imath\omega_j(t-s)}$$

Damit

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(I_n(\omega_j)\cdot I_n(\omega_k)) \\ &\quad= \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\mathbb{E}(Z_s Z_t Z_u Z_v) e^{\imath\omega_j(t-s)} e^{\imath\omega_k(u-v)} \\ &\quad= \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + \sigma^4\left(1 + \frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{\imath(\omega_j+\omega_k)t}\right|^2 + \frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{\imath(\omega_k-\omega_j)t}\right|^2\right)\end{aligned}$$

unter Benutzung von

$$\mathbb{E}(Z_s Z_t Z_u Z_v) = \begin{cases}\eta\sigma^4 & s = t = u = v \\ \sigma^4 & s = t \neq u = v \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Mit $\mathbb{E}I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \sigma^2$ folgt

$$\mathrm{cov}(I_n(\omega_j), I_n(\omega_k)) = \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + \frac{\sigma^4}{n^2}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} e^{\imath(\omega_j+\omega_k)t}\right|^2 + \left|\sum_{t=1}^{n} e^{\imath(\omega_k-\omega_j)t}\right|^2\right)$$

wobei der letzte Klammerausdruck

$$= \begin{cases}2n^2 & \omega_j = \omega_k = 0 \vee \omega_j = \omega_k = \pi \\ n^2 + 0 & \omega_j = \omega_k \in (0, \pi) \\ 0 & \omega_j \neq \omega_k\end{cases}$$

nach Lemma 8.10.

□

8.13 Bemerkung Proposition 8.12 kann auf lineare Prozesse der Form

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j \cdot Z_{t-j}$$

mit $Z_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$ und $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ erweitert werden: Nach Bemerkung 6.12 ist die Spektraldichte von X gegeben durch

$$f_X(\lambda) = |\psi(e^{-\imath\lambda})|^2 f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|\psi(e^{-\imath\lambda})|^2.$$

Entsprechend zeigt man für das Periodogramm

$$I_{n,X}(\omega_k) = |\psi(e^{-\imath\omega_k})|^2 I_{n,Z}(\omega_k) + R_n(\omega_k)$$

mit $\max_{\omega_k} \mathbb{E}(R_n(\omega_k)) \to 0$ für $n \to \infty$ (Brockwell & Davis, Theorem 10.3.1). Damit lässt sich folgern, dass (falls $f(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in (-\pi,\pi]$) für $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi$ gilt

$$(I_{n,X}(\lambda_1)). \ldots, I_{n,X}(\lambda_m)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (E_1, \ldots, E_m)$$

wobei $(E_i)_{i=1,\ldots,m}$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}E_i = 2\pi f(\lambda_i)$ (Brockwell & Davis, Theorem 10.3.2).

8.14 Bemerkung Es folgt aus Propostion 8.12 und Bemerkung 8.13, dass das Periodogramm kein konsistenter Schätzer für die Spektraldichte ist. (Varianz der Exponentialverteilung ist gleich dem Erwartungswert.)

8.3 Das geglättete Periodogramm

8.15 Definition Definiere $\hat{f}_n(\omega = \hat{f}_n(g(n,\omega))$ durch

$$\hat{f}_n(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\le m_n} W_n(k) I_n(\omega_{j+k})$$

für $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in (-\pi,\pi]$ wobei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und $(W_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gewichtsfunktionen ist, sodass

(i). $m_n \to \infty$ und $\frac{m_n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ (z.B. $m_n = \sqrt{n}$)

(ii). $W_n(k) = W_n(-k) \ge 0$ für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii). $\sum_{|k|\le m_n} W_n(k) = 1$ für $n \in \mathbb{N}$

(iv). $\sum_{|k|\le m_n} W_n^2(k) \to 0$ für $n \to \infty$

Falls $\omega_{j+k} \notin [-\pi,\pi]$, definiere $I_n(\omega_{j+k})$ über periodische Fortsetzung von I_n mit Periode 2π. Ebenso setze $f(\omega)$ für $\omega \notin [-\pi,\pi]$ periodisch fort. $\hat{f}_n$ heißt geglättetes Periodogramm (discrete spectral average estimator).

Beachte: Für nahe beieinander liegende Frequenzen sind die $\hat{f}_n(\omega_j)$ korreliert, da auf dieselben $I_n(\omega_{j+k})$ zurückgegriffen wird.

8.16 Satz

Sei $X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j Z_{t-j}$ mit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$, $\mathbb{E}Z_1^4 = \eta\eta\sigma^4 < \infty$ und $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j||j|^{\frac{1}{2}} < \infty$. Ist $\hat{f}_n$ das geglättete Periodogramm für die Spektraldichte f von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, so gilt für $\lambda,\omega \in [0,\pi]$:

(i). $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{f}_n(\omega) = f(\omega)$, also asymptotisch erwartungstreu

(ii). Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{|j|\le m_n} W_n^2(j) \right)^{-1} \mathrm{cov}(\hat{f}_n(\omega), \hat{f}_n(\lambda)) = \begin{cases} 2f^2(\omega) & \omega = \lambda \in \{0,\pi\} \\ f^2(\omega) & \omega = \lambda \in (0,\pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (nur (i)). Es gilt

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}\hat{f}_n(\omega) - f(\omega)| \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left| \sum_{|k|\le m_n} W_n(k) \left(\frac{1}{2\pi}\mathbb{E}I_n(g(n,\omega)+\omega_k) - f(g(n,\omega)+\omega_k) + f(g(n,\omega)+\omega_k) - f(\omega) \right) \right|
\end{aligned}
$$

Unter der Bedingung 8.15(i) gilt

$$\max_{|k|\le m_n} |g(n,\omega)+\omega_k-\omega| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da $g(n,\omega)\to\omega$. Mit der Stetigkeit von f folgt für $\varepsilon>0$ beliebig und n_ε groß genug, sodass

$$\max_{|k|\le m_{n_\varepsilon}} |f(g(n_\varepsilon,\omega)+\omega_k) - f(\omega)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Proposition 8.9 gilt weiter für große n (da $\mathbb{E}X_t=0$)

$$\max_{|k|\le m_n} \left| \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}I_n(g(n,\omega)+\omega_k) - f(g(n,\omega)+\omega_k) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\sum_{|k|\le m_n} W_n(k) = 1$ nach Definition 8.15(iii) folgt insgesamt

$$|\mathbb{E}\hat{f}_n(\omega) - f(\omega)| \le \sum_{|k|\le m_n} W_n(k) \big(|\ldots| + |\ldots|\big) \le \varepsilon$$

für n groß genug. □

8.17 Bemerkung Aus Satz 8.16(ii) folgt $\mathbb{V}\hat{f}_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da weiter $\mathbb{E}\hat{f}_n(\omega)\to f(\omega)$ folgt für $\hat{f}_n(\omega)$ Konvergenz im quadratischen Mittel. Man kann sogar zeigen, dass $\hat{f}_n(\omega)$ im quadratischen Mittel *gleichmäßig* auf $[-\pi,\pi]$ gegen $f(\omega)$ konvergiert, also

$$\sup_{-\pi\le\omega\le\pi} \mathbb{E}|\hat{f}_n(\omega) - f(\omega)|^2 \to 0$$

Daraus folgt insbesondere die stochastische Konvergenz, also die Konsistenz des Schätzers $\hat{f}_n$.

8.18 Beispiel Eine übliche Wahl der Gewichte ist

$$W_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{2m_n+1}, & |k|\le m_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann

$$\sum_{|k|\le m_n} W_n^2(k) = (2m_n+1)\frac{1}{(2m_n+1)^2} = \frac{1}{2m_n+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} (2m_n+1)\mathbb{V}\hat{f}_n(\omega) = \begin{cases} 2f^2(\omega), & \omega\in\{0,\pi\}, \\ f^2(\omega), & \omega\in(0,\pi) \end{cases}$$

nach Satz 8.16. In der Praxis ist n fest, also m_n fest.

- m_n klein: Glättung gering, Varianz von $\hat{f}_n$ groß.
- m_n groß: $\hat{f}_n(\omega)$ hängt von weit entfernten Frequenzen (kann Erwartungstreue verfälschen), Varianz von $\hat{f}_n$ klein.

Man experimentiert daher mit m_n und den Gewichten.

8.19 Bemerkung Obige Betrachtungen gelten für X mit Erwartungswert 0. In der Praxis eine gegebene Zeitreihe Y daher erst auf Erwartungswert 0 reduzieren. Die Periodogramme von Y, $Y-\mu$ und $Y-\bar{\mu}$ unterscheiden sich allein in ihrem Wert in 0. Um $f(0)$ zu schätzen wird daher der Wert des Periodogramms in 0 ignoriert und stattdessen

$$\hat{f}_n(0) = \frac{1}{2\pi}\left(W_n(0)I_n(\omega_1) + 2\sum_{k=1}^{m_n} W_n(k)I_n(\omega_{k+1})\right)$$

verwendet. Zudem wird in $\hat{f}_n(\omega_j)$, $j \neq 0$, jedes $I_n(0)$ durch $2\pi\hat{f}(0)$ ersetzt.

Stichwortverzeichnis

m-abhängig, 40

ARMA-Gleichung, 17
Autokorrelationsfunktion, 13
Autokovarianzfunktion, 5

Backshiftoperator, 10
Bartlett, Formel von, 44

charakteristisches Polynom, 17

Differenzoperator, 10

Fourierfrequenz, 45
Fouriertransformation
    diskret, 46

Herglotz, Satz von, 25

invertierbar, 19
Irrfahrt, 4

kausal, 17

log-return, 11

Moving average, 7, 14

orthogonal
    Zuwachs, 30

Periodogramm, 46, 47
    geglättet, 52
Prozess
    ARCH-, 15
    ARMA-, 17
    autoregressiv, 14
    binär, 4
    Gauß-, 6
    linear, 16
    Verzweigungs-, 4

Spektraldichte, 25
Spektralverteilungsfunktion, 25
stationär
    schwach, 5, 24
    strikt, 5

Transferfunktion, 29

Verteilungsfunktion
    assoziiert, 31
vorhersagbar, 23

weißes Rauschen, 13
Wold-Zerlegung, 23

Zeitreihe, 3