36. Bestimmen Sie die Dichteverteilung eines homogenen Gases konstanter Temperatur im homogenen Schwerefeld.

37. Betrachten Sie einen kleinen Behälter von Volumen Ω mit einer kleinen Öffnung. Dieser steht in Wechselwirkung mit einem sehr großen Behälter, der mit Gas der (konstanten) Dichte ρ gefüllt ist. Die Zahl der Teilchen im kleinen Behälter sei N. Die Übergangswahrscheinlichkeit sei

$$\widetilde{W}(N, \triangle N) = \frac{N}{\Omega}\,\delta_{\triangle N,1} + \rho\,\delta_{\triangle N,-1}$$

Wie lautet die Mastergleichung?

38. Überprüfen Sie, dass für die obige Mastergleichung die *normierte* Gleichgewichtslösung durch

$$p(N)_{equ} = \frac{(\Omega\rho)^N}{N!}e^{-\Omega\rho}$$

gegeben ist (überprüfen Sie auch die Normierung)!

39. Zeigen Sie, dass im obigen Modell die Eigenschaft "detailed balance" erfüllt ist:

$$W(N'|N)p(N)_{equ} = W(N|N')p(N')_{equ}, \qquad W(N'|N) = \widetilde{W}(N, N'-N)$$

40. Sei eine Mastergleichung gegeben, die "detailed balance" erfüllt. Definieren Sie eine H-Funktion

$$H(t) = \sum_N p(N,t)log\,\frac{p(N,t)}{p(N)_{equ}}$$

und zeigen Sie auch in diesem Fall die Gültigkeit des H-Theorems $\frac{dH}{dt} \leq 0$.
HINWEIS: Verwenden Sie den Trick $W(N'|N)p(N,t) = W(N'|N)p(N)_{equ}\,\frac{p(N,t)}{p(N)_{equ}}$

41. Poincarésches Wiederkehrtheorem: Ein System endlicher Energie in endlichem Volumen kehrt innerhalb einer endlichen Zeit τ in eine beliebig kleine Umgebung seines Anfangszustandes zurück.

Führen sie eine vereinfachte Abschätzung der Wiederkehrzeit τ für eine Kette klassischer linearer harmonischer Oszillatoren durch:

(a) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion einer linearen Kette von N Oszillatoren.

(b) Verwenden Sie Normalkoordinaten, um ungekoppelte Oszillatoren zu erhalten.

(c) Im Phasenraum beschreibt (in geeigneter Skalierung) jeder Oszillator Kreisbahnen.

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 1 Umlauf ein einzelner Oszillator in einem Segment mit Winkel $\Delta\varphi$ liegt?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 1 Umlauf alle (voneinander unabhängigen) Oszillatoren jeweils in einem Segment mit Winkel $\Delta\varphi$ liegen?

(f) Wieviel Umläufe sind für die Wiederkehr aller Oszillatoren in jeweils ein Segment mit Winkel $\Delta\varphi$ ca. nötig?

(g) Betrachten Sie $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{100}$, N=10 und typische Umlaufzeit $t = 1/\omega$, mit $\omega = 10\text{Hz}$ und berechnen Sie die Wiederkehrzeit τ.

42. Zeigen Sie bei der Kramers-Moyal-van Kampen Entwicklung der Mastergleichung, dass nach Taylorreihenentwicklung der Ausdruck

$$-\Omega^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\beta_1\left(\phi(t)+\Omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right)-\beta_1\left(\phi(t)\right)\right]\pi(\xi,t)\right\}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Omega^{-\frac{1}{2}(n-2)}}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\left[\beta_n\left(\phi(t)+\Omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right)\pi(\xi,t)\right]$$

folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$\Omega^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\beta_1^{(k)}(\phi)\Omega^{-\frac{k}{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\xi^k\pi\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!}\Omega^{-\frac{1}{2}(n-2+k)}\beta_n^{(k)}\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\left(\xi^k\pi\right)$$

.

43. Mit der Summationsumordnung $k \to m-n$, $n \to n$ erhält man damit schlussendlich

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Omega^{-\frac{1}{2}(m-2)}}{m!}\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\beta_n^{(m-n)}(\phi(t))\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n\left[\xi^{m-n}\pi(\xi,t)\right]$$