D-MATH
Prof. A.Prohl

WS 04/05

Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 2

1. Zu lösen sei $\mathcal{L}u = f$ auf $\Omega = (0,1)^2$, $u = g$ auf $\partial\Omega$, mit

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + \beta \cdot \nabla u + c(\mathbf{x})u\,, \quad \beta = (\,\beta_1, \beta_2\,)^\top \in \mathbf{R}^2\,, \quad c(\mathbf{x}) > 0\,.$$

   a) Ist die existente (!) klassische Lösung eindeutig?

   b) Zur Finite-Differenzen-Diskretisierung verwende man ein äquidistantes Gitter, und zentrale Differenzenquotienten, d.h.,

$$\partial_i^2 u(\mathbf{x}) \approx \frac{u(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i) - 2u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}-h\mathbf{e}_i)}{h^2}\,, \quad \partial_i u(\mathbf{x}) \approx \frac{u(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x}-h\mathbf{e}_i)}{2h}\,.$$

   Man beweise Konsistenzordnung $m = 2$. Wann ist das diskrete Problem $A\mathbf{U} = \mathbf{0}$ lösbar?

2. Man beweise: Es gibt kein kompaktes Neunpunkt-Schema zur Approximation des Laplace-Operators mit der Konsistenzordnung 3.

3. Sei $\Omega_i = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < i\} \subset \mathbf{R}^2$, für $0 < a, b < \infty$, und $i = 1, 2$.

   a) Man berechne ein $C = C(\{\Omega_i\}_i)$, sodaß der in der Vorlesung eingeführte Fortsetzungsoperator $E : H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ die Eigenschaft besitzt

$$\|Eu\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega_1)} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega_1)\,.$$

   b) Man berechne ein $C = C(\Omega_1)$, sodaß der in der Vorlesung eingeführte Spuroperator $T : H^1(\Omega_1) \to L^2(\partial\Omega_1)$ der Eigenschaft genügt

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega_1)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega_1)} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega_1)\,.$$

Abgabe: 9. November in der Vorlesung