ZUSAMMENFASSUNG ANALYSIS III

Gioele Zardini

1. Laplace Transform

Definition der Laplace Transform

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt}$$

Inverse Laplace Transform $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$

Bemerkungen:

- Die Inverse Laplace Transform ist **eindeutig** bestimmt!
- Eine „gute" Funktion ist so falls:

(a) $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.
(b) $s\mathcal{L}(f)(s)$ is bounded as $s \to \infty$.
(c) $\mathcal{L}(f)$ is continuous for all $s \in \mathbb{R}$ such that $\alpha \le s \le \beta$, where $k < \alpha$.
(d)

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right) ds = \int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-st} f(t)\, ds\right) ds\,.$$

(e)

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right) = -\int_0^\infty t e^{-st} f(t)\, dt = -\mathcal{L}(tf(t))\,.$$

Eigenschaften der Laplace Transform

Linearität	$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \cdot \mathscr{L}\{g(t)\}$
Ähnlichkeit	$\mathscr{L}\{\frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right)\} = F(s \cdot a) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s \cdot a)$
s-shift	$\mathscr{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a) = F(s-a)$
t-shift	$\mathscr{L}\{f(t-a) \cdot u(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$ $\mathscr{L}\{f(t) \cdot u(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathscr{L}\{f(t+a)\}$
t-Ableitung	$\mathscr{L}\{f'\} = s \cdot \mathscr{L}\{f\} - f(0)$ $\mathscr{L}\{f''\} = s^2 \cdot \mathscr{L}\{f\} - s \cdot f(0) - f'(0)$ $\mathscr{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n \cdot \mathscr{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \cdot f^{(k)}(0)$
t-Integral	$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$
s-Ableitung	$\mathscr{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(s) = -[\mathscr{L}\{f\}]'$
s-Integral	$\mathscr{L}\{\frac{1}{t} \cdot f(t)\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}$
t-Faltung	$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f\} \cdot \mathscr{L}\{g\}$
s-Faltung	$\mathscr{L}\{f \cdot g\} = \mathscr{L}\{f\} * \mathscr{L}\{g\}$
Anfangswert*	$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \mathscr{L}\{f(t)\}$
Endwert*	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s \cdot \mathscr{L}\{f(t)\}$

* Man muss prüfen, ob diese Grenzwerte existieren, bevor man diese Gleichungen verwendet!

Laplace Tabelle

Typ	Funktion	Laplace Transform
Impuls	$\delta(t)$	1
	$\delta(t-a)$	e^{-as}
Step	$u(t) \cdot 1$	$\frac{1}{s}$
	$u(t-a)$	$\frac{1}{s} \cdot e^{-as}$
Polynome	$u(t) \cdot t$	$\frac{1}{s^2}$
	$u(t) \cdot t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponential	$u(t) \cdot e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
	$u(t) \cdot t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
Trigonometrisch	$u(t) \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
	$u(t) \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Hyperbolisch	$u(t) \cdot \cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
	$u(t) \cdot \sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Step und Impuls

Heaviside Funktion	$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < a \\ 1, & \text{falls } t > a \end{cases}$
Dirac Delta Funktion	$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } t = a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1$
Sifting	$\int_0^\infty f(t) \cdot \delta(t-a)dt = f(a)$

und $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$

Faltung/ Convolution

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau}$$

Eigenschaften der Faltung

- $f * g = g * f$
- $f * (g+h) = f * g + f * h$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * 0 = 0 = 0 * f$
- $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$
- Im Allgemeinen gilt
  - $f * 1 \neq f$
  - $f * f \ngeq 0$

Bemerkungen:

- Dirac Delta ist keine Funktion: „generalized" function or „ditribution"
- $$\mathcal{L}^{-1}[F(\sqrt{s})] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty \xi e^{-\frac{\xi^2}{4t}} f(\xi) d\xi$$
  - $\mathcal{L}^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}] = \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
  - $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
- $$\mathcal{L}\left[\frac{d^3 f}{dt^3}\right] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s\dot{f}(0) - \ddot{f}(0)$$
- Für **AWP** mit Laplacetransform gilt:

(i) Laplacetransformierte der einzelnen Summenden bilden. *(Ableitungsregel verwenden)*

(ii) Anfangsbedingungen einsetzen, nach $F(s)$ auflösen.

(iii) Rücktransformieren. *(PBZ / Faltungssatz verwenden)*

Bsp. 1

✏ Lösen Sie die folgende ODE mittels Laplace - Transformation:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t \quad , \quad x(0) = a$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad sX(s) - \underbrace{X(0)}_{=a} + 2X(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2(2+s)} + \frac{a}{2+s} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad x(t) = t * e^{-2t} + a \cdot e^{-2t}$$

Der Faltung ergibt

$$\begin{aligned} t * e^{-2t} &= \int_0^t (t-t')e^{-2t'}dt' = \left[\frac{te^{-2t'}}{-2}\right]_0^t - \int_0^t t' \, e^{-2t'} dt' \\ &= \left[\frac{te^{-2t'}}{-2}\right]_0^t - \left[\frac{t'e^{-2t'}}{-2}\right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-2t'}}{-2}dt' \\ &= \frac{t}{2} + \left[\frac{e^{-2t'}}{4}\right]_0^t = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} \end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Funktion

$$x(t) = (a + \frac{1}{4})e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

Bsp. 2

✏ Lösen Sie die folgende ODE mittels Laplace - Transformation:

$$\dot{y} + y = cos(t) \quad , \qquad y(0) = 1$$

$$\dot{y} + y = cos(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s+1)} - \frac{1}{s+1}$$

Die Partialbruchzerlegung des Bruches erfolgt mit dem Ansatz für komplex konjugierte Nullstellen, also $\frac{s}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1}$ und liefert $s = (As+B)(s+1) + (s^2+1)(C)$. Der Koeffizientenvergleich führt auf $\frac{s}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$ und somit gilt

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}$$

Die Laplace - Rücktransformation liefert das gesuchte Resultat

$$y(s) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{3}{2}e^{-t}$$

2. Fourier Analysis

Es gilt

- f(x) ist periodisch falls „meistens" gilt $f(x) = f(x+p)$
- p ist nicht unbedingt die kleinste reelle Zahl so dass es gilt!
-

Die Funktionen $\sin(cx)$, $\cos(cx)$, $\tan(cx)$, $\cos(\pi x)$, $e^{\sqrt{2}ix}$, $e^{(ix)}$, $\sin(x)\cos(x)$, $\frac{1}{\sin(x)}$ sind periodisch.

Die Funktionen $\sin(x^2)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(cx)$, $\cosh(x)$, $\arcsin(\pi x)$, $e^{i\sqrt{x}}$ sind nicht periodisch.

Die Funktionen $\tan(x)$, $\cos^2(x)$, $\sin(2x)$ sind π-periodisch.

Die Funktion $\sin(mx)$ ist $\frac{2\pi}{m}$-periodisch.

Sind f, g π-periodisch, dann auch $f + g$.

Ist $f(x)$ π-periodisch, so ist $sin(f(x))$ ebenfalls π-periodisch.

Ist $f(x)$ a-periodisch und $g(x)$ b-periodisch, so ist $f(g(x))$ b-periodisch, $g(f(x))$ aber a-periodisch[1].

Ist $f(x)$ n-periodisch und $g(x)$ k-periodisch, $n > k$, so ist $f(x)g(x)$ mindestens $(kgV(n,k))$-periodisch.

Ist $f(x)$ u-periodisch und $g(x)$ v-periodisch,, so ist $f(x) + g(x)$ $(kgV(u,v))$-periodisch.

Orthogonalität

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx = 0, \ \textit{for every } n, m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$$

Grenzen sind egal, wichtig ist, Periode: 2π

$$e^{\pm\pi in} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Allgemein

Für $f(x)$ 2L-periodisch.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

Euler-Formel : Berechnen der Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{aligned}$$

f ist gerade falls $f(x) = f(-x)$
und ungerade falls $f(x) = -f(-x)$

Für gerade Funktionen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

Mit der Eulerformel

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{aligned}$$

Für ungerade Funktionen

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

Mit der Eulerformel

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L g(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

- Gerade/ungerade: (symm. bezüglich y-Achse/0)
- even, then $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 2\int_0^L g(x)$
  odd, then $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0$.

Eine beliebige Funktion lasst sich als Summe einer geraden und ungeraden Funktion schreiben: f(x)=fg(x)+fu(x)=((f(x)+f(-x))/2)+ ((f(x)-f(-x))/2)

$+$	f_g	f_u
f_g	g	-
f_u	-	u

$\cdot / \div$	f_g	f_u
f_g	g	u
f_u	u	g

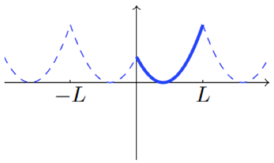
$\circ$	f_g	f_u
f_g	g	g
f_u	g	u

Die Funktionen $\cos(ax)$, $\cosh(ax)$, $\sin(x^2)$, $\sin(x)\tan(x)$, $Re(e^{i\sin(x)})^2$ sind gerade.
Die Funktionen $\sin(ax)$, $\tan(ax)$, $\sinh(ax)$, $\tanh(ax)$, $\sin(x)\cos(x)$, $\sinh(\sin(x))$ sind ungerade.
Das Produkt von 2 geraden Funktionen ist auch eine gerade Funktion.
Das Produkt von 2 ungeraden Funktionen ist eine gerade Funktion.
Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.
Ist f gerade, dann ist f' ungerade und f'' wieder gerade.
$\sin(\sin(x)) \to$ ungerade und 2π-periodisch.
$\sin(\cos(x)) \to$ gerade und 2π-periodisch.
$\cos(\cos(x)) \to$ gerade und π-periodisch.
$\cos(\sin(x)) \to$ gerade und π-periodisch.
$\tan(\sin(x)) = \frac{\sin(\sin(x))}{\cos(\sin(x))} \to$ ungerade , $p = 2\pi$.
$\tan(\cos(x)) = \frac{\sin(\cos(x))}{\cos(\cos(x))} \to$ ungerade , $p = 2\pi$.
$\sinh(x^n + x^{n-1} + \dots)$ ist **gerade**, falls n gerade und **ungerade** falls n ungerade
$\cosh(x^n + x^{n-1} + \dots)$ ist immer gerade
Sei f gerade. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ungerade.

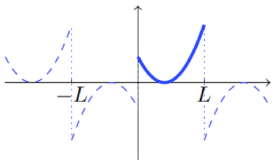
Half-Range Expansion

Die Funktion $f(x)$ ist nur auf einem Intervall $(0, L)$ definiert. Oft ist es einfacher, die Funktion $2L$-periodisch fortzusetzen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten

Gerade Fortsetzung



Ungerade Fortsetzung



Wenn die Funktion nicht auf $[0, L]$, sondern auf einem anderen Intervall definiert ist, muss die entsprechende Funktion für das Intervall $[0, L]$ erst durch Verschieben und Spiegeln hergeleitet werden.

Gerade Fortsetzung: Gegeben $f(x)$ auf Intervall $0 < x < L$:

- Definiere $f(x) = f(-x)$ auf $-L < x < 0$

Bsp 1: $f(x) = -x + \pi$ *auf* $0 < x < \pi, \to f(x) = f(-x) = \pi + x$ *auf* $-\pi < x < 0$.
Bsp 2: $f(x) = x$ *auf* $0 < x < 3$: *Setze f zu eine gerade f, p = 4*
→ Sei fg die gesuchte Fortsetzung und $0 < x < 2$:

$$fg(x) = fg(-x) = fg(-x+4) = -x+4$$

Also $fg(x) = \begin{cases} 4-x, & 0 < x < 2 \\ 4+x, & -2 < x < 0 \end{cases}$

Ungerade Fortsetzung: Gegeben $f(x)$ auf Intervall $0 < x < L$:

- Definiere $f(x) = -f(-x)$ auf $-L < x < 0$

Bsp 1: $f(x) = x^2, 0 < x < 2$: *Setze f zu ungerade f, p = 4*
→ $f(x) = -f(-x) = -x^2$ *auf* $-2 < x < 0$

Also $fg(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 2 \\ -x^2, & -2 < x < 0 \end{cases}$

Addition zweier Funktionen

Falls zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ die **gleiche Periode** (hier: 2L) haben, gilt

$$\boxed{(f+g) = (a_0 + \tilde{a_0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n + \tilde{a_n}) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + (b_n + \tilde{b_n}) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]}$$

Unstetigkeit

Falls $f(x)$ 2L-periodisch, stückweise stetig ist, sowie der rechts- und linksseitiger Limes aller Unstetigkeitsstellen x_0 existiert, dann gilt

$$\boxed{f(x) = FR\{f\}(x) \qquad \forall x \text{ wo } f \text{ stetig}}$$

Und für alle Unstetigkeitsstellen x_0

$$\boxed{FR\{f\}(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right)}$$

Komplexe Fourierreihe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{\left(i \frac{n\pi}{L} x\right)}}$$

Definitionen $\quad e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad , \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Koeffizienten

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \qquad n \in \mathbb{Z}}$$

komplex → reell	**reell → komplex**
$a_0 = c_0$	$c_0 = a_0$
$a_n = c_n + c_{-n}$	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n)\ , \quad n > 0$
$b_n = i \cdot (c_n - c_{-n})$	$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n)$

Bemerkungen:

- In den Formeln für die Fourier - Koeffizienten können und sollen jeweils die folgenden Umformungen vollzogen werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- **Koeffizientenvergleich**
Falls wir Funktionen wie $\sin^3(x)(= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x))$ oder $\sin 2x$ soll man **nicht Reihen-Entwickeln**. Durch **Koeffizientenvergleich** kann man z.B. beim ersten Term nachvollziehen: $a_1 = \frac{3}{4}$; $a_3 = -\frac{1}{4}$; $a_n = 0$

Fourier Integral

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]\, d\omega}$$

Wobei $\quad A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v) dv$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v) dv$$

Unstetigkeit

Falls $f(x)$ stückweise stetig ist, die rechte und linke Ableitung existiert sowie $f(x)$ absolut integrabel (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$) ist, dann gilt

$$\boxed{f(x) = FI(f)(x) \qquad \forall x \text{ wo } f \text{ stetig}}$$

Und für alle Unstetigkeitsstellen x_0

$$\boxed{FI(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right)}$$

Bemerkungen:

- Wir annehmen dass f ***absolut integrierbar*** ist, nämlich
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$
- Das ***Dirichlet's Unstetigkeitsfaktor*** ist definiert als
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$
- Den ***Sine Integral*** ist definiert als
$$Si(u) = \int_0^{u} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega$$

Fourier Cosinus Integral

$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x) d\omega \quad f(x)$ gerade $\quad \Rightarrow B(\omega) = 0$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(\omega v) dv}$$

Fourier Sinus Integral

$f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x) d\omega \quad f(x)$ ungerade $\quad \Rightarrow A(\omega) = 0$

$$\boxed{B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(\omega v) dv}$$

Fourier Transform

Falls $f(x)$ integrabel und stückweise stetig auf endlichen Intervallen ist, dann existiert die Fourier Transform von f.

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}\, dv\,.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}\, dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(w)e^{iwx}\, dw\,. \end{aligned}}$$

Inverse Fourier transform

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx}\, dw\,,}$$

*Fourier Cosinus- & Sinustransformierte

$$\hat{f}_C(\omega) = \mathscr{F}_C(f)(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx$$
$$\hat{f}_S(\omega) = \mathscr{F}_S(f)(\omega) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx$$

Eigenschaften

Linearität	$\mathscr{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\cdot\mathscr{F}\{f(t)\} + \beta\cdot\mathscr{F}\{g(t)\}$
x-Shift	$\mathscr{F}\{f(x-a)\}(y) = e^{-iay}\cdot\mathscr{F}\{f(x)\}$
y-Shift	$\mathscr{F}\{e^{iax}\cdot f(x)\}(y) = \mathscr{F}\{f(x)\}(y-a) = \hat{f}(y-a)$
Modulation	$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{f}(y-a)\right\}(x) = e^{iax}\cdot f(x)$

Ableitungsregeln

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{F}\{f'(x)\}(y) &= iy\cdot\mathscr{F}\{f(x)\}(y) \\ \mathscr{F}\{f''(x)\}(y) &= -y^2\cdot\mathscr{F}\{f(x)\}(y)\end{aligned}}$$

Bedingungen $\quad f$ stetig
$f(x)\to 0$ wenn $|x|\to\infty$
f' bzw. f'' integrabel

Faltungssatz

Falls $f(x)$ integrabel sowie stückweise stetig und beschränkt auf endlichen Intervallen ist, dann existiert die Fourier Transform von f.

$$\boxed{\mathscr{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\cdot\mathscr{F}\{f\}\cdot\mathscr{F}\{g\}}$$
$$\boxed{\mathscr{F}\{f\} * \mathscr{F}\{g\} = \sqrt{2\pi}\cdot\mathscr{F}\{f\cdot g\}}$$

Nützliche Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

$$\int_{R^n} e^{-ax^2}e^{-ikx}dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{R^n} e^{-(ak^2+bk+c)}dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

Fourier Tabelle

Funktion	Integral der Fourier Transform*	
$e^{-a\|x\|}$	$\int_{-\infty}^{0} e^{ax-iyx}dx + \int_0^{\infty} e^{-ax-iyx}dx$	$= \frac{2a}{a^2+y^2}$
e^{-ax^2}	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-iyx}dx$	$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4a}}$
$e^{-a(x-b)^2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2-iyx}dx$	$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}-iyb}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\cdot e^{-iyx}dx$	$= \pi\cdot e^{-\|y\|}$

* Um die Fourier Transform der Funktion zu erhalten, mit Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ multiplizieren.

Partial Differential Equations (PDE)

Lösung von ODE : $y(t)$ $\qquad$ Lösung von PDE : $u(t,x,y,z)$

Superpositionsprinzip : $\quad u_1$ und u_2 sind 2 Lösungen einer homogenen linearen PDE $\Rightarrow u = c_1u_1 + c_2u_2$ ist auch eine Lösung.

Bemerkungen:

- Eine PDE ist ***linear*** genannt, falls u und ihre Ableitungen nur mit Vielfachheit 1 vorkommen
- Eine lineare PDE ist ***homogen*** genannt falls jeden Term u oder ihre Ableitungen enthält
- PDE ***order*** = grad von die höchste Ableitung

Allg. PDE 2. Ordnung mit 2 Variablen

$$\boxed{Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x,y,u_x,u_y)}$$

hyperbolisch	$AC - B^2 < 0$	Wellengleichung
parabolisch	$AC - B^2 = 0$	Wärmegleichung
elliptisch	$AC - B^2 > 0$	Laplacegleichung

Separationsansatz für PDEs

Vorgehen

1. Ansatz $\boxed{u(x,t) = X(x)\cdot T(t)}$ in PDE einsetzen
2. Man erhält 2 ODEs : eine für $X(x)$, eine für $T(t)$
3. ODEs lösen **(Separation der Variablen)**
4. $X(x)$ und $T(t)$ in $u(x,t)$ einsetzen

Bsp:

Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
$\Rightarrow u_{tt} = X(x) \cdot \ddot{T}(t)$, $u_{xx} = X''(x) \cdot T(t)$
$\Rightarrow \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ (const)
$\Rightarrow \ddot{T}(t) = \lambda T(t)$, $\quad X''(x) = \frac{\lambda}{c^2} X(x)$
$\Rightarrow X(x) = \dots$, $T(t) = \dots \quad \Rightarrow u(x,t) = X(x)T(t)$

PDE als ODE lösen

Betrachte x als Variable

Bsp 1:

$u = u(x,y)$, $u_{yy} = 4xu_y \quad \Rightarrow u_{yy} - 4xu_y = 0$
$\Rightarrow \lambda^2 - 4x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4x$
$$u(x,y) = C_1(x)e^{\lambda_1 y} + C_2(x)e^{\lambda_2 y} = C_1(x) + C_2(x)e^{4xy}$$

Bsp 2:

$u = u(x,y)$, $u_{xy} = -u_x$
Setze $p := u_x \quad \Rightarrow p_y = \frac{dp}{dy} = -p$
$\Rightarrow \int \frac{1}{p} dp = -\int dy \quad \Rightarrow p(x,y) = c(x)e^{-y} = u_x$
$u(x,y) = \int c(x)e^{-y} dx = C(x)e^{-y} + g(y)$

Ansätze zum Lösen von PDEs

- **1-Dim. Wellengleichung** (hyperbolisch)

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

▷ Mit RB & AB — Separationsansatz (SA)/ Fourierreihe
▷ Nur mit AB — D'Alembert/ Normalform

- **2-Dim. Wellengleichung** (hyperbolisch)

$$\boxed{u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})}$$

▷ Mit RB & AB — Doppelter SA/ Fourierreihe
▷ Alternativ — Laplace-Transform

- **1-Dim. Wärmegleichung** (parabolisch)

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

▷ Mit RB & AB — SA/ Fourierreihe
▷ Nur mit AB — Fouriertransform/ Fourierintegral

- **2-Dim. Wärmegleichung** (parabolisch, nur zeitlich konst.)

$$\boxed{u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0}$$

▷ Rechteck — SA/ Fourierreihe
▷ Kreisscheibe — Wie Rechteck, mit Polarkoordinaten

- **Quasilineare PDE 2. Ordnung in 2 Variablen**

$$\boxed{Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)}$$

▷ Methode der Charakteristiken

1-Dim Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

Randbedingungen $\quad u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \quad$ t>0
Anfangsbedingungen $\quad u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \quad$ 0<x<L

Lösung mit Fourier-Reihen

Vorgehen

1. Separationsansatz
2. 2 ODEs; lösen, so dass RB erfüllt sind
3. Superposition: Zusammensetzen, so dass AB erfüllt sind

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Mit $\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$
$\quad b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

Sonderfall $\quad g(x) = 0$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(f^*(x-ct) + f^*(x+ct))}$$

Mit f^* : ungerade Halfrange-Expansion von f ($2L$-periodisch)

Bsp: $\quad u_{tt} = u_{xx}$, $\quad$ RB : $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
AB : $u(x,0) = 0$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0.01x, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0.01(\pi - x), & \text{falls } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \sin(nx)$
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \overset{!}{=} f(x) = 0 \quad \Rightarrow a_n = 0$
$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin(nx) \overset{!}{=} g(x)$
$\Rightarrow b_n n =$ Fourier Sinus Koeffs von $g(x)$
$\Rightarrow b_n = \dots \quad u(x,t) = \dots$

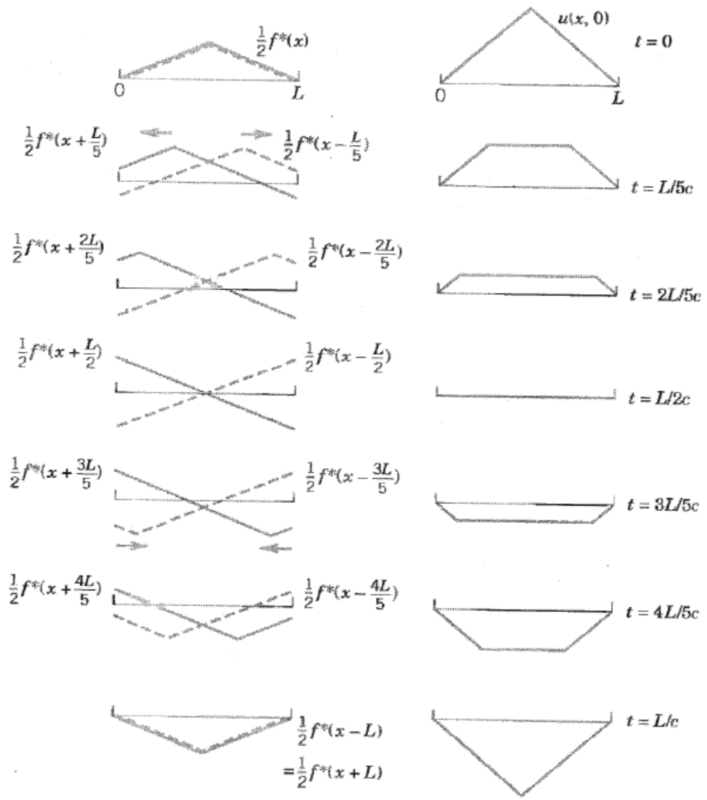


Fig. 288. Solution $u(x, t)$ in Example 1 for various values of t (right part of the figure) obtained as the superposition of a wave traveling to the right (dashed) and a wave traveling to the left (left part of the figure)

Lösung mit d'Alembert

Funktioniert ohne Randbedingungen!

Idee: Variablensubstitution : $\quad \boxed{v = x + ct} \quad \boxed{w = x - ct}$

Allgemeine Lösung muss von folgender Form sein
$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct) \quad \text{mit } \Phi, \Psi \text{ beliebig.}$$

Mit Hilfe der AB lassen sich Φ und Ψ explizit bestimmen

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds}$$

$$u_t = u_v v_t + u_w w_t = u_v c - u_w c\,,$$
$$u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + u_w\,,$$

$$u_{tt} = u_{vv} v_t c + u_{vw} w_t c - u_{wv} v_t c - u_{ww} w_t c = u_{vv}c^2 - u_{vw}c^2 - u_{wv}c^2 + u_{ww}c^2 = u_{vv}c^2 - 2u_{vw}c^2 + u_{ww}c^2\,,$$
$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}\,.$$

Nützlich für die Herleitung der Lösung!

Methode der Charakteristiken

Für quasilineare PDE 2. Ordnung in 2 Variablen

Vorgehen

1. Bringe PDE auf die Form
$$\boxed{Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)}$$
2. Typ bestimmen (hyperbolisch/ parabolisch/ elliptisch)
3. Charakteristische Gleichung $\rightarrow$ ODE für $y = y(x)$
$$\boxed{A\left(y'\right)^2 - 2B\left(y'\right) + C = 0}$$
Falls A, B, C konstant : $\quad y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \lambda_{1,2}$
$$\boxed{y_1 = \lambda_1 \cdot x + c_1\ , \quad y_2 = \lambda_2 \cdot x + c_2}$$
4. Bestimme Charakteristiken
Die Lsg der ODE nach der jeweiligen Konstante c auflösen
   - $\Phi(x,y) = \text{const.} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = y - \lambda_1 \cdot x$
   - $\Psi(x,y) = \text{const.} = c_2 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x,y) = y - \lambda_2 \cdot x$
5. Definiere neue Variable
   - Hyperbolisch $\quad v := \Phi \qquad w := \Psi$
   - Parabolisch $\quad v := x \qquad w := \Phi = \Psi$
   - Elliptisch $\quad v := \frac{1}{2}(\Phi + \Psi) \qquad w := \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)$
6. PDE in neuen Variablen schreiben $\rightarrow$ Normalformen
! *Beachte dabei die Kettenregeln* !
   - Hyperbolisch $\quad u_{vw} = F(x,y,u,u_x,u_y)$
   - Parabolisch $\quad u_{vv} = F(x,y,u,u_x,u_y)$
   - Elliptisch $\quad u_{vv} + u_{ww} = F(x,y,u,u_x,u_y)$
7. Löse PDE : $\quad u(v,w) = \ldots$
8. Schreibe die Lösung in x, y : $\quad u(x,y) = \ldots$

Bsp:

1) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$
2) $A = 1\ ,\ B = -1\ ,\ C = 1 \qquad AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ p.
3) $(y')^2 + 2y' + 1 = 0 \qquad \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y = -x + c$
4) $\Phi(x,y) = \Psi(x,y) = y + x \qquad$ (=const)
5) $v = x \qquad w = \Phi = y + x$
6) Ableitungen in PDE 1) einsetzen $\quad \rightarrow u_{vv} = 0$
7) $u_v = f_1(w) \qquad \Rightarrow u(v,w) = f_1(w) \cdot v + f_2(w)$
8) $u(x,y) = f_1(y+x) \cdot x + f_2(y+x)$

$\rightarrow$ in PDE aus 1) einsetzen $\quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_{vv} = 0$

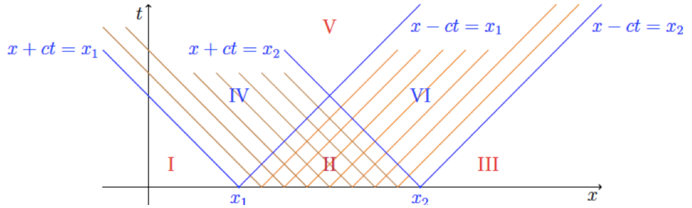
Bemerkung:

- Keine RB kann z.B. sein eine unendliche Saite!

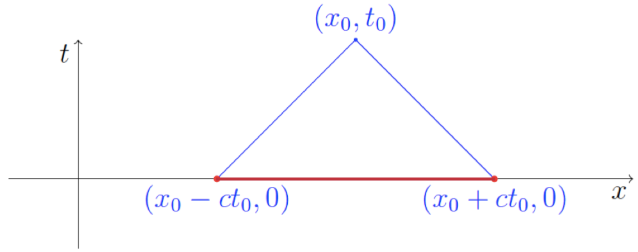
Kettenregel für $u = v(x,y) \cdot w(x,y)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_x} &= v_x \cdot u_v + w_x \cdot u_w \qquad \boldsymbol{u_y} = v_y \cdot u_v + w_y \cdot u_w \\
\boldsymbol{u_{xx}} &= v_x^2 u_{vv} + v_{xx} u_v + w_x^2 u_{ww} + w_{xx} u_w + 2 v_x w_x u_{vw} \\
\boldsymbol{u_{xy}} &= v_x v_y u_{vv} + v_{xy} u_v + w_x w_y u_{ww} + w_{xy} u_w \\
&\quad + (v_y w_x + v_x w_y) u_{vw}
\end{aligned}$$

Bemerkungen:



- In I,III,V, verschwindet u identisch
- In IV nur die linksbewegende Welle hat Einfluss auf die Saite und in VI nur die rechtsbewegende
- In II beide Wellen haben Einfluss auf die Saite
- Die ***Einflussregion*** von $[x1{,}2]$ ist die Ver. von II,IV und VI



- $[x0 - ct0, x0 + cto]$ ist den ***Abhängigkeitsbereich***
- Falls man f oder g außerhalb dieses Bereich wechselt, hat das keinen Einfluss auf die Werte von u(x0,t0)

1-Dim Wärmegleichung

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

Randbedingungen	$u(0,t) = 0$	$u(L,t) = 0$
Anfangsbedingungen	$u(x,0) = f(x)$	$(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho})$

Bemerkungen:

- K *ist die thermische* ***Leitfaehigkeit***
- σ *ist die* ***spezifische Waerme***
- ρ *ist die* ***Dichte*** *des Stabes*
- Annahme: Temperatur an Extremitäten ist 0

Lösung mit Fourier-Reihen

1. Separationsansatz
2. 2 ODEs; lösen, so dass RB erfüllt sind (zuerst die mit x)
3. Superposition: Zusammensetzen, so dass AB erfüllt sind

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\lambda_n^2 t}}$$

Mit $\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \quad , \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

Bsp:

$u_t = Du_{xx}\ , \quad$ RB : $u(0,t) = u(L,t) = 0$
AB : $u(x,0) = x(x-L)$
SA : $u(x,t) = X(x)T(t) \quad \Rightarrow \dot{T}X = D \cdot TX''$
$\Rightarrow \frac{\dot{T}}{DT} = \frac{X''}{X} = \lambda \qquad$ wegen RB : $\lambda = -p^2 < 0$
$X(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \quad$ RB : $A = 0\ ,\ p = \frac{n\pi}{L}$
$\Rightarrow X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$\dot{T} = -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -\lambda_n^2 \quad \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}$
$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{!}{=} x(x-L)$
$\Rightarrow b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x(x-L)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Lösung mit Fourier-Integral

Keine Randbedingungen!
$\rightarrow$ Unendliche Ausdehnung, kein Rand

Vorgehen

1. Separationsansatz $\quad u(x,t) = X(x)T(t)$
ODEs lösen (ohne RB)
$\Rightarrow X(x) = A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\ , \quad T(t) = e^{-c^2p^2t}$
2. Zusammensetzen $\quad u(x,t) = \int_0^{\infty} u_p(x,t)dp \quad 0 \le p \in \mathbb{Z}$
$$\boxed{u(x,t) = \int_0^{\infty} [A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]\, e^{-c^2p^2t} dp}$$
3. Anfangsbedingungen und Fourier-Integral
$$\boxed{u(x,0) = \int_0^{\infty} A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)dp \overset{!}{=} f(x)}$$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv \qquad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv$$

Umformungen

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^{\infty} e^{-c^2p^2t} \cdot \cos(px - pv)dp\right] dv \\
&= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left(-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right) dv
\end{aligned}$$

Lösung mit Fourier-Transform

Vorgehen

1. Fourier-Transform (in x) der PDE → ODE (in t)
   $\mathscr{F}\{u_t(x,t)\}(y) = c^2\mathscr{F}\{u_{xx}(x,t)\}(y)$
   $u(x,t) \xrightarrow{\mathscr{F}\{.\}} \hat{u}(y,t)$
$$\boxed{\hat{u}_t(y,t) = c^2\left(-y^2\hat{u}(y,t)\right)}$$
2. ODE (in t) lösen $\quad \hat{u}_t = -c^2y^2\hat{u}$
   $\Rightarrow \hat{u}(y,t) = C(y)e^{-c^2y^2t}$ $\quad$ mit $C(y) = \hat{u}(y,0)$
3. Anfangsbedingungen einsetzen
   $u(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \hat{u}(y,0) = \hat{f}(y)$
$$\boxed{\hat{u}(y,t) = \hat{f}(y)e^{-c^2y^2t}}$$
4. Rücktransformation $\quad u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\hat{u}(y,t)\}$
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)e^{-c^2y^2t}e^{iyx}dy}$$

2-Dim Wärmegleichung (zeitlich konstant)

$$\boxed{u_t = c^2(u_{xx}+u_{yy}) = 0}$$

Dirichlet Problem	$u(x,y)$ auf Region $\mathcal{R}$ bestimmen
Randbedingungen	$u(x,y)$ auf Rand $\partial\mathcal{R}$ gegeben
Anfangsbedingungen	keine

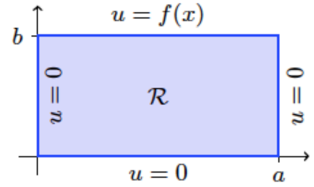
Bemerkungen:

- u ist nicht von t abhängig : ***Laplace Gleichung***
- Falls u ist „prescribed“ auf die Grende δR *of* R: ***Dirichlet***
- Falls u_n in die Richtung n normal zu δR ist „prescribed“ auf δR : ***Neumann***
- Falls u ist „prescribed“ auf ein Teil von δR und u_n auf eine andere Teil von δR: ***Robin***
- Diese Bemerkungen sind z.B. für eine Elliptische Gleichung gültig, von Grenzbedingungen abhängig.

Lösung mit Fourier-Reihen

$$\boxed{u_{xx} = -u_{yy}}$$

Randbedingungen $\quad u(0,y) = 0 \quad u(a,y) = 0$
$\quad u(x,0) = 0 \quad u(x,b) = f(x)$



Vorgehen

1. Separationsansatz $\quad u(x,y) = X(x)Y(y)$
2. Randbedingungen
   $X(0) = 0 \quad X(a) = 0 \quad Y(0) = 0 \quad X(x)Y(b) = f(x)$
3. ODEs lösen
$$\boxed{\frac{X''}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -p^2}$$
$$\begin{aligned}
&X'' + p^2X = 0 && \Rightarrow X_n(x) = B_n\sin\left(\tfrac{n\pi}{a}x\right), \quad p = \tfrac{n\pi}{a}\\
&\ddot{Y} - \left(\tfrac{n\pi}{a}\right)^2Y = 0 && \Rightarrow Y_n(y) = C_ne^{\frac{n\pi}{a}y} + D_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\\
&\text{RB} : D_n = -C_n && \Rightarrow Y_n(y) = 2C_n\sinh\left(\tfrac{n\pi}{a}y\right)
\end{aligned}$$
4. Zusammensetzen und letzte RB
   $u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \overset{!}{=} f(x)$
$$\boxed{a_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx}$$
$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

Lösung mit Polarkoordinaten (Dirichlet with symmetries)

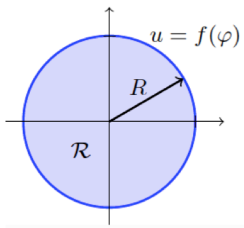
Polarkoordinaten $\quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad x = r\cdot\cos\varphi$
$\quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad y = r\cdot\sin\varphi$

Laplace-Operator

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}}$$

PDE

$$\boxed{\Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathcal{R} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 < R\}}$$



Randbedingungen
▷ Polarkoordinaten
$u(R,\varphi) = f(\varphi)$
▷ Kartesische Koordinaten
$u(x,y) = f(x,y)\,|\,x^2+y^2 = R$

Vorgehen

1. Separationsansatz
   $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \quad$ mit $\Phi(\varphi)$ 2π-periodisch
$$\boxed{\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\cdot\frac{R'}{R} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda}$$
2. ODEs lösen
   - $\Phi'' = -r^2\lambda\Phi$
     Da 2π-periodische Funktion : $\quad \lambda = \mu^2 > 0$
     $\Phi(\varphi) = A\cos(r\mu\varphi) + B\sin(r\mu\varphi)$; $\quad r\mu \overset{!}{=} n$ für $n \in \mathbb{N}$
$$\boxed{\Phi_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi)B_n\sin(n\varphi)}$$
   - $r^2R_n'' + rR_n' = \mu^2r^2R_n = n^2R_n$
     Ansatz : $\quad R(r) = Cr^k$
     $\Rightarrow r^2k(k-1)r^{k-2} + rkr^{k-1} = n^2r^k \quad \Rightarrow k = \pm n$
     $\Rightarrow R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}$
     $D_n = 0$ da $u(r,\varphi)$ beschränkt auf $\mathcal{R}$ $\quad (\to u(0,\varphi))$
$$\boxed{R_n(r) = C_n\cdot r^n}$$
3. Lösungen zusammensetzen
$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot r^n\cos(n\varphi) + b_n\cdot r^n\sin(n\varphi)}$$
4. Randbedingungen und Fourier-Reihe
   $u(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\cos(n\varphi) + b_nR^n\sin(n\varphi) \overset{!}{=} f(\varphi)$
   Da $f(\varphi)$ 2π-periodisch → Koeff. von FR von $f(\varphi)$
$$\boxed{\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi\\
a_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi\\
b_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi
\end{aligned}}$$

Poisson-Formel K ist den Poisson Integral Kernel

K

Durch Umformen erhält man (für beliebiger Radius R)

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)}d\psi}$$

Bemerkung:

$$\mathscr{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(w) = \frac{\mathrm{i}w}{(2a)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4a}}.$$

2-Dim Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})}$$

Randbedingungen $u(x,y) = 0$ auf Rand von $\mathcal{R}$ $(\partial\mathcal{R})$
Anfangsbedingungen $u(x,y,0) = f(x,y)$, $u_t(x,y,0) = g(x,y)$

Lösung mit doppelter Fourier-Reihe

Für eine rechteckige Membran
Randbedingungen $u(0,y,t) = 0 \quad u(a,y,t) = 0$
$u(x,0,t) = 0 \quad u(x,b,t) = 0$

Vorgehen

1. Separationsansatz
$u(x,y,t) = H(x,y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$
$H\ddot{T} = c^2(H_{xx}T + H_{yy}T) \quad \Rightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2T} = \frac{1}{H}(H_{xx} + H_{yy}) = -\nu^2$
$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} = -\nu^2 \quad \Rightarrow \frac{1}{X}X_{xx} = -\left[\frac{1}{Y}Y_{yy} + \nu^2\right] = -k^2$

2. ODEs mit Randbedingungen lösen

- $X_{xx} + k^2X = 0$

$$\boxed{X_m(x) = B_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)}$$

mit $k = \frac{m\pi}{a}$, $\quad m = 1, 2, \ldots$

- $Y_{yy} + p^2Y = 0$, $\quad$ mit $p^2 = \nu^2 - k^2$

$$\boxed{Y_n(y) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

mit $p = \frac{n\pi}{b}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

- $\ddot{T} + \lambda^2 T = 0$
mit $\lambda = c\nu = c\sqrt{k^2 + p^2} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} =: \lambda_{nm}$

$$\boxed{T_{nm}(t) = E_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + F_{nm}\sin(\lambda_{nm}t)}$$

3. Lösungen zusammensetzen

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + B_{nm}\sin(\lambda_{nm})) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

- $Y_{yy} + p^2Y = 0$, $\quad$ mit $p^2 = \nu^2 - k^2$

$$\boxed{Y_n(y) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

mit $p = \frac{n\pi}{b}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

- $\ddot{T} + \lambda^2 T = 0$
mit $\lambda = c\nu = c\sqrt{k^2 + p^2} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} =: \lambda_{nm}$

$$\boxed{T_{nm}(t) = E_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + F_{nm}\sin(\lambda_{nm}t)}$$

3. Lösungen zusammensetzen

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{nm}\cos(\lambda_{nm}t) + B_{nm}\sin(\lambda_{nm})) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

4. Anfangsbedingungen und doppelte Fourier-Reihe

- $u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$
$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \overset{!}{=} f(x,y)$

2x Fourier-Reihe

◦ $K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$

◦ $A_{nm} = \frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{d}y$

$\Rightarrow A_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- $u_t(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}\lambda_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$
$u_t(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\tilde{K}_m(y)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \overset{!}{=} g(x,y)$

2x Fourier-Reihe

◦ $\tilde{K}_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$

◦ $B_{nm} = \frac{1}{\lambda_{mn}}\cdot\frac{2}{b}\int_0^b\tilde{K}_m(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{d}y$

$\Rightarrow B_{nm} = \frac{4}{\lambda_{nm}ab}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

PDEs mit Laplace-Transform

Gegeben PDE für $w(t,x)$, i.A. für $t \geq 0$

Vorgehen

1. Auf beiden Seiten der PDE die Laplace-Transform $\mathscr{L}\{.\}$ in t anwenden.
2. Benutze Ableitungsregeln, Anfangsbedingungen und $\mathscr{L}\{w_x\} = \frac{d}{dx}\mathscr{L}\{w\}$
$\Rightarrow$ ODE in x für $W(x,s) = \mathscr{L}\{w(x,t)\}$
3. Löse ODE, verwende RB $\quad \Rightarrow W(x,s) = \ldots$
4. Gesuchte Lösung $w(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(x,s)\}$

Bsp:

$w_{xx} = 100w_{tt} + 100w_t + 25w$, $\quad w$ beschränkt $\forall x > 0$
Randbedingung : $\quad w(0,t) = sin(t)$
Anfangsbedingung : $\quad w(x,0) = 0$, $\quad w_t(x,0) = 0$
$\Rightarrow W_{xx} = 100s^2W - 100sW + 25W = (10s+5)^2W$
$\Rightarrow W(x,s) = C_1(s)e^{-(10s+5)x} + C_2(s)e^{(10s+5)x}$
Beschränkt $\Rightarrow C_2(s) = 0$
RB : $\quad W(x=0,s) = \mathscr{L}\{w(0,t)\} = \frac{1}{s^2+1} = C_1(s)$
$\Rightarrow W(x,s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-(10s+5)x}$
$\Rightarrow w(x,t) = e^{-5x}\sin(t-10x)u(t-10x)$

Harmonische Funktionen

Definition u ist harmonisch, falls $\Delta u = 0$.

1-Dim :	$u_{xx} = 0$
2-Dim :	$u_{xx} + u_{yy} = 0$

Eigenschaften

1. **Maximumprinzip** Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann nimmt f sein Maximum (oder Minimum) auf dem Rand $\partial\mathcal{R}$ an, ausser falls f überall konstant ist.
2. **Mittelwertseigenschaft** (in 2-Dim) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Betrachte Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (x,y), so dass der ganze Kreis in U liegt. Dann gilt

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos(\varphi), y + r\sin(\varphi))d\varphi}$$

Bemerkungen:

- u ist auf eine Region D harmonisch → u ist Lösung zu Dirichlet Problem
- Harmonische Fkt. ist in jeder Punkt = Mittelwert von Werte auf jedes Kreis mit Mittelpunkt in diesem Punkt

Well-posed and ill-posed Probleme

Die Lösungen von DGL verhalten sich ziemlich gut (man kann die Eindeutigkeit einer Lösung eines AWP und Ihre Abhängigkeit von Anfangsbedingungen beweisen). Man kann nicht das für PDEs sagen!

Wir nennen ein Problem ***well-posed*** falls:

- *Existence*: Das Problem hat eine Lösung
- *Uniqueness*: Die Lösung ist eindeutig
- *Stability*: Die Lösung ist von A.B. und R.B. abhängig

Falls eine diese Bedingungen nicht erfüllt ist: ***ill-posed***

Bsp:

$u_x = 2xy + 1$
$u_y = x^2 + y^2$
$u(0,0) = 0$

Die Lösung ist $u(x,y) = x^2y + x + C + \frac{y^3}{3}$ (Punkt 1)
u, v Lösungen. Es gilt: $u_x - v_x = 0$ $u_y - v_y = 0$
Es folgt: $u - v = C$ aber $u(0,0) = v(0,0) = 0$, d.h. $C = 0$
Deswegen: eindeutige Lösung und Punkt 2 ist erfüllt
Man betrachtet $0 < \epsilon, \epsilon', \epsilon'' \ll 1$
$u_x = 2xy + 1 + \epsilon$ $u_y = x^2 + y^2 + \epsilon'$ $u(0,0) = \epsilon''$
Endlösung: $u_\epsilon(x,y) = x^2y + x + \frac{y^3}{3} + \epsilon x + \epsilon' y + \epsilon'''$
Dann gilt $\max_{x,y\in[0,1]}(|u - u_\epsilon|) \leq \epsilon + \epsilon' + \epsilon''$
Punkt 3 erfüllt