

Quantumtransport in niedrigdimensionalen HL

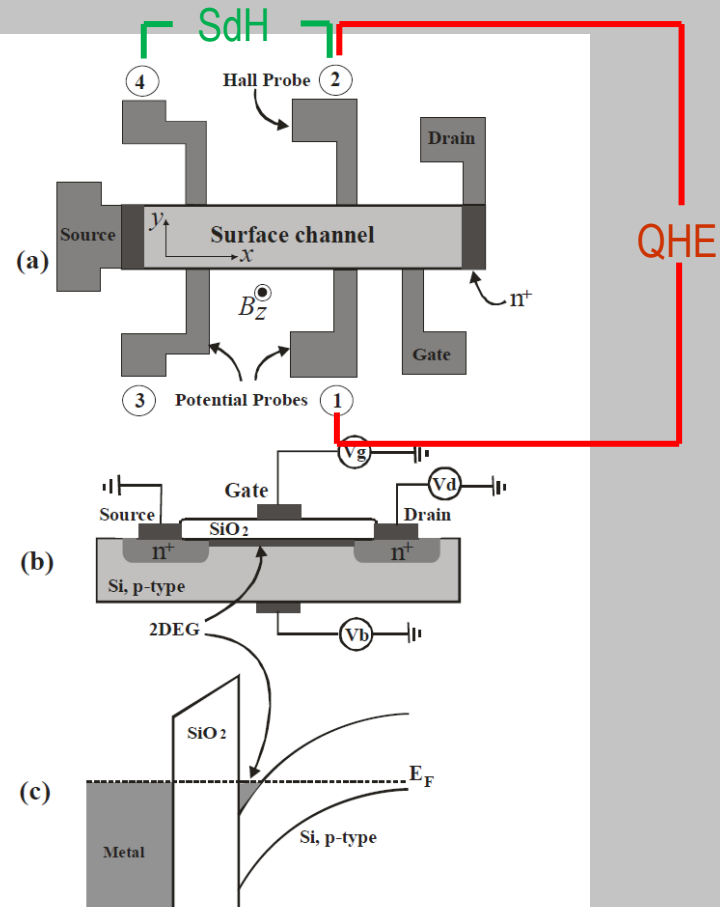
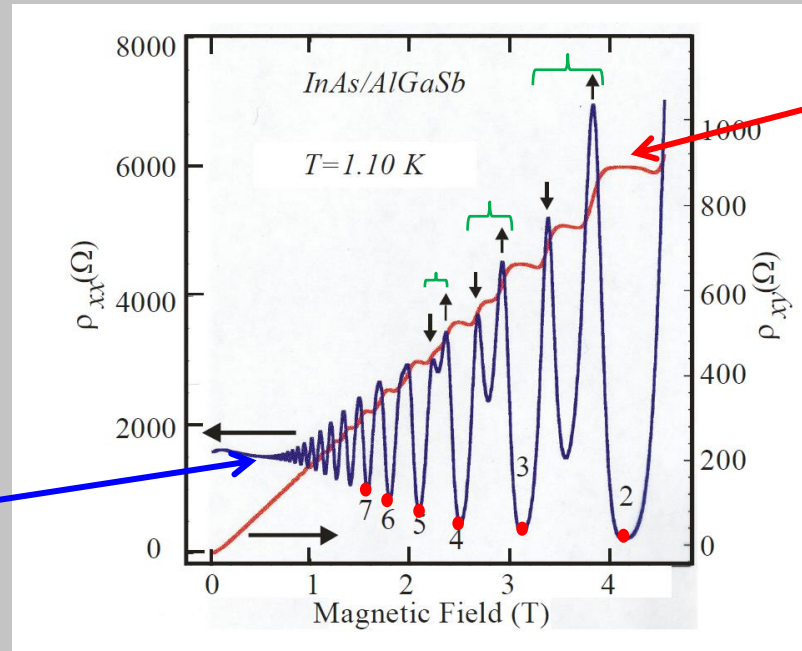


FIGURE 5.6 (a) A sketch of the device geometry used for both quantum Hall effect and Shubnikov-de Haas measurements. (b) A cross section of the n-type MOSFET device showing the channel underneath the oxide (SiO₂) layer. (c) The band bending near the oxide-Si interface showing the 2DEG.

InAs/AlGaSb Single Quantum Well



SdH-Oszillationen

QHE

Die Oszillationen sind periodisch als Funktion von $1/B_z$

FIGURE 5.7 The quantum Hall effect resistivity, ρ_{xy} , observed as a function of the magnetic field. The parallel resistivity, ρ_{xx} , represents the Shubnikov-de Haas effect. The vertical arrows indicate electron spin up or spin down, and the integer numbers represent the filling factor. Notice that ρ_{xy} and ρ_{xx} are sheet resistivities and their unit is Ohm.

Landau-level Füllfaktor

$$\nu \equiv \frac{n_s h}{e B_z}$$

ν ist 1,2,3, ...

Die Ladungsträgerkonzentration n_s ergibt sich damit zu:
(Spinaufspaltung wird dabei vernachlässigt)

$$n_s = \frac{e}{h} \cdot \frac{1}{\Delta(1/B_z)}$$

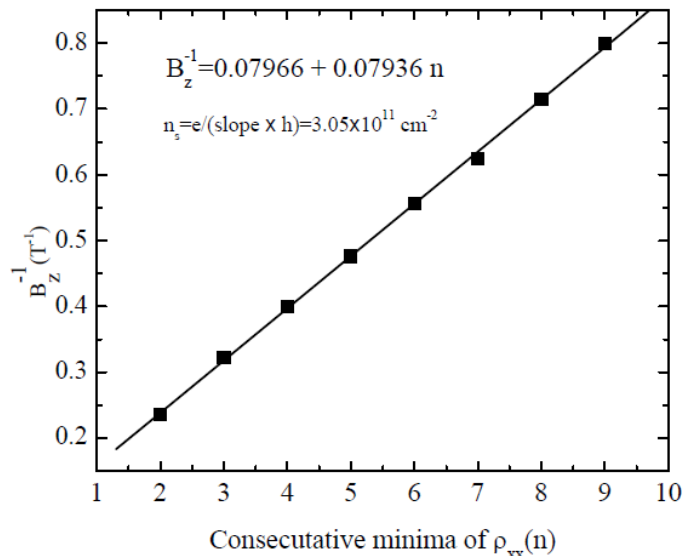
InAs/AlGaSb Single Quantum Well – SdH – Bestimmung von n_s

Für größere Füllfaktoren, bei der die Spin-Aufspaltung minimal ist werden deshalb genauere Messwerte erhalten.

SdH Messungen liefern zusätzlich einen genaueren Ladungsträgerkonzentration n_s als konventionelle Hall-Effektmessungen, da bei hall-Effekt Messungen nicht zwischen 2-dim und 3-dim Ladungsträgern unterschieden wird.

Die Ladungsträgerkonzentration kann außerdem auch durch Auftragen von $1/B_z$ gegenüber von der laufenden Zahl des Minimums erhalten werden.

Die Steigung in dieser Darstellung hängt mit der 2DEG Dichte über folgende Beziehung zusammen:



$$n_s = \frac{|e|}{h} * slope$$

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{1}{B_{i+1}} - \frac{1}{B_i} = \frac{2|e|}{h} \frac{1}{n_s}$$

FIGURE 5.8 The inverse of the magnetic field plotted as a function of the consecutive minima obtained from ρ_{xx} in Fig. 5.7. The line is a linear fit to the data. The slope of the line is used to calculate the density of the 2DEG.

InAs/AlGaSb Single Quantum Well – SdH – Bestimmung von m^*

Während die effektive Masse in den SdH Oszillationen nicht enthalten ist, kann sie jedoch aus Untersuchungen der Oszillationsamplitude als Funktion der Temperatur und des Magnetfeldes nach Ando et al. hergeleitet werden.

$$\rho_{xx}^{-1} = \sigma_{xx} = \frac{n_s e^2 \tau_f}{m^*} \frac{1}{1 + (\omega_c \tau_f)^2} \left[1 - \frac{2(\omega_c \tau_f)^2}{1 + (\omega_c \tau_f)^2} \frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \right]$$

$$\times \cosh \left(\frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \right) \cos \left(\frac{2\pi E_F}{\hbar \omega_c} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_f} \right),$$

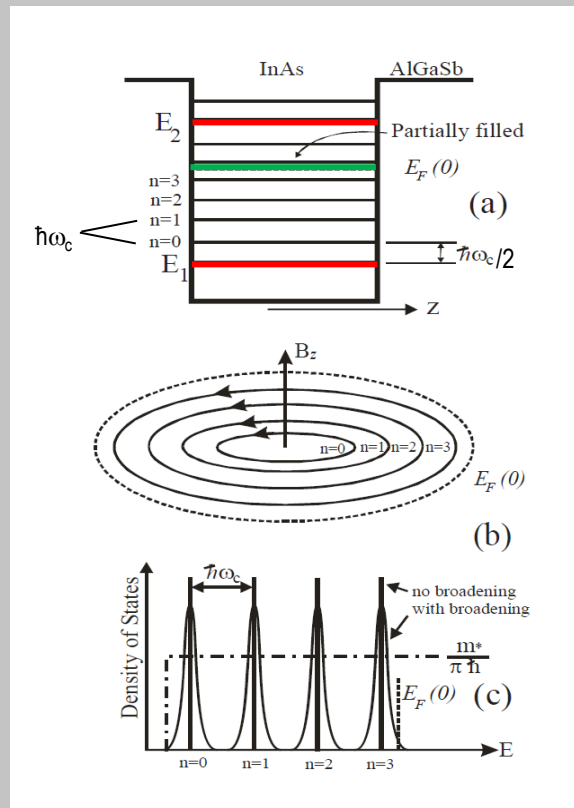
wobei E_F die Fermi-Energie durch

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} = \frac{2\pi \hbar^2 n_s}{m^*}.$$

τ_f ist Streuzzeit, die der Dephasierung der Landau-zustände entspricht, ω_c die Zyklotronfrequenz und T die Temperatur.

QW in Magnetfeld

Den Ursprung der Oszillationen von ρ_{xx} kann man mit folgender Graphik gut verstehen:



Die Aufspaltung zwischen den Landau niveaus is $\hbar\omega_c$:

Die Dichte der Zustände pro Einheitsfläche jedes Landau Niveaus ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$(\hbar\omega_c) \left(\frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \right) = \frac{m^*\omega_c}{2\pi\hbar} = \frac{eB_z}{h}$$

FIGURE 5.9 (a) A sketch of an InAs/AIGaSb single quantum well showing two bound sates (E_1 and E_2), Fermi energy level, $E_F(0)$, and Landau levels. (b) Landau levels are filled up to the Fermi energy level, which contains all allowed states when the magnetic field is zero. (c) Energy representation of Landau levels and Fermi level. Landau levels are broadened because of various scattering mechanisms.

Quantum Hall Effekt (QHE)

Klassische Bewegungsgleichung (Drude Modell)

$$m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m^* \frac{\mathbf{v}}{\tau} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

In den 3 Komponenten angeschrieben:

$$\begin{aligned} m^* \frac{dv_x}{dt} + m^* \frac{v_x}{\tau} &= -e\mathcal{E}_x - ev_y B_z \\ m^* \frac{dv_y}{dt} + m^* \frac{v_y}{\tau} &= -e\mathcal{E}_y + ev_x B_z \\ m^* \frac{dv_z}{dt} + m^* \frac{v_z}{\tau} &= -e\mathcal{E}_z. \end{aligned}$$

Durch Multiplizieren mit der Ladungsträgerkonzentration n_s und der Elektronenladung $-e$ und Vergleich mit

$$\mathbf{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E},$$

Wobei σ der Leitfähigkeitstensor ist, für deren Komponenten wir folgende Ausdrücke erhalten.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_0(1 - i\omega\tau)}{1 - (\omega^2 - \omega_c^2)\tau^2 - 2i\omega\tau} \\ \sigma_{zz} &= \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \end{aligned}$$

mit $\sigma_0 = n_s e^2 \tau / m^*$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &= \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 - (\omega^2 - \omega_c^2)\tau^2 - 2i\omega\tau} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= 0, \end{aligned}$$

Quantum Hall Effekt (QHE)

Für den Gleichgewichtsfall, in dem $dv/dt = 0$ ist, kann der σ Tensor folgendermaßen angeschrieben werden

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (\omega_c \tau)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Leitfähigkeit im 2-dim Fall für ein Magnetfeld in z-Richtung, kann deshalb ausgedrückt werden durch

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix},$$

Der spez. Widerstandstensor ρ hängt mit dem σ Tensor zusammen, durch

$$\overleftrightarrow{\rho} = \overleftrightarrow{\sigma}^{-1}.$$

Sodaß wir folgenden Ausdruck für den ρ -Tensor erhalten:

$$\overleftrightarrow{\rho} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}.$$

Quantum Hall Effekt (QHE)

The condition $\omega_c \tau > 1$ implies that the carriers are collisionless. By applying this condition to Equation 5.34, one can obtain $\sigma_{xx} \approx 0$ and $\sigma_{xy} \approx -n_s e / B$. In the presence of collisions, where $\omega_c \tau > 1$, we have

$$\sigma_{xx} = \frac{n_s e}{B_z} \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{n_s e}{B_z} - \frac{\sigma_{xx}}{\omega_c \tau}$$

The Hall conductivity, σ_{xy} can be expressed as

$$\sigma_{xy} = \frac{n_s e}{B_z} = \frac{e}{B_z} \frac{n_s e B_z}{h} = n \frac{e^2}{h}$$

$$\rho_{xy} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$$

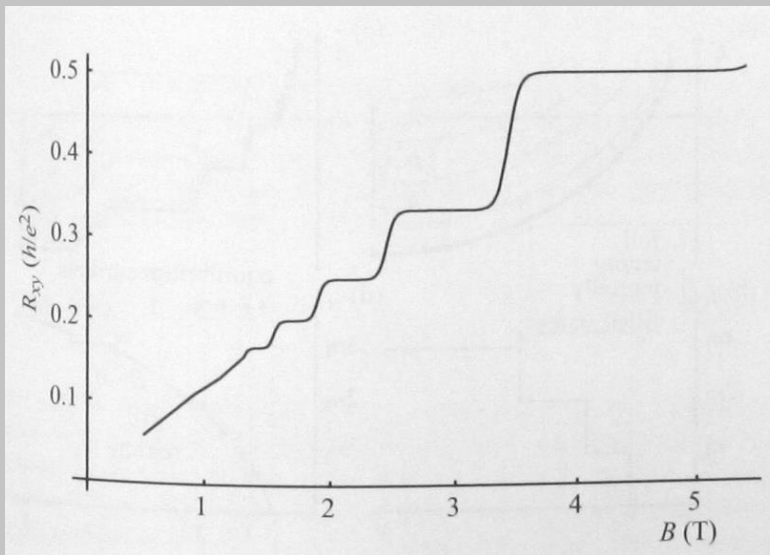


Fig. 16.28 Hall resistance calculated with the toy model described in the text. The material parameters are those of GaAs with a Fermi energy of 15 meV.

Quantum Hall Effekt (QHE)

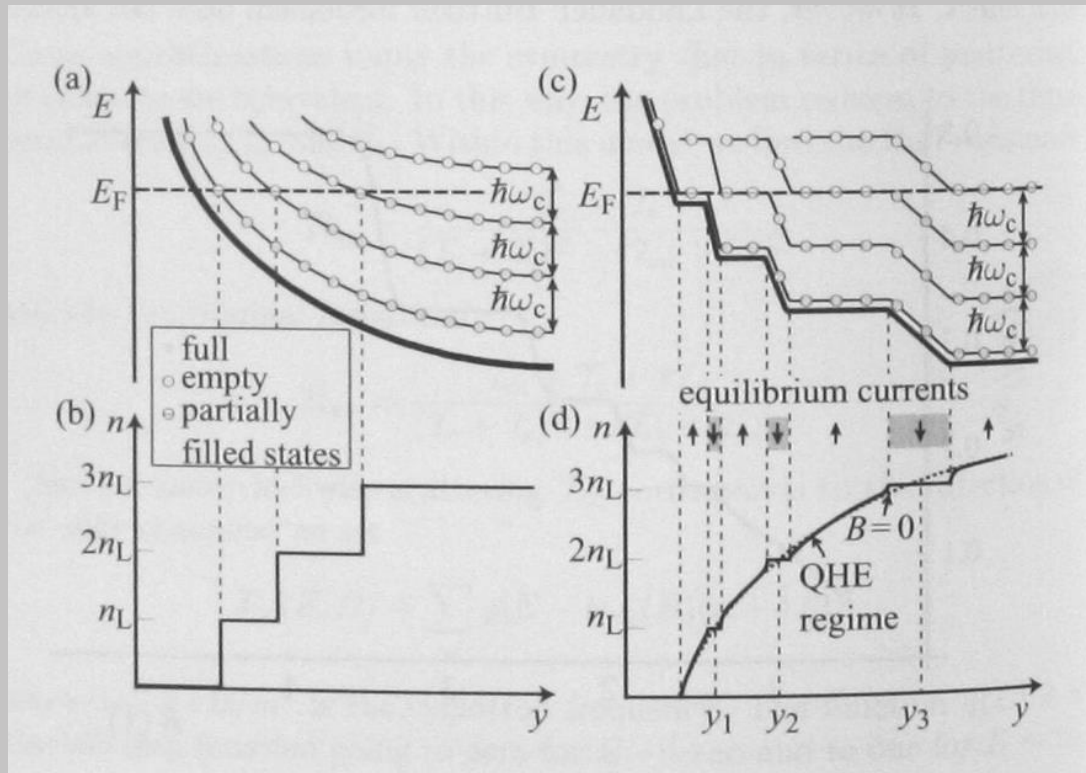


Fig. 16.29 Structure of edge states in the integer quantum Hall regime assuming spin degeneracy. (a) Adiabatic increase of Landau levels at the edge of a sample in the picture of non-interacting electrons. (b) The corresponding electron density for this case. (c) Potential and Landau level dispersion at the sample edge in the self-consistent screening model. (d) The corresponding self-consistent electron density. (Reprinted with permission from Chklovskii *et al.*, 1992. Copyright 1992 by the American Physical Society.)

Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

Tsui, Störmer, Gossard PRL 48, 1559 (1982) Experiment
 Laughlin, PRB, 5632 (1981) Theorie

Nobelpreis 1998 (Laughlin, Störmer, Tsui)

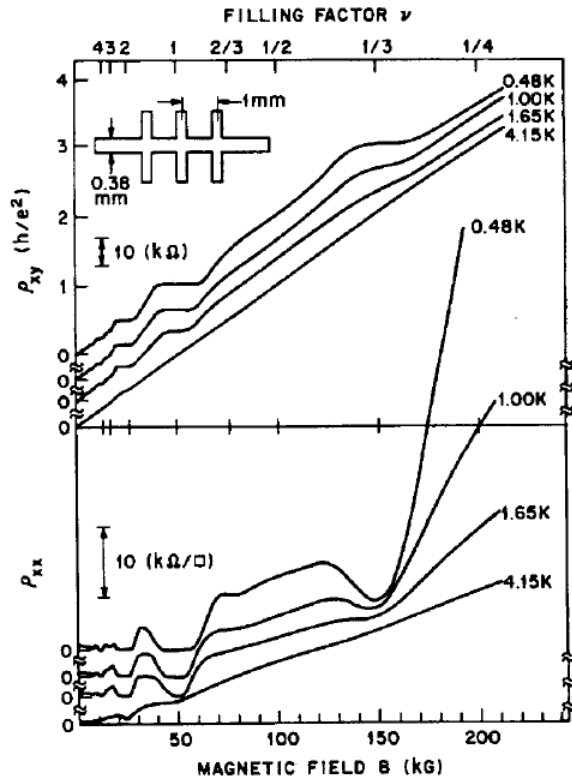


FIG. 1. ρ_{xy} and ρ_{xx} vs B , taken from a GaAs-Al_{0.3}-Ga_{0.7}As sample with $n = 1.23 \times 10^{11}/\text{cm}^2$, $\mu = 90\,000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$, using $I = 1 \mu\text{A}$. The Landau level filling factor is defined by $\nu = nh/eB$.

Im Einteilchen-Bild tritt der Quantenlimes und damit das „letzte“ Quanten-Hall-Plateau bei $\nu = 1$ auf.

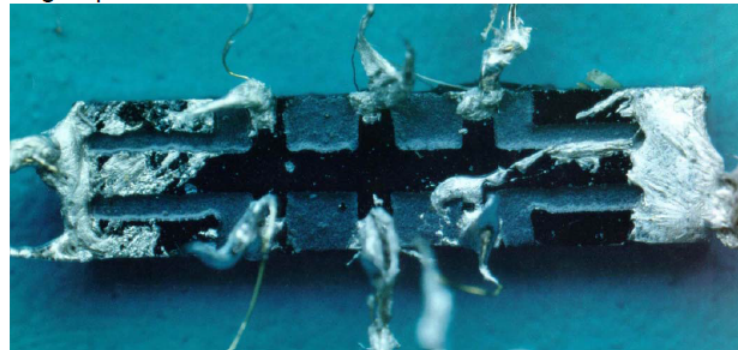
In extrem hochbeweglichen Proben werden jedoch weitere Plateaus bei gebrochenzahligen Füllfaktoren wie etwa $\nu = \frac{1}{3}$ beobachtet.

Allgemeiner gilt:

$$R_H = \frac{h}{e^2} \cdot \frac{q}{p}, \text{ wobei } q \text{ eine ungerade Zahl ist}$$

- Der QHE ergibt sich aus der Quantisierungsbedingung für ein nicht wechselwirkendes 2DEG
- Der FQHE hingegen resultiert aus Vielteilchen-Wechselwirkungen im 2DEG

Originalprobe:



Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

Bei fraktionellen Füllfaktoren z.B. $\nu = 1/3$ befindet sich E_F innerhalb eines spinaufgespaltenen Landauniveaus

Neue Energielücken ergeben sich durch Vielteilchen-WW im 2 DEG

Der neue Vielteilchen-Grundzustand ist gekennzeichnet durch:

- Quasiteilchen mit fraktioneller Ladung
- Reduktion der Coulomb-WW zwischen Teilchen gleicher Ladung

Vielteilchen-Wellenfunktion nach Laughlin (für $\nu = 1/q$):

$$\Psi_{1/q} = \prod_{i<j}^n (Z_i - Z_j)^q \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_k^n |Z_k|^2\right)$$

Eigenschaften von $\Psi_{1/q}$: (Z = komplexe Ortskoordinate) Geben Sie hier eine Formel ein.

- $\Psi_{1/q} = 0$ für $Z_i = Z_j$ \Rightarrow Pauli-Prinzip erfüllt
- Der Austausch zweier Teilchen liefert $\Psi_{1/q} \xrightarrow{q \text{ ungerade}} -\Psi_{1/q}$

\Rightarrow Fermionisches Verhalten für q ungerade

! Zusätzlich zur Symmetrie der Vielteilchen Wellenfunktion ist jedoch der Einfluß der der magnetischen Flussquanten zu beachten

Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

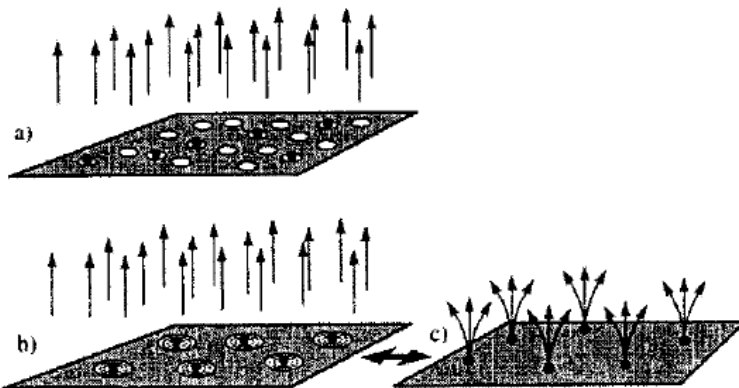
Bei einem Füllfaktor $\nu = 1/q$ treffen auf jedes Elektron im 2DEG q Flussquanten Φ_0 ($\Phi_0 = h/e$)

An jedem Ort, wo ein Flussquant das 2DEG durchdringt ergibt sich

- eine Nullstelle der Elektron-Wellenfunktion und
- eine Phasenverschiebung um 2π

⇒ jedes Flussquant erzeugt einen lokal verarmten Bereich
→ lochartiger Zustand (Vortex)

⇒ Elektronen und Vortices ziehen sich an
→ Gewinn an Coulombenergie
→ Für $\nu = 1/3$ werden 3 Flußquanten an jedes Elektron gebunden



a) unkorrelierte Vortices
b) + c) Anlagerung von jeweils 3 Vortices an ein Elektron

⇒ neues Quasiteilchen c)

Die Anlagerung von Vortices kann als diskrete Form der elektrostatischen Abschirmung im Magnetfeld gesehen werden.

Die Abschirmlänge eines Vortex ist in etwa durch die magnetische Länge $l_o = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ gegeben.

Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

Neben der Minimierung der Coulombenergie hat die Anlagerung von Vortices aber auch Auswirkungen auf die Statistik der neu entstandenen Quasiteilchen:

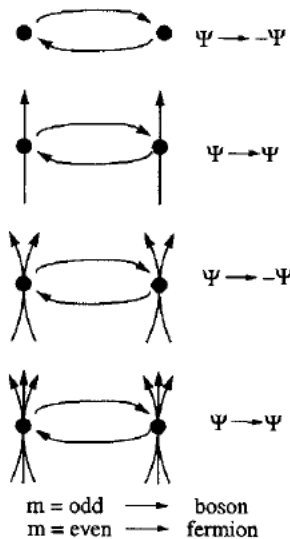


FIG. 15. Statistics of electrons and composite particles. Exchange of two particles affects the wave function Ψ , which describes the quantum-mechanical behavior of the system. For electrons, Ψ is multiplied by -1 , identifying the particles as fermions. With the attachment of an odd number of flux quanta, Ψ remains unchanged under exchange (multiplication by $+1$), identifying these particles as bosons. Attachment of an even number of flux quanta returns the particles to fermions. Here m is the number of flux quanta.

Bei Füllfaktoren $\nu = 1/q$ (q ungerade) kann es also zur Bose-Kondensation von Quasiteilchen bestehend aus Elektron und q Flussquanten kommen.

Jede Abweichung von diesem kommensurablen Vortex-Verhältnis kostet Energie

- ⇒ Energielücken bei $\nu = 1/q$ (q ungerade)
- ⇒ Lokalisierung im Bereich der Energielücke wie im QHE-Fall
- ⇒ Fraktionale Quantisierung des Hall-Widerstands

Die Zustände bei $\nu = 1/q$ und $\nu = -1/q$ (e-h Symmetrie) sind in diesem Bild gut zu verstehen.

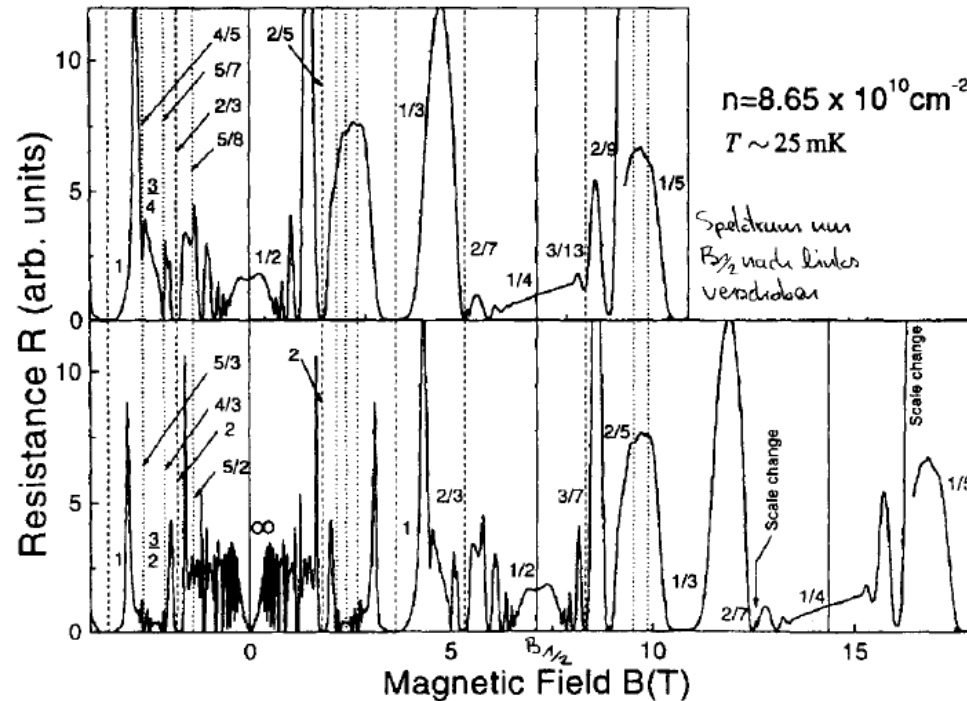
Höhere FQHE-Zustände bei $\nu = p/q$ ergeben sich durch Kondensation „übriggebliebener“ Flussquanten bzw. Elektronen

(siehe z.B. H. Störmer et al., Rev. mod. Phys. 71, S 298 (1999))

Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

Eine alternative und besonders anschauliche Erklärung des FQHE wurde von Jain vorgeschlagen: (Jain PRL 63, 199 (1989))

Composite Fermions



FQHE Daten weisen eine auffallende Symmetrie um $\nu = 1/2$ auf. Bei $\nu = 1/2$ können jedem Elektron zwei Flussquanten zugeordnet werden. \Rightarrow neues Quasiteilchen, Composite Fermion (CF)

Der FQHE kann nun als QHE der CFs verstanden werden.

Das CF „sieht“ bei $B_{1/2}$ das effektive Magnetfeld $B^* = 0$

Im CF Bild werden FQHE-Zustände mit $\nu = p/(2p \pm 1)$ besonders gut beschrieben. Für $\nu = 1/3$ gilt z.B.:

$$\Psi_{1/3} = \prod_{i < j}^n (Z_i - Z_j)^2 \prod_{i < j}^n (Z_i - Z_j) \exp()$$

$$\Psi_{1/3} = \prod_{i < j}^n (Z_i - Z_j)^2 \Psi_1 \quad \text{d. h. } \nu = 1/3 \triangleq \nu = 1 \text{ (CF)}$$

Fraktionierten Quantum Hall Effekt (FQHE)

QHE is observed for integer filling factors
However, at low temperature ($T \ll 5.2$ K), a fractional value of the filling factor, ν , has been observed for the lowest Landau level in many heterojunction systems with high mobility. In this case, ν can take values of p/q where p and q are integers. This is called the *fractional QHE* (Tsui *et al.*). Laughlin provided an explanation of the fractional QHE based on the condensation of electrons or holes into a collective ground state due to electron–electron or hole–hole interactions. This ground state is separated from the nearest excited state by an energy of $0.03e^2/l_H$, where l_H is the Landau magnetic length. The possibility of a repulsive interaction between carriers of the same charge, leading to a condensation, is related to the two-dimensional character of the system. The condensed phase consists of quasi-particles called *anyons*, of fractional charge $2/l$, where $l = 3, 5, 7, \dots$, that follow statistics intermediate between Fermi–Dirac and Bose–Einstein formalisms.