

Vorlesung: Numerik 1 für Ingenieure

Sommersemester 06

Michael Karow

5. Vorlesung: Cholesky-Zerlegung und positive Definitheit

Satz von der Cholesky-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine **symmetrische** und **positiv definite** Matrix. Dann gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit positiven Diagonalelementen, so dass

$$A = L L^T.$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & -5 & 15 \\ -5 & 10 & -15 \\ 15 & -15 & 29 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{L^T}.$$

Beachte: Anders als bei der LR -Zerlegung sind die Diagonalelemente des Cholesky-Faktors L (meistens) von 1 verschieden.

Andre-Louis Cholesky (1875-1918)
Cholesky-Zerlegung 1924 veröffentlicht.

Zur Herstellung der Cholesky-Zerlegung gibt es (mindestens) 2 wesentlich verschiedene Algorithmen.

1. Cholesky-Algorithmus:

Eingabe: symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Für $j = 1, \dots, n$

$$\text{Berechne } \ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2}$$

Für $i = j + 1, \dots, n$

$$\text{Berechne } \ell_{ij} := \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \ell_{jk} \right) / \ell_{jj}$$

Kommentar: Dieser Algorithmus berechnet die Elemente von $L = [\ell_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die in der unteren Hälfte (einschliesslich der Diagonale) stehen.

Er arbeitet mit **Koeffizientenvergleich**.

Beispiel zum Koeffizientenvergleich:

Der Ansatz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

führt auf die Gleichungen:

$$a_{11} = l_{11}^2$$

$$a_{21} = l_{11} l_{21}$$

$$a_{31} = l_{11} l_{31}$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$$

$$a_{32} = l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22}$$

$$a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2$$

Umstellen ergibt:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{21} = a_{21}/l_{11}$$

$$l_{31} = a_{31}/l_{11}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21})/l_{22}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

2. Cholesky-Algorithmus:

Eingabe: symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Für $j = 1, \dots, n$

Berechne $a_{jj} := \sqrt{a_{jj}}$

Für $i = j + 1, \dots, n$

Berechne $a_{ij} := a_{ij}/a_{jj}$

Für $k = j + 1, \dots, i$

Berechne $a_{ik} := a_{ik} - a_{ij}a_{kj}$

Kommentar: Dieser Algorithmus überschreibt die untere Hälfte von A (einschliesslich die Diagonale) mit den Einträgen von L . Mit anderen Worten: nach der Durchrechnung gilt

$$a_{ij} = l_{ij} \quad \text{für } i \geq j.$$

Der obige Algorithmus arbeitet mit **quadratischer Ergänzung**. Mehr dazu am Ende des Vortrags.

2. Cholesky-Algorithmus, Variante:

Eingabe: symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Für $j = 1, \dots, n$

Berechne $\ell_{jj} := \sqrt{a_{jj}}$

Für $i = j + 1, \dots, n$

Berechne $\ell_{ij} := a_{ij} / \ell_{jj}$

Für $k = j + 1, \dots, i$

Berechne $a_{ik} := a_{ik} - \ell_{ij}\ell_{kj}$

Kommentar: Dieser Algorithmus unterscheidet sich von dem vorangehenden nur dadurch, dass die Ergebnisse in der Matrix $L = [\ell_{ij}]$ abgespeichert werden und nicht in A .

Auf den folgenden Seiten werden folgende Fragen besprochen:

- Warum gibt es eine Cholesky-Zerlegung nur für positiv definite Matrizen ?
- Was heisst überhaupt positiv definit?
- Wie kann man Definitheit erkennen?
- Warum ist positive Definitheit ein wichtiger Begriff?
- Wo kommen positiv definite Matrizen in den Anwendungen vor?

**Quadratische Formen
und
Definitheit**

Das Skalarprodukt als Matrixprodukt und der Term $x^T Ax$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ ist bekanntlich

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Man kann das Skalarprodukt auch als Matrixprodukt schreiben, indem man zunächst den Vektor x transponiert und ihn dann nach den Regeln der Matrixmultiplikation mit y multipliziert:

$$x^T y = [x_1 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x \cdot y.$$

Setzt man nun $y = Ax$ mit einer Matrix $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann bekommt man

$$x^T Ax = x^T y = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k.$$

Quadratische Formen

Definition:

Eine quadratische Form in den Variablen x_1, \dots, x_n ist ein Ausdruck der Gestalt

$$q_A(x) = x^T A x = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k.$$

Dabei kann man annehmen, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist.

Beispiel: quadratische Form in zwei Variablen

Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (unsymmetrisch). Dann ist

$$\begin{aligned} q_A(x) &= x^T A x \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_2x_1 + 4x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{=: \tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^T \tilde{A} x = q_{\tilde{A}}(x). \end{aligned}$$

Die Matrix \tilde{A} ist symmetrisch.

Beispiel: quadratische Formen in 4 Variablen

Es ist

$$x_2^2 + 7x_1x_2 - x_4^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 3.5 & 0 & 0 \\ 3.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x^T I x \quad I = \text{Einheitsmatrix}$$

$$= x^T x.$$

Definitheit von quadratischen Formen

Eine quadratische Form (bzw. die zugehörige Matrix) heisst

positiv definit	falls	$x^T A x > 0$	für alle $x \neq 0$,
positiv semidefinit	falls	$x^T A x \geq 0$	für alle x ,
negativ definit	falls	$x^T A x < 0$	für alle $x \neq 0$,
negativ semidefinit	falls	$x^T A x \leq 0$	für alle x ,
indefinit	sonst.		

Beachte: Eine definite Matrix ist immer auch semidefinit.

Beispiel: Sei A eine Diagonalmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$x^T A x = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2.$$

A ist genau dann **positiv definit**, wenn alle Diagonalelemente **positiv** sind.

A ist genau dann **positiv semidefinit**, wenn alle Diagonalelemente **nicht negativ** sind.

A ist genau dann **indefinit**, wenn 2 Diagonalelemente **verschiedenes Vorzeichen** haben.

Ein notwendiges Kriterium für positive Definitheit

Wenn eine symmetrische Matrix $A = [a_{jk}]$ positiv definit ist, dann sind alle ihre Diagonalelemente positiv.

Beweis: Sei

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

Man bestätigt leicht, dass $e_k^T A e_k = a_{kk}$, wobei a_{kk} das k -te Diagonalelement von A ist. Wenn A positiv definit ist, dann folgt

$$a_{kk} = e_k^T A e_k > 0$$

Anwendungsbeispiel: Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ -6 & 8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

ist nicht positiv definit, denn $a_{33} = -2 \leq 0$.

Warnung:

Ob eine Matrix positiv definit ist, entscheidet sich nicht allein an den Diagonalelementen.

Beispiel: Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ hat positive Diagonalelemente. Dennoch ist A nicht positiv definit.

Begründung: Allgemein hat man

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Wählt man speziell $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, dann folgt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 * 1^2 + 6 * 1 * (-1) + 2 * (-1)^2 = -2 < 0.$$

Zur Motivation: Wo kommen definite quadratische Formen vor?

1. Mechanik

Linearisierte Differentialgleichung eines mechanischen Systems mit den Freiheitsgraden $u(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$M \ddot{u}(t) + D \dot{u}(t) + S u(t) = f(t). \quad (*)$$

wobei

$$\begin{aligned} M &= \text{Massenmatrix} \\ D &= \text{Dämpfungsmatrix} \\ S &= \text{Steifigkeitsmatrix} \\ f &= \text{äussere Kräfte (Last)} \end{aligned}$$

Definite quadratischen Formen:

$$\text{Kinetische Energie: } E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} > 0$$

$$\text{Elastische Energie: } E_{elast} = \frac{1}{2} u^T S u \geq 0$$

$$\text{Energiedissipation: } \dot{u}^T D \dot{u} \geq 0$$

(Reibungsverlust)

Aus (*) folgt die Energiebilanz:

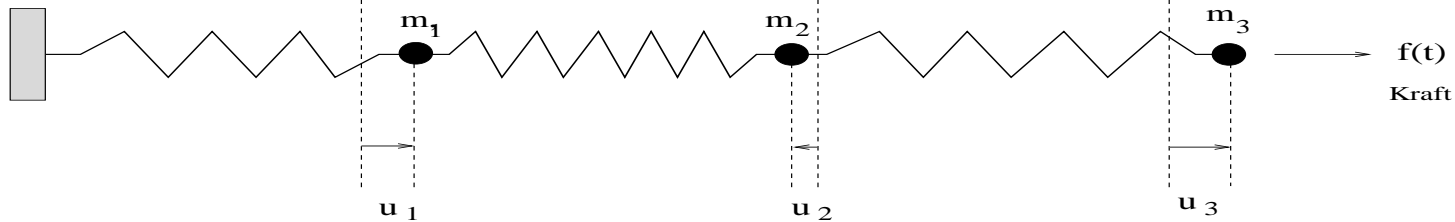
$$\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{elast}) = \dot{u}^T f - \dot{u}^T D \dot{u}.$$

Konkretes Beispiel: Ein Feder-Masse-System (hier ohne Dämpfung)

Ruhelage (Federn sind entspannt)



Bewegtes System



Energien: ($s_j =$ Federsteifigkeiten)

$$E_{elast} = \frac{s_1}{2} u_1^2 + \frac{s_2}{2} (u_2 - u_1)^2 + \frac{s_3}{2} (u_3 - u_2)^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 & 0 \\ -s_2 & s_2 + s_3 & -s_3 \\ 0 & -s_3 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$E_{kin} = \frac{m_1}{2} \dot{u}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{u}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{u}_3^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}$$

Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 & 0 \\ -s_2 & s_2 + s_3 & -s_3 \\ 0 & -s_3 & s_3 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

2. Diskretisierte Wärmeleitungsgleichung (wichtig für PPM)

Stationäre Wärmeleitungsgleichung auf Gebiet Ω :

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = f$$

Ansatz für das Temperaturfeld:

$$T(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x) + \dots + u_n \phi_n(x)$$

mit

$$\begin{aligned} u_k &= \text{Knotentemperaturen,} \\ \phi_k &= \text{Hütchenfunktionen.} \end{aligned}$$

Diskretisierte Wärmeleitungsgleichung:

$$S u = p$$

mit $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ und der “Steifigkeitmatrix”

$$S = [s_{jk}] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad s_{jk} = \int_{\Omega} \lambda (\nabla \phi_j)^T \nabla \phi_k$$

Es ist

$$u^T S u = \int_{\Omega} \lambda \|\nabla(u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + \dots + u_n \phi_n)\|^2 \geq 0.$$

$\Rightarrow S$ ist semidefinit. (Nach Einbau der Randbedingungen sogar definit).

3. Analysis: Lokale Extrema

Gegeben: Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Taylorentwicklung um $x \in \mathbb{R}^n$ bis 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) h_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) h_j h_k + o(\|h\|^2) \\ &= f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + o(\|h\|^2), \end{aligned}$$

mit der Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right]_{jk}.$$

Notwendig für lokales Minimum an der Stelle x :

$$\nabla f(x) = 0, \quad H_f(x) \text{ positiv semidefinit.}$$

Hinreichend für lokales Minimum an der Stelle x :

$$\nabla f(x) = 0, \quad H_f(x) \text{ positiv definit.}$$

Das Eigenwertkriterium für Definitheit

Erinnerung: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls es $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$Av = \lambda v.$$

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt:

1. Alle Eigenwerte von A sind reell.
2. Die Eigenvektoren können so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden.
3. Die Matrix A ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte positiv (nichtnegativ) sind.

Begründung für das Eigenwertkriterium:

Sei $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren:

$$Av_j = \lambda_j v_j, \quad v_j^T v_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in folgender Form schreiben:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n, \quad x_j \in \mathbb{R}.$$

Eine direkte Rechnung ergibt dann: $x^T Ax = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$

Prüfung auf Definitheit mit quadratischer Ergänzung.

Eine quadratische Form in 2 Variablen kann man durch **quadratische Ergänzung** in eine Summe oder Differenz von Quadraten verwandeln.

(Methode: $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$.)

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}9x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2 &= (3x_1)^2 + 2(3x_1)(-4x_2) + 41x_2^2 \\&= (3x_1)^2 + 2(3x_1)(-4x_2) + (-4x_2)^2 - (-4x_2)^2 + 41x_2^2 \\&= (3x_1 - 4x_2)^2 - (-4x_2)^2 + 41x_2^2 \\&= (3x_1 - 4x_2)^2 + (5x_2)^2.\end{aligned}$$

⇒ Die Form ist positiv definit.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}36x_1^2 + 4x_1x_2 &= (6x_1)^2 + 2(6x_1)\left(\frac{1}{3}x_2\right) \\&= (6x_1)^2 + 2(6x_1)\left(\frac{1}{3}x_2\right) + \left(\frac{1}{3}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x_2\right)^2 \\&= \left(6x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x_2\right)^2\end{aligned}$$

⇒ Die Form ist indefinit.

Um dies zu sehen wähle z.B. $x_2 = 1$ und x_1 so dass $6x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$.

Allgemeiner 2×2 Fall (für $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \\ &= a \left(x_1^2 + 2 \frac{b}{a} x_1 x_2 \right) + c x_2^2 \\ &= a \left(x_1^2 + 2 \frac{b}{a} x_1 x_2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 x_2^2 \right) \\ &\quad - \frac{b^2}{a} x_2^2 + c x_2^2 \\ &= a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) x_2^2 \\ &= a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 + \frac{1}{a} \underbrace{(ac - b^2)}_{=\det(A)} x_2^2 \end{aligned}$$

Folgerung: A ist positiv definit genau dann, wenn

$$a > 0 \quad \text{und} \quad \det(A) > 0.$$

Das Determinantenkriterium für positive Definitheit

Das auf der letzten Folie hergeleitete Kriterium für positive Definitheit einer 2×2 Matrix lässt sich verallgemeinern.

Satz: Eine symmetrische Matrix $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten aller linken oberen Untermatrizen positiv sind, d.h.

$$\det[a_{11}] = a_{11} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad \dots \quad \det(A) > 0.$$

Zusammenhang: Quadratische Ergänzung und Cholesky-Zerlegung

Beispiel:

$$\begin{aligned}q_A(x) = x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 25 & -5 & 15 \\ -5 & 10 & -15 \\ 15 & -15 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 25x_1^2 - 10x_1x_2 + 30x_1x_3 + 10x_2^2 - 30x_2x_3 + 29x_3^2\end{aligned}$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt:

$$\begin{aligned}q_A(x) &= (5x_1)^2 + 2(5x_1)(-x_2 + 3x_3) + (-x_2 + 3x_3)^2 - (-x_2 + 3x_3)^2 \\ &\quad + 10x_2^2 - 30x_2x_3 + 29x_3^2 \\ &= (5x_1 - x_2 + 3x_3)^2 + \text{quad. Form in } x_2, x_3 \\ &\quad \vdots \\ &= (5x_1 - x_2 + 3x_3)^2 + (3x_2 - 4x_3)^2 + (2x_3)^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y^T y\end{aligned}$$

mit

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 3x_2 - 4x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=:L^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Insgesamt: $x^T A x = y^T y = (L^T x)^T (L^T x) = x^T L L^T x. \quad \Rightarrow \quad A = L L^T.$

Zur Frage

'Warum gibt es eine Cholesky-Zerlegung nur für positiv definite Matrizen?'

Allgemein gilt: Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht singulär (invertierbar).
Dann ist die Matrix $A = B^T B$ positiv definit.

Begründung:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Setze $y = Bx$. Dann ist auch $y \neq 0$, weil B nicht singulär.
Es folgt weiter:

$$x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T Bx = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 > 0.$$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit.

Folgerung: Wenn $A = LL^T = (L^T)^T \underbrace{(L^T)}_B$ und $\det(L) \neq 0$, dann ist A positiv definit.