8. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**
Konstruktive Kombinatorik **5. Dezember 2012**

Tutoriendatum: 11.12.2012

`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1)

(a) Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Poset P_n, dass genau n lineare Erweiterungen besitzt. Hinweis: Ein kleineres Poset ist natürlich "schöner" als ein grösseres...

(b) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ fest. Wieviele lineare Erweiterung kann ein Poset P mit n Elementen und einer Weite $\leq k$ maximal besitzen?

(c) Seien $n, \ell \in \mathbb{N}$ fest. Wieviele lineare Erweiterung hat ein Poset P mit n Elementen und einer Höhe $\leq \ell$ mindestens (die Höhe eines Posets ist die Länge seiner längsten Kette) ?

(2) Wir werfen $m \in \mathbb{N}$ Bälle in $n \in \mathbb{N}$ Körbe (unabhängig voneinander und gleichverteilt). Sei Ω die Menge der möglichen Wurfserien. Zeige, dass die Ereignisse $S_i := \{a \in \Omega \mid \text{ es sind } \geq t_i \text{ Bälle in Korb } i\}$ und S_j für alle Schranken $t_i, t_j \geq 0$ negativ korreliert sind. Gehe wie folgt vor:

(a) Notiere die Wurfserien als $(a_1, \ldots, a_m)$, wobei $a_i \in [n]$ der Korb ist, in den Ball i geworfen wurde. Zeige, dass Ω so einen distributiven Verband bzgl. komponentenweisem Vergleich bildet.

(b) Zeige, dass ObdA $i = 1$ und $j = n$ angenommen werden kann.

(c) Zeige, dass S_1 ein Downset und S_n ein Upset in Ω ist und folgere, dass die entsprechenden Ereignisse negativ korreliert sind.

(3) Das Poset Z_n besteht aus den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ und der Menge der Relationen $x_{2i-1} < x_{2i}$ und $x_{2i} > x_{2i+1}$ für alle passenden i. Es heisst *"zig-zag"-Poset* oder *Fence*. Sei $E(n)$ die Anzahl der linearen Erweiterungen von Z_n.

(a) Zeige, dass $E(n)$ die Rekursionsgleichung

$$2 \cdot E(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot E(k) \cdot E(n-k)$$

erfüllt. Folgere auch $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot E(k) \cdot E(n-k) = 0$.

(b) Ein vollständig wachsender binärer Baum ist ein Baum, bei dem jeder Knoten entweder 0 oder 2 Kinder, sowie ein eindeutiges Label $\in [n]$ hat, so dass jedes Kind eines Knoten ein grösseres Label als dieser besitzt.

Sei $E'(2n+1)$ die Anzahl solcher Bäume mit $2n+1$ Knoten. Zeige:

$$E'(2(n+1)+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} \cdot E'(2k+1) \cdot E'((2n+2)-(2k+1))$$

Finde eine Bijektion zwischen der Menge dieser Bäume und der Menge der linearen Erweiterungen von Z_{2n+1} und folgere $E'(2n+1) = E(2n+1)$.

(c) Eine Permutation $\pi = (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n) \in S_n$ heisst *alternierend*, wenn $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \dots \pi_n$ gilt. Sei $M_n \subseteq S_n$ die Menge der alternierenden Permutationen. Finde eine Bijektion zwischen den linearen Erweiterungen von Z_n und M_n.

Die Zahlen $E(n)$ heissen *Euler-Zahlen*. Die ersten Euler-Zahlen sind $1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, \dots$. Die Euler-Zahlen haben ausserdem die schöne exponentielle Erzeugendenfunktion

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{E(n)}{n!} x^n = \sec(x) + \tan(x).$$

Mehr lesenswertes zu den Zahlen ist unter `http://oeis.org/A000111` zu finden.