Übungsstunde 8

Quadratische Form

$$q_A(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch ist}$$

Beispiel

Hauptachsentransformation (von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm., $\underbrace{\mathcal{E} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)})}_{\text{Standardbasis}}$ und $\underbrace{\mathcal{B} = (b^{(1)}, \dots, b^{(n)})}_{\text{orthonormale Eigenbasis von A}}$

1. Bestimme symm. Matrix A
2. Diagonalisiere $A \Rightarrow D$ und T

   $\hookrightarrow$ T orthonormal! $\quad D = T^{-1}AT \overset{A \text{ symm.}}{=} T^T A T$
3. Hauptachsentransformation

   $y = T^T x \longrightarrow x = Ty$

9.6 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $\cancel{y = Tx}$ $x = Ty$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A.

Bsp: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

1. Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $q(x) = x^T A x$

   Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$s

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

4. in quadratische Form einsetzen

$* \quad x = Ty$

$$q_A(x) \overset{*}{=} q_A(Ty) = y^T D y$$

$$\Vert \qquad\qquad\qquad \Vert$$

$$x^T A x \overset{*}{=} (Ty)^T (T D T^T)(Ty)$$

$$= y^T \cancelto{I}{T^T T} D \cancelto{I}{T^T T} y = y^T D y$$

$\Rightarrow$ Normalform ist rein quadr. Form

A kann immer symm. gewählt werden:

Denn wenn $q_B(x) = x^T B x$, B nicht symm.

$\Rightarrow q_A(x) = x^T A x$ mit $A = \frac{1}{2}(B + B^T)$

sodass A symm. ist.

(2) Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T. Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.
T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4

Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.

Bsp: $y^T D y = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

(4) Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform.
Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{3}$

(5) Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T D y + a^T T y + b = 1$

Bsp: $y^T D y + a^T T y + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$

(6) Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch

Bsp:
$$\begin{aligned} 0 &= -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1^2 - \tfrac{2}{3}y_1) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3((y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - (\tfrac{2}{2\cdot 3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} + 3\cdot(\tfrac{1}{3})^2 \\ &= -3(y_1 - \tfrac{1}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + c$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c.
Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.

Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

(7) Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$

Welche Hauptachse schneidet $q(x) = a > 0$ nicht?
Die mit dem negativen Eigenwert. Jeder Vektor auf dieser Achse gibt in $q(x)$ eingesetzt eine negative Zahl.

Wie skizziere ich die Quadrik in Normalform?
In Normalform ist es nicht schwer, mehrere Punkte einzusetzen und dann Linien durchzuziehen.

Wie skizziere ich die Quadrik im ursprünglichen System?
Skizziere zuerst in Normalform und transformiere Skizze mit Drehungsmatrix T und Verschiebungsvektor c.

Welche Punkte sind dem Ursprung am nächsten?
Falls Koordinatentransformation nur aus Drehung $y = Tx$ bestand, sind die gleichen Punkte dem Ursprung am nächsten wie in der Normalform.

Quadriken

Die Menge $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + a^T x + b = 0;\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$

heisst Quadrik oder Kegelschnitt, falls $n = 2$.
Bei gegebener quadr. Form, findet man durch die Hauptachsentransf. und einer Translation heraus, um welche Art Quadrik es sich handelt.

9.6 Quadriken

Setzt man eine quadratische Form in eine Gleichung folgender Form ein ($x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$), erhält man eine sogenannte Quadrik:

$$q(x) + a^T x + b = 1$$

Ist die quadratische Form zweidimensional, erhält man einen sogenannten Kegelschnitt, ist sie dreidimensional erhält man eine Fläche zweiten Grades.

Definitheit von $q_A(x) = x^T A x$ und A

- positiv definit, wenn $\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$
- negativ definit, wenn $\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$
- positiv semi-definit, wenn $\forall x \neq 0 \quad q(x) \geq 0$
- negativ semi-definit, wenn $\forall x \neq 0 \quad q(x) \leq 0$
- indefinit, wenn q positive <u>und</u> negative Werte annimmt

9.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eigenwerte

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0\ \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0\ \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratischen Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A (siehe 9.3)

Alte Prüfungsaufgaben

10. Sei erneut

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

und $B = -2A$. Die Matrix B ist

(a) negativ semidefinit, aber nicht negativ definit.

(b) negativ definit.

(c) positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.

(d) positiv definit.

4. Gegeben sei die quadratische Form

$$q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad q(x) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2)^\top.$$

a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.

b) [6 Punkte] Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \quad \text{wobei } a^\top = (4, 8).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt Q durch eine Hauptachsentransformation und eine Translation auf Normalform.

c) [3 Punkte] Skizzieren Sie den Kegelschnitt Q im ursprünglichen x-Koordinatensystem.