Regelungstechnik I
Übungsstunde 4

https://n.ethz.ch/~jgeurts/
jgeurts@student.ethz.ch

Letzte Woche
Lösung des Differentialgleichungssystem

Lösung des Differentialgleichungssystem:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) \cdot d\rho$$

wobei $x_0 = x(0)$ die Anfangsbedingung ist.

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x(0)}_{I} + \underbrace{\int_0^t c \cdot e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) \cdot d\rho}_{II} + \underbrace{d \cdot u(t)}_{III}$$

I: Natürliche Antwort vom System (unabhängig von $u(t)$).

II: Einfluss von $u(t)$ auf die Systemdynamik

III: Direkte Antwort auf den Ausgang (Feedthrough).

$$e^{A \cdot t} = \mathbb{1} + A \cdot t + \frac{1}{2}(A \cdot t)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(A \cdot t)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Letzte Woche
Stabilität

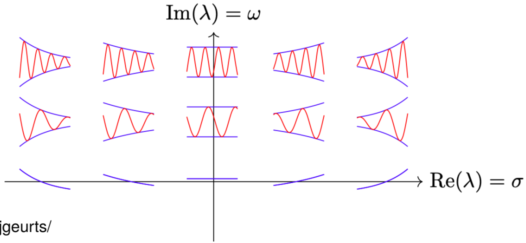
Eigenwert Transformation:

$$\tilde{A} = V^{-1} \cdot A \cdot V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \qquad \tilde{x}(t) = e^{\tilde{A} \cdot t} \cdot \tilde{x}_0$$

Resultierender Zustand / Systemantwort:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_1(0) \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_2(0) \\ \dots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)) \cdot \tilde{x}_1(0) \\ e^{\sigma_2 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_2 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)) \cdot \tilde{x}_2(0) \\ \dots \\ e^{\sigma_n \cdot t} \cdot (\cos(\omega_n \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) \cdot \tilde{x}_n(0) \end{bmatrix}$$

Wir sehen jetzt das für $t \to \infty$ alle Internen Zustände mit Re$(\lambda_i) > 0$ divergieren.



Letzte Woche
Stabilität

$\rightarrow$ Die Eigenwerte von A geben uns Aufschluss über die Stabilität des System.

- **asymptotisch stabil** dann und nur dann (iff) wenn alle Eigenwerte einen Realteil $\sigma_i < 0$ haben.
- **stabil** wenn alle Eigenwerte einen Realteil $\sigma_i < 0$ haben und nur einer $\sigma_i = 0$.[1]
- **instabil** wenn **ein** Eigenwert einen Realteil $\sigma_i > 0$ hat.

Die Stabilität wurde bezüglich des linearisierten System berechnet. Für das nicht lineare System gilt.

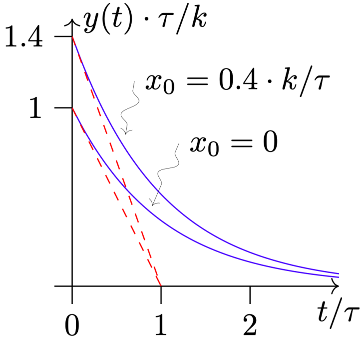
Lineares System:	Nicht Lineares System:
Asymptotisch Stabil	Stabil
Stabil (Grenzstabil)	Keine Aussage mögliche
Instabil	Instabil

[1] Ihr müsst wissen, dass wenn mehr als ein EW $\sigma_i = 0$ haben, kann man keine Aussage machen.

Letzte Woche
Systemantwort auf Testsignale

Impulsantwort:

$$y_\delta(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(x_0 + \frac{k}{\tau}\right)$$

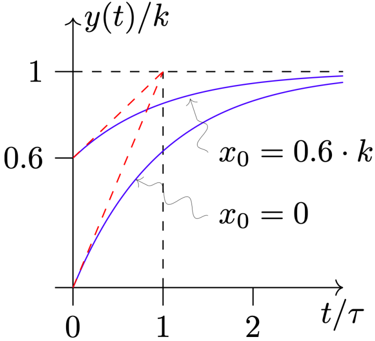


- Die Tangente für $t = 0$ schneidet die Zeitachse beim Zeitpunk τ.
- y-Wert bei $t = 0$ ist $y(t = 0) = x_0 + \frac{k}{\tau}$.
- für $t \to \infty$ geht $y(t \to \infty) = 0$.

Letzte Woche
Systemantwort auf Testsignale

Sprungantwort:

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



- Die Tangente für $t = 0$ schneidet die Sprungantwort $k \cdot h(t)$ beim Zeitpunk τ.
- y-Wert bei $t = 0$ ist $y(t = 0) = x_0$.
- für $t \to \infty$ geht $y(t \to \infty) = k$.

Diese Woche

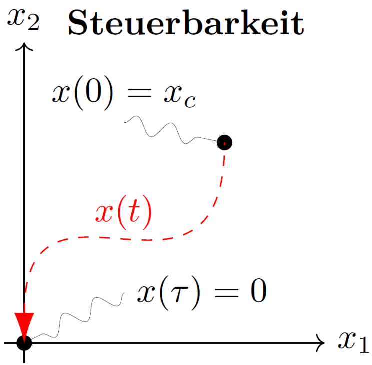
- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit
- Koordinatentransformation
- Zustandsraumzerlegung

Steuerbarkeit

Steuerbarkeit

Definition:

*Ein Punkt $x_c \in \mathbb{R}^n$ heisst **steuerbar**, wenn ein bestimmter Input $u(x_c)$ existiert, damit man von der Anfangsbedingung $x(0) = x_c$ in endlicher Zeit τ in den Ursprung $x(\tau) = 0$ gelangt.*

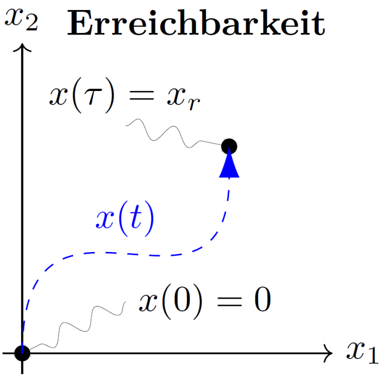


*Sind alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ steuerbar, so ist das System **vollständig steuerbar**.*

Steuerbarkeit
Erreichbarkeit

Definition:

> *Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ heisst **erreichbar**, wenn ein bestimmter Input $u(x_r)$ existiert, damit man von der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ in endlicher Zeit τ zum Zustand $x(\tau) = x_r$ gelangt.*



*Sind alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ erreichbar, so ist das System **vollständig erreichbar**.*

Für LTI Systeme gilt: Erreichbarkeit = Steuerbarkeit

Berechnung:

Wir berechnen die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}_n$ und betrachten ihren Rang.

$$\boxed{\mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} b, & A \cdot b, & A^2 \cdot b, & \dots, & A^{n-1} \cdot b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$$

Hat die Matrix $\mathcal{R}_n$ vollen Rang = n, so ist das System vollständig steuerbar.

Stabilisierbarkeit:

Sind alle nicht steuerbaren Zustände asymptotisch stabil, so ist das System potentiell stabilisierbar[2]*.*

Beispiel 1:

Sei das folgende System gegeben.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = 0$$

[2] Wie man das bestimmt kommt später.

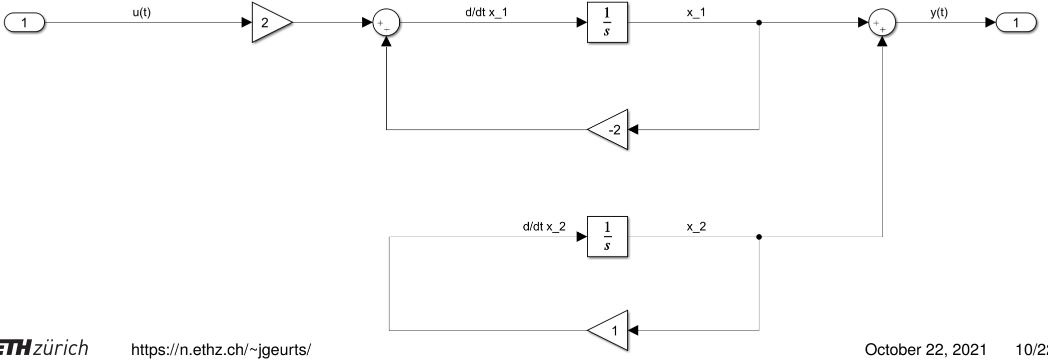
Steuerbarkeit
Beispiel 1

Steuerbarkeitsmatrix:

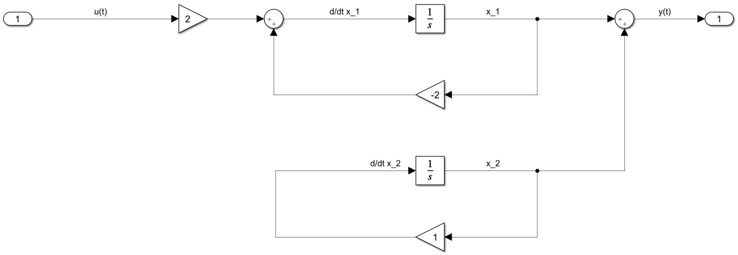
$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad n = 1$$

$\rightarrow$ nicht voller Rang, also nicht steuerbar.

Das Signalflussbild dieses System.



Steuerbarkeit
Beispiel 1



Was fällt uns auf?

- Wir können durch $u(t)$ keinen Einfluss auf den Zustand x_2 nehmen

$\rightarrow$ Das System ist nicht vollständig Steuerbar

- Besonders Kritisch da der Zustand x_2 **instabil** ist.

Beobachtbarkeit

Definition:

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn man mit der Messung des Ausgangsignals $y(t), t \in [0, \tau], \tau > 0$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ schliessen kann.

Einfacher aber nicht ganz richtig:

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn jeder Zustand direkt oder indirekt mit dem Ausgang "verbunden" ist.

Detektierbarkeit:

Sind alle nicht beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil, so ist das System potentiell detektierbar[3].

[3] Wie man das bestimmt kommt später.

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeit

Berechnung:

Wir berechnen die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}_n$ und betrachten ihren Rang.

$$\boxed{\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$$

Hat die Matrix $\mathcal{O}_n$ vollen Rang = n, so ist das System vollständig beobachtbar.

Beispiel 2:

Sei das folgende System gegeben.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = 0$$

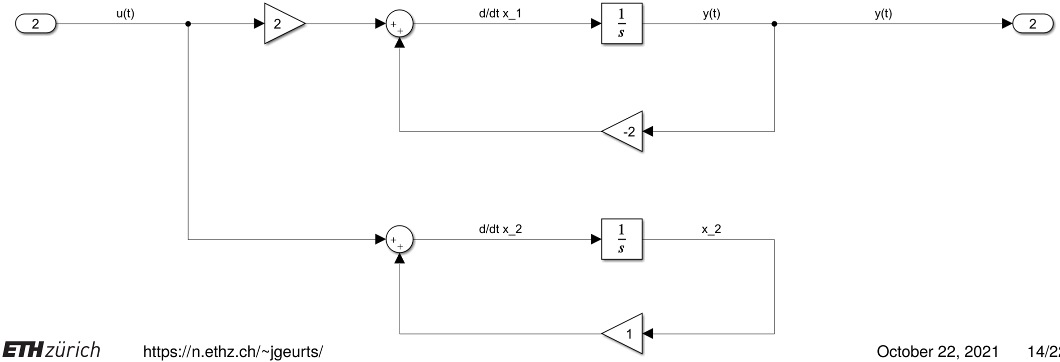
Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit
Beispiel 2

Beobachtbarkeitsmatrix:

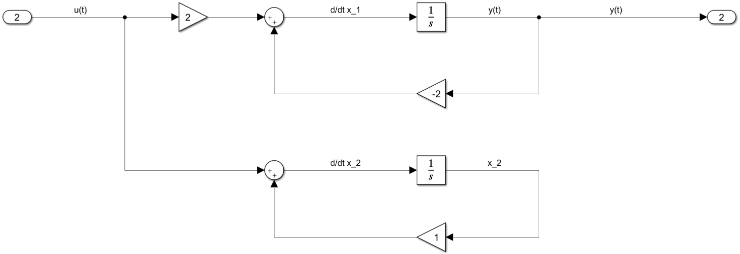
$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad n = 1$$

$\rightarrow$ nicht voller Rang, also nicht beobachtbar.

Das Signalflussbild dieses System.



Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit
Beispiel 2



Was fällt uns auf?

- Der Zustand x_2 hat keinen direkten oder indirekten Einfluss auf den Output

$\rightarrow$ Das System ist nicht vollständig Beobachtbar

- Besonders Kritisch da der Zustand x_2 **instabil** ist.

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Sonstiges

Wenn das lineare System um den Gleichgewichtspunkt vollständig steuerbar bzw. beobachtbar ist, so ist das nicht lineare System um diesen Gleichgewichtspunkt auch vollständig steuerbar bzw. detektierbar.

Wenn das lineare System um den Gleichgewichtspunkt nicht vollständig steuerbar bzw. beobachtbar ist, so kann man keine Aussage über das nicht lineare System machen.

Das System ist stabilisierbar wenn es potentiell stabilisierbar *und* potentiell detektierbar ist.

Ist das System vollständig steuerbar und beobachtbar, so ist dies die minimale Realisierung des System[4].

[4] Was das ist kommt später.

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zusammengefasst

Kochrezept zur Berechnung der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit:

1. Aus der Zustandsgleichung die Matrizen $\{A, b, c, d\}$ bestimmen (Meist schon gegeben).
2. Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ und Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ berechnen.
3. Den Rang der Matrizen bestimmen.
4. Richtiger Fall wählen:
   - Voller Rang = vollständig steuerbar bzw. beobachtbar
   - Nicht voller Rang = nicht vollständig steuerbar bzw. beobachtbar
5. Falls nicht voller Rang:
   5.1 Stabilität nach Lyapunov bestimmen.
   5.2 Richtiger Fall wählen:
      - Asymptotisch stabil = potentiell stabilisierbar bzw. detektierbar
      - Nicht asymptotisch stabil: Meist kann man dann sagen, dass das System nicht potentiell stabilisierbar bzw. detektierbar ist.
        Aber!!! Man müsste durch eine Koordinatentransformation die Zustände trennen und prüfen ob die nicht beobachtbaren und steuerbaren asymptotisch stabil sind[5].

[5] Müsst ihr nicht machen.

Koordinatentransformation

Wir haben gesagt, dass unsere LTI Systeme durch eine lineare Transformation unverändert bleiben. Dies machen wir uns zu nutzen und können daher jedes System durch eine beliebige Koordinatentransformation in einem neuen Koordinatensystem darstellen.

$$x(t) = T \cdot \tilde{x}(t), \qquad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{det}(T) \neq 0$$

Daraus ergibt sich das neue System wie folgt[6].

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + T^{-1} \cdot b \cdot u(t)$$

$$y(t) = c \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + d \cdot u(t)$$

Dies ist besonders nützlich, da die Systemeigenschaften wie Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit usw. erhalten bleiben und wir für eine geschickte Wahl von T, diese direkt ablesen können.

[6] alle $x(t)$ durch $T \cdot \tilde{x}(t)$ ersetzten und dann umformen

Koordinatentransformation
Beispiel vom Theorysheet

Wir haben das System $\{A, b\}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wenn wir die Hauptachsen Transformation durchführen (Eigenwerttransformation)

$$A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}, \qquad x = V \cdot \tilde{x} \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = \Lambda \cdot \tilde{x} + V^{-1} \cdot b \cdot u$$

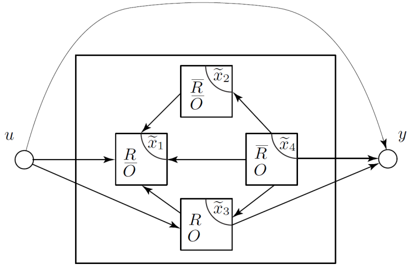
erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Wir sehen direkt, dass der dritte Zustand nicht steuerbar ist, da $u(t)$ nicht den Zustand $\tilde{x}_3$ erreicht. Zudem sehen wir auch direkt, dass dieser Zustand instabil ist, da $\sigma_3 = 1 > 0$ ist.

Zustandsraumzerlegung

Wir können nun die Zustände im System in vier Gruppen einteilen.



R = steuerbar, $\bar{R}$ = nicht steuerbar
O = beobachtbar und $\bar{O}$ = nicht beobachtbar

- $\tilde{x}_1$: Steuerbar aber nicht beobachtbar $\{R, \bar{O}\}$
- $\tilde{x}_2$: Nicht steuerbar und nicht beobachtbar $\{\bar{R}, \bar{O}\}$
- $\tilde{x}_3$: Steuerbar und beobachtbar $\{R, O\}$
- $\tilde{x}_4$: Nicht steuerbar aber beobachtbar $\{\bar{R}, O\}$

Da man Systeme durch Koordinatentransformation beliebig transformieren kann, muss eine Koordinatentransformation existieren, welche diese Gruppen der Zustände voneinander trennt.

$$x = T \cdot \tilde{x}$$

Wie man das T bestimmt, muss man nicht können. Ihr müsst lediglich wissen, dass dies in den meisten Fällen möglich ist und warum wir das tun dürfen.

Zustandsraumdarstellung

Als Resultat der Koordinatentransformation erhalten wir

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \qquad T^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{b}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{c}_3 & \tilde{c}_4 \end{bmatrix}$$

Wenn wir nun das Bild betrachten, sehen wir, dass nur der Zustand $\tilde{x}_3$ einen Einfluss auf das Input-Output Verhalten hat.

Daher beschreiben $\{\tilde{A}_{33}, \tilde{b}_3, \tilde{c}_3\}$ das komplette Input-Output[7] Verhalten.

$\{\tilde{A}_{33}, \tilde{b}_3, \tilde{c}_3\}$ werden **minimale Realisierung** genannt.

Wichtig!!! Nur weil die Zustände $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4\}$ nicht im Input-Output Verhalten vorhanden sind, heisst das nicht, dass wir sie einfach vergessen dürfen. Es könnte ja sein, dass sie instabil sind.

[7] Im Input-Output Verhalten, interessieren wir uns nicht für die Inneren Zustände.

Tipps zur Serie

Aufgabe 1:

a) Lyapunov Stabilität

b) Beobachtbarkeit

c) Steuerbarkeit, gibt es Schranken für $u(t)$?

d) kleine und gute Übung für MatLab

Aufgabe 2:

a) Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit, Stabilität nach Lyapunov

b) Beobachtbarkeit, nehmt MatLab zur Hilfe um $\mathcal{O}$ zu berechnen

c) gute Übung für Blockschaubilder/Signalflussbilder