Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 4. Blatt

29. Die in Aufgabe 17 definierte hermitesche Matrix $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ hat die Eigenwerte ± 1. Was folgt daraus – ohne weitere Rechnung – für $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2$? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis sodann durch Ausführen der Matrixmultiplikation.

30. Zeigen Sie die Formel von Beispiel 28 durch Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Potenzreihe.

    Hinweis: Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels.

31. In dem in Aufgabe 22 definierten unitären Vektorraum $\mathcal{H}$ sei der „Paritätsoperator" $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch

    $$(\Pi\psi)(x) = \psi(-x), \quad \psi \in \mathcal{H}$$

    definiert. Zeigen Sie, dass Π hermitesch ist und $\Pi^2 = \mathbb{1}$ gilt. Was folgt daraus für die Eigenwerte von Π? Wie wirkt der Operator Π auf die in Aufgabe 22 definierte Orthonormalbasis $\{\phi_{-N}, \ldots \phi_N\}$? Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von Π.

32. $P \in L(\mathcal{H})$ sei der in Aufgabe 23 definierte Impulsoperator. Berechnen Sie $\Pi P^n \Pi$.

33. Sind die Operatoren $P \in L(\mathcal{H})$ und $\Pi \in L(\mathcal{H})$ gleichzeitig diagonalisierbar? M.a.W.: Gibt es eine **gemeinsame** Orthonormalbasis von Eigenvektoren der Operatoren P **und** Π?

34. Sind P^2 und Π gleichzeitig diagonalisierbar?

35. $A_{ij} = -A_{ji}$ seien die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors und $S_{ij} = S_{ji}$ die Komponenten eines symmetrischen Tensors. Was erhält man für $A_{ij}S_{ij}$ bei Verwendung der Summenkonvention?

36. Zeigen Sie:

    $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

    Hinweis: Verwenden Sie $\epsilon_{ijk} = \det(e_i, e_j, e_k)$, sowie $\det A^T = \det A$ und $\det(AB) = \det A \det B$.

37. Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels, um die folgende Relation zu beweisen (Summenkonvention!):

    $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

38. Zeigen Sie:
$$\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}$$
Hinweis: Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels.

39. Zeigen Sie:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}\,)$$
Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Aufgabe 37.

40. Zeigen Sie:
$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c}\,)(\vec{b} \cdot \vec{d}\,) - (\vec{b} \cdot \vec{c}\,)(\vec{a} \cdot \vec{d}\,)$$
Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Aufgabe 37.

41. Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung
$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0,$$
und skizzieren Sie die Lösungskurven.

42. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des vorigen Beispiels.

43. Ermitteln Sie die Lösungen der Differentialgleichung
$$y^2\,dx + x(x-y)\,dy = 0.$$
Hinweis: Die Substitution $u = y/x$ führt zum Ziel.

44. Welche Grenzgeschwindigkeit ergibt sich für $t \to \infty$, wenn die (eindimensionale) Bewegung eines Körpers durch die Differentialgleichung
$$m\dot{v} = mg - k|v|^{n-1}v, \quad k > 0$$
beschrieben wird?

45. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung
$$y + x - 1 + (x-y)y' = 0$$
Hinweis: Es handelt sich um eine exakte Differentialgleichung.

46. Die Differentialgleichung $x\,dy - y\,dx = 0$ ist nicht exakt. Suchen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor und ermitteln Sie auf diese Weise die Lösungen.

47. Lösen Sie die Differentialgleichung des vorigen Beispiels durch Trennung der Veränderlichen.