Unitäre Räume – Zusammenfassung
Was (fast) identisch ist

- Cauchy-Schwarz Ungleichung, Norm, Abstand, *Winkel*
- Orthogonalität, Orthonormalbasis, Schmidt Algorithmus, Cholesky Zerlegung
- Orthogonales Komplement
- *Adjungierte Abbildung*, *normale* und selbstadjungierte Endomorphismen, adjungierte Matrix
- *Unitäre Abbildungen*, QR-Zerlegung

Cauchy-Schwarz Ungleichung, Norm
Skript 6.1

Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle v|w\rangle$.

6.1.18 Die **Norm** ist $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$

6.1.16 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) $|\langle v|w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, mit Gleichheit genau dann wenn v und w linear abhängig sind.

6.1.21 $\|tv\| = |t|\|v\|$ für $t \in \mathbf{C}$, $\quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,
$\|v\| = 0 \iff v = 0$.

Abstand, *Winkel*
Skript 6.1

6.1.18 Der **Abstand** zwischen v und w ist $d(v,w) = \|v - w\|$.

6.1.21 $d(v,x) \leq d(v,w) + d(w,x), \quad d(v,w) = d(w,v)$
$d(v,w) = 0 \iff v = w$.

6.1.23 Der **Winkel** $t \in [0, \pi/2]$ zwischen v und w:

$$\cos(t) = \frac{|\langle v|w\rangle|}{\|v\|\|w\|}.$$

$v \perp w \iff t = \pi/2$.

Orthogonalität, Orthonormalbasis, ...
Skript 6.2

6.2.1 $S \subset V$ ist **orthogonal** (bzw. **orthonormal**) falls $\langle v|w\rangle = 0$ für $w \neq v$ in S (bzw. falls $\langle v|w\rangle = \delta(v,w)$ für v und w in S).

6.2.3 S orthogonal ist linear unabhängig; falls $n = \dim(V)$ endlich ist, dann
$(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Orthonormalbasis $\iff \langle v_i|v_j\rangle = \delta(i,j)$.

6.2.3 $(v_1, \dots, v_n)$ Orthonormalbasis $\Rightarrow$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|v\rangle v_i, \qquad \langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i|v\rangle}\langle v_i|w\rangle.$$

Orthogonalität, Orthonormalbasis, ...
Skript 6.2

6.2.4 **Gram-Schmidt Orthonormalisierung** gilt unverändert.

6.2.6 $W \subset V$, B Orthonormalbasis von $W \Rightarrow$ es gibt eine Orthonormalbasis (B, B') von V.

6.2.7 **Cholesky Zerlegung**: $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$ hermitesche Matrix sodass $b(x,y) = {}^t\bar{x}Ay$ ein Skalarprodukt ist $\Rightarrow$ $A = {}^t\bar{R}R = R^*R$,für eine obere Dreiecksmatrix R.

6.6.5 $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$ hermitesche Matrix; $b(x,y) = {}^t\bar{x}Ay$ ist ein Skalarprodukt $\Longleftrightarrow \det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$, wo $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

Orthogonales Komplement
Skript 6.3

V unitärer Raum, $W \subset V$ Unterraum.

6.3.1 $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v|w\rangle = 0$ für $w \in W\}$, **orthogonales Komplement** von W.

6.3.2 $\{0\}^\perp = V$; $V^\perp = \{0\}$; $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

6.3.2 V endlich dimensional $\Rightarrow (W^\perp)^\perp = W$ und $V = W \oplus W^\perp \Rightarrow \dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.

6.3.2 $W_1 \perp W_2 \Rightarrow W_1,\ W_2$ linear unabhängig.

6.3.5 $W \subset V$; die Projektion $V \to V$ with Kern $W^\perp$ und Bild W heisst **orthogonale Projektion** auf W.

6.3.6 $B = (v_1, \ldots, v_m)$ Orthonormalbasis von $W \Rightarrow$

$$p(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i|v\rangle v_i.$$

Adjungierte Abbildung
Skript 6.4

V, V_1, V_2 endlich dimensionale unitäre Räume.

6.1.12 $\ell\colon V \to \mathbf{C}$ linear $\Rightarrow$ es gibt genau ein $w \in V$ sodass $\ell(v) = \langle w|v\rangle$.

6.4.1 $f\colon V_1 \to V_2$ linear $\Rightarrow$ es gibt $f^*\colon V_2 \to V_1$ (**adjungierte Abbildung**) sodass

$$\langle f(v)|w\rangle_{V_2} = \langle v|f^*(w)\rangle_{V_1}.$$

6.4.4 $(tf)^* = \bar{t}f^*$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $(f^*)^* = f$.

Adjungierte Abbildung
Skript 6.4

V_1, V_2 endlich dimensionale unitäre Räume, $f\colon V_1 \to V_2$ linear. $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$, $B_2 = (w_1, \ldots, w_m)$ Orthonormalbasen von V_1 und V_2.

6.4.5 $\ker(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$, $\mathrm{Im}(f^*) = \ker(f)^\perp$, $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(f^*)$.

6.4.6 $\mathrm{Mat}(f; B_1, B_2) = (\langle f(v_i) | w_j \rangle)_{i,j}$

6.4.6 $\mathrm{Mat}(f^*; B_2, B_1) = {}^t\overline{\mathrm{Mat}(f; B_1, B_2)}$.

6.4.8 $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V) \Rightarrow \det(f^*) = \overline{\det(f)}$.

6.4.1 $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ ist **selbstadjungiert** $\iff f^* = f$.
$f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ ist **normal** $\iff ff^* = f^*f$.

Unitäre Abbildungen
Skript 6.5

V_1, V_2, unitäre Räume.

6.5.1 $f \colon V_1 \to V_2$ **unitäre Abbildung** $\iff$ f Isomorphismus und $\langle f(v)|f(w)\rangle = \langle v|w\rangle$.

6.5.1 $\mathrm{U}(V)$ Menge von unitäre Endomorphismen von V (**unitäre Gruppe** von V); $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ Menge von Matrizen A sodass $f_A \in \mathrm{U}(\mathbf{C}^n)$ mit Standardskalarprodukt.

6.5.2 $\dim(V_1) = \dim(V_2)$ endlich; dann
$f \colon V_1 \to V_2$ ist unitär $\iff \quad \langle f(v)|f(w)\rangle = \langle v|w\rangle$.

Unitäre Abbildungen
Skript 6.5

V endlich dimensionaler unitärer Raum.

6.5.2 $f \in \mathrm{U}(V) \iff f^*f = \mathrm{Id} \iff f^{-1} = f^*$.

6.5.2 $f \in \mathrm{U}(V) \Rightarrow |\det(f)| = 1$.

6.5.3 $f \in \mathrm{U}(V) \Rightarrow f^{-1} \in \mathrm{U}(V)$, $\qquad f, g \in \mathrm{U}(V) \Rightarrow fg \in \mathrm{U}(V)$.

6.5.4 $A \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C}) \iff A^{-1} = {}^t\bar{A} \iff$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbf{C}^n$.

6.5.5 (QR / Iwasawa Zerlegung) $A \in M_{n,n}(\mathbf{C}) \Rightarrow A = QR$ wobei $Q \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ und R obere Dreiecksmatrix.