Sachinformation:

Division kontinuierlich wiederaufgreifen und vertiefen – Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat

Die Division als grundlegender Inhalt

Lernen ist immer auch ein Weiterlernen. Bei jedem Lernprozess greift man nämlich auf vorhandenes Wissen zurück und entwickelt es fortwährend weiter. Dies gilt in hohem Maße auch für das Lernen im Mathematikunterricht. Der amerikanische Psychologe Bruner spricht in diesem Zusammenhang vom sogenannten Spiralprinzip. Diesem Prinzip zufolge orientiert sich der Mathematikunterricht an fundamentalen Ideen, die im Laufe der gesamten Schulzeit immer wieder auf einem höheren Niveau und in strukturell angereicherter Form aufgegriffen werden (vgl. Krauthausen / Scherer 2014, S. 138). Solche fundamentalen Ideen können auch als ***grundlegende Inhalte*** bezeichnet werden. Beispiele für grundlegende Inhalte des Mathematikunterrichts sind nach Winter (2001, S. 1) das Stellenwertsystem, die Symmetrie sowie Funktionen. Mit diesen und vielen weiteren Inhalten kommen die Kinder bereits frühzeitig – zum Teil sogar schon vor der Schuleingangsphase – in Kontakt. Im Mathematikunterricht werden die Inhalte dann kontinuierlich thematisiert, und zwar von der Grundschule bis hin zu den höheren Jahrgängen der Sekundarstufe. Aus diesem Grund fasst Büchter (2014, S. 2ff) die Behandlung grundlegender Inhalte mit den Schlagworten „Begegnen“, „Wiederaufgreifen“ und „Vertiefen“ zusammen. Auch die Division kann unter diesen drei Kategorien betrachtet werden:

1. ***Begegnen:***
   Die Kinder begegnen der Division bereits vor dem Schuleintritt, indem sie beispielsweise eine gegebene Anzahl an Bonbons gleichmäßig auf Tüten *aufteilen* und nach der Anzahl der benötigten Tüten fragen oder eine bestimmte Anzahl an Freunden in gleich große Mannschaften *verteilen* und sich danach über die Größe jeder Gruppe informieren. Den Fachbegriff „dividieren“ kennen die meisten Kinder natürlich noch nicht. Stattdessen verwenden sie eher Begriffe aus dem Alltag, wie zum Beispiel „teilen“ oder „geteilt durch“.
2. ***Wiederaufgreifen:***
   Diese Grundvorstellungen – also das *Aufteilen* und *Verteilen* – werden später in der Grundschule wiederaufgegriffen, um die Division als fortgesetzte Subtraktion und als Umkehroperation der Multiplikation zu abstrahieren. Dabei erarbeiten die Kinder eine ganze Reihe neuer Fachbegriffe, die in gewisser Weise mit den bekannten alltagssprachlichen Begriffen in Beziehung stehen. Hierzu gehören unter anderem die Begriffe „Dividend“, „Divisor“ und „Quotient“, aber ebenso „Teiler“ und „Koteiler“.
3. ***Vertiefen:***
   Auf dieser Grundlage können die Kinder in der Sekundarstufe I ihr Divisionsverständnis vertiefen. Dort bestimmen sie nun die Teiler einer Zahl auf systematischer Weise. Hierzu wenden sie auch Teilbarkeitsregeln an. Dabei stoßen sie auf Zahlen, die sich nicht „teilen“ lassen – den sogenannten Primzahlen. Sie erkennen, dass es sich bei Teilern um multiplikative Bausteine und bei Primteilern bzw. Primzahlen sogar um die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen handelt. Mit dieser Erkenntnis öffnen die Schülerinnen und Schüler die Tür zu

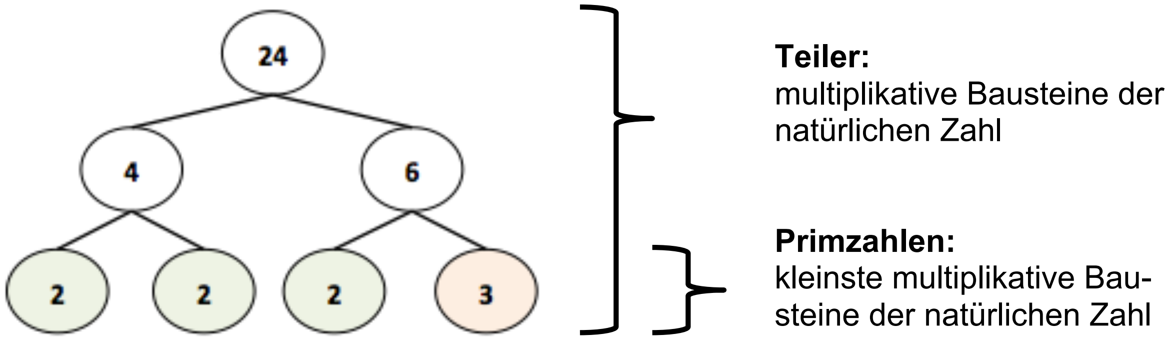
einem fundamentalen Satz der Mathematik, den man auch „Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie“ nennt (Padberg / Büchter 2015, S. 67): „Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl besitzt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) genau eine *Primfaktorzerlegung*.“

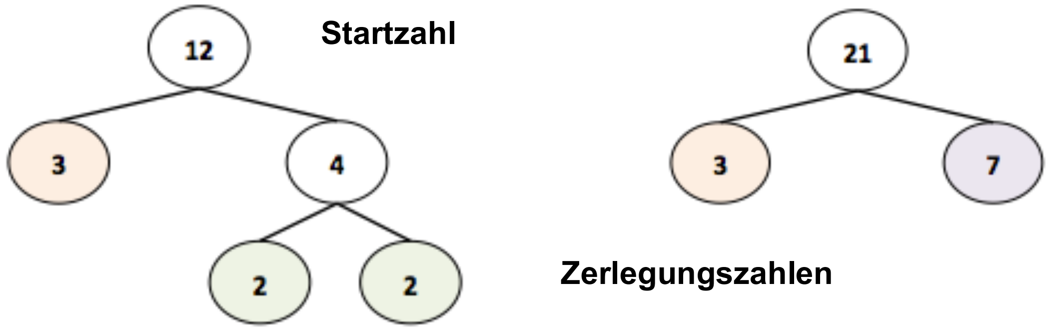
Selbstverständlich geht die Vertiefung der Division im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I noch weiter. Zum Beispiel brauchen die Kinder ein gut ausgebautes Divisionsverständnis, um den Aufbau von und das Operieren mit Bruchzahlen verstehen zu können. Bruchzahlen sind nämlich ein erweitertes Beschreibungsmittel für Ergebnisse von Divisionsaufgaben – sprich für Quotienten (vgl. Padberg 2009, S. 30). Zudem benötigen die Kinder beim Erweitern und Kürzen einer Bruchzahl wieder ihre Kenntnisse über Teiler. Genauer gesagt suchen sie nach dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner eines Bruches. Zuvor wird die dazugehörige Grundvorstellung des Verfeinerns und Vergröberns von Einteilungen aufgebaut, die wiederum auf inhaltliche Vorstellungen zur Division angewiesen ist (vgl. Padberg 2009, S. 46ff).

Aus diesen Gründen kann man bei der Division durchaus von einem grundlegenden Inhalt sprechen. Wenn die Schülerinnen und Schüler sich mit einem solchen Inhalt über mehrere Schuljahre hinweg auseinandersetzen, dann kommen sie auch immer mit einer Vielzahl an Fachbegriffen in Berührung, die in ihrer Gesamtheit ein komplexes Beziehungsgefüge ergeben. Deshalb ist es dringend erforderlich, dass die Lehrpersonen an markanten Stellen des Lernprozesses einen „Anker setzen“ und die Lernenden zur bewussten Einnahme einer Rückschau- sowie einer Vorschauperspektive anregen (vgl. Büchter 2014, S. 9). „Erinnert ihr euch noch daran, als wir Zahlen in ihre Teiler und Koteiler zerlegt haben? Diese Mathewörter brauchen wir jetzt wieder, damit wir die kleinsten Bausteine von Zahlen finden können.“ So oder ähnlich könnte die Lehrperson die *Vernetzung der Begriffe* gegenüber den Kindern andeuten. Vorangetrieben wird die Vernetzung allerdings insbesondere durch den Einsatz ***grundlegender Aufgabenformate***. Diese Aufgabenformate haben den Vorteil, dass sie durch Variation der Aufgabenstellungen von Schuljahr zu Schuljahr eingesetzt werden können und einen Beitrag zu einem kontinuierlichen Aufbau inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen leisten. Im Rahmen der Entwicklung des Divisionsverständnisses werden also nun die sogenannten Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat vorgestellt.

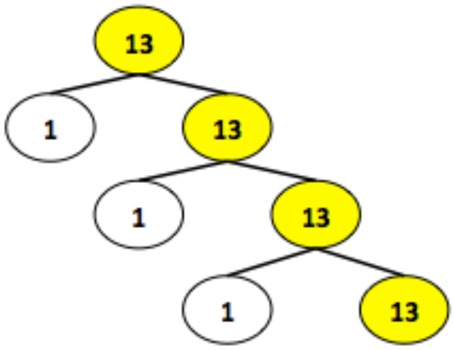
Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat

Wie bereits kurz erwähnt wurde, lassen sich natürliche Zahlen multiplikativ in ihre Bausteine zerlegen. Damit jedoch die Schülerinnen und Schüler Zahlen multiplikativ zerlegen können, sind sie auf ein ausreichendes Divisionsverständnis angewiesen. Bei der entsprechenden Zerlegung von Zahlen kommt nämlich sehr stark die Tatsache zum Tragen, dass die Multiplikation und Division voneinander abhängige Umkehroperationen sind. Dabei muss die Lehrperson aber folgendes beachten: Von allen Grundrechenarten wird die Division am schwierigsten empfunden (vgl. Robinson / Dubé 2008, S. 161). So werden Aufgaben, die sich im Bereich der Division bewegen, weit in die Sekundarstufe I hinein kaum oder sogar überhaupt nicht erfolgreich bewältigt (vgl. Ehlert et. al. 2013, S. 259). Deshalb erscheint eine frühzeitige Förderung des Divisionsverständnisses dringend geboten. Um nun den multiplikativen Zerlegungen von natürlichen Zahlen zu *begegnen*, sie kontinuierlich *wiederaufzugreifen* und zu *vertiefen*, eignet sich das Aufgabenformat der Zerlegungsbäume. Mit ihrer Hilfe lassen sich multiplikative Zerlegungen natürlicher Zahlen schnell gewinnen und übersichtlich darstellen (vgl. Padberg / Büchter 2015, S. 62). Allerdings können wir als Lehrpersonen nicht einfach voraussetzen, dass den Schülerinnen und Schülern dieses Aufgabenformat bereits bekannt ist. Stattdessen müssen die meisten von ihnen das Konstruktionsprinzip von Zerlegungsbäumen zuerst noch kennenlernen. Diese erste Auseinandersetzung könnte beispielsweise im Rahmen eines Regelplakats und einfacher Rechenaufträge organisiert werden. Darauf gehen wir allerdings später genauer ein.





Ausgehend von einer natürlichen Zahl als **Startzahl** wachsen Zerlegungsbäume von oben nach unten. Dieses Wachstum soll anhand der Startzahl 24 demonstriert werden: Zunächst wird die Startzahl 24 multiplikativ in die Faktoren 4 und 6 zerlegt, wobei bereits hier auch andere Zerlegungen denkbar wären, wie zum Beispiel 2 und 12 oder 3 und 8. Die beiden Faktoren bzw. **Zerlegungszahlen** 4 und 6 werden dann jeweils wiederum in zwei Faktoren zerlegt – nämlich in die Faktoren 2 und 2 (denn $4 = 2 \cdot 2$) sowie 2 und 3 (denn $6 = 2 \cdot 3$). Diese Faktoren können nun nicht mehr zerlegt werden, sodass man Zerlegungszahlen auf insgesamt zwei Stufen erhält. Aber wann hören Zerlegungsbäume eigentlich generell auf zu wachsen? Das ist genau dann der Fall, wenn man auf Zerlegungszahlen stößt, die sich nicht mehr multiplikativ zerlegen lassen. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Primzahlen**, die in den Zerlegungsbäumen farblich gekennzeichnet werden. Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine natürlicher Zahlen und lassen sich nur durch 1 sowie durch sich selbst teilen. Damit Zerlegungsbäume nicht unaufhörlich wachsen, werden diese *trivialen Teiler* einfach weggelassen. Falls die Schülerinnen und Schüler beim multiplikativen Zerlegen trotzdem triviale Teiler erzeugen, dann wäre es kontraproduktiv, sie direkt auf die Regeln für das Ausrechnen von Zerlegungsbäumen hinzuweisen und das Hinzufügen von solchen Teilern zu verbieten. Im Gegensatz dazu sollte man ihnen die Möglichkeit geben, selbstständig triviale Teiler zu erkennen und diese für das Wachstum der Zerlegungsbäume als unökonomisch zu kennzeichnen. Im Prinzip kann man nämlich jede natürliche Zahl in ihre zwei trivialen Teiler zerlegen. Wenn man diese Teiler im Zerlegungsbaum zulässt, dann würden sie immer und immer wieder auftauchen. Das Wachstum des Baums würde zu keinem ertragreichen Ende kommen und das macht überhaupt keinen Sinn. Wie gesagt: Zu dieser Erkenntnis sollten die Kinder allerdings selbst gelangen.



Die Startzahl 13 ist bereits eine Primzahl. Sie hat nur die trivialen Teiler 1 und sich selbst. Man kann sie also nicht sinnvoll zerlegen. Würde man die trivialen Teiler zulassen, dann würde der Zerlegungsbaum unaufhörlich wachsen.

Wir können also die wichtigsten Eigenschaften eines Zerlegungsbaums folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sowohl die Zerlegungszahlen als auch die Startzahl selbst sind Teiler bzw. multiplikative Bausteine der natürlichen Zahl, mit der man den Zerlegungsbaum beginnt.
2. Der Zerlegungsbaum endet mit Primzahlen, die sich nicht weiter multiplikativ zerlegen lassen und somit die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahl sind.
3. Die Primzahlen des Zerlegungsbaums stellen in ihrer Gesamtheit die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl dar. Wenn man sie nämlich alle miteinander multipliziert, dann erhält man wieder die Startzahl.

Sämtliche Eigenschaften können die Kinder entdecken und mithilfe sprachlicher Brücken beschreiben. Man sollte ihnen nur die Chance dazu bieten, indem man sie mit variationsreichen Aufgabenstellungen herausfordert und passenden Hilfestellungen unterstützt.

Ein Aufgabenformat, viele Aufgabenvariationen

Das Aufgabenformat „Zerlegungsbäume“ lässt sich im Mathematikunterricht flexibel einsetzen. Zum einen trägt das Aufgabenformat zur integrierten Förderung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen bei. Diese Förderung kann sich sogar problemlos über mehrere Schuljahre hinweg erstrecken, denn es lassen sich aufeinander bezogene Aufgaben passend zu den Kompetenzerwartungen der Grundschule und auch der Sekundarstufe I stellen. Zum anderen können die variationsreichen Aufgaben an die unterschiedlichen Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler angepasst werden, indem man die Komplexität zugunsten der individuellen Bedürfnisse verändert.

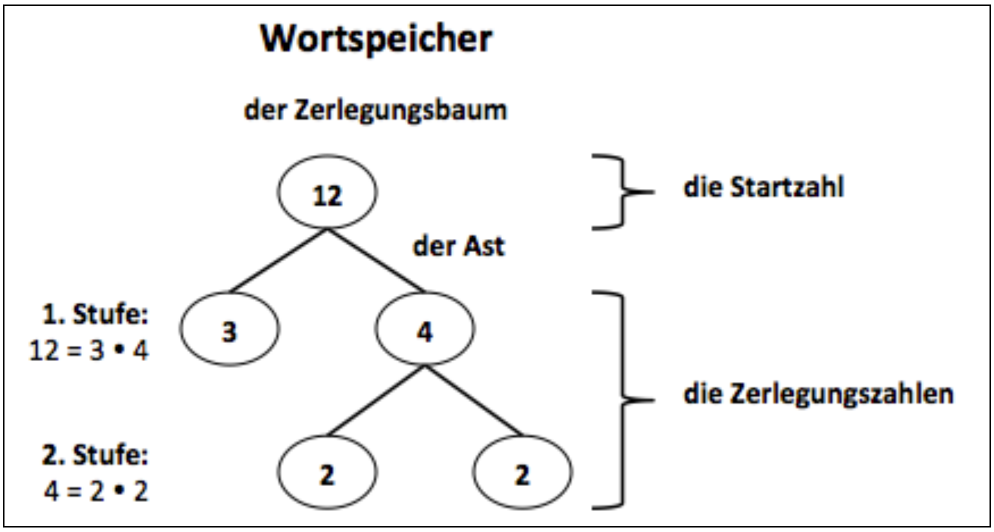
Das heißt, dass die Aufgabenstellungen sowohl auf horizontaler sowie auf vertikaler Ebene variiert werden können. Die Variationsmöglichkeiten auf ***horizontaler Ebene*** beziehen sich dabei auf die Anpassung der Aufgaben an die individuellen Bedürfnisse, die innerhalb ein und der derselben Lerngruppe existieren. Die ***vertikale Ebene*** sagt zusätzlich aus, dass das Aufgabenformat über viele Schuljahre hinweg einsetzbar ist. Entsprechende Beispiele für Aufgabenstellungen, die beide Ebenen der Variationsmöglichkeiten beinhalten, werden in diesem Abschnitt kurz vorgestellt. Bei dieser Vorstellung werden unter anderem auch Schülerdokumente hinzugezogen, die im Rahmen von Masterarbeiten zu den Zerlegungsbäumen entstanden sind. Die Dokumente demonstrieren, welche Erfahrungen die Kinder zu multiplikativen Zerlegungen bereits mitbringen und wie sich diese weiterentwickeln. Zudem soll der Aspekt der Sprachbildung berücksichtigt werden, weil die Kinder in der Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat eine Reihe von Fachbegriffen und sogar ganze fachlich relevante Satzstrukturen erarbeiten. Deshalb wird der *Wortspeicher* eine bedeutende

Rolle spielen. Weitere Informationen und Beispiele finden Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 auf der PIKAS-Website unter http://pikas.dzlm.de/412.

1. Zerlegungsbäume kennenlernen

Zunächst sollte eine Situation geschaffen werden, in der die Kinder das Aufgabenformat kennenlernen können. Darüber hinaus können sie währenddessen zeigen, welche Erfahrungen mit multiplikativen Zerlegungen sie bereits gemacht haben.

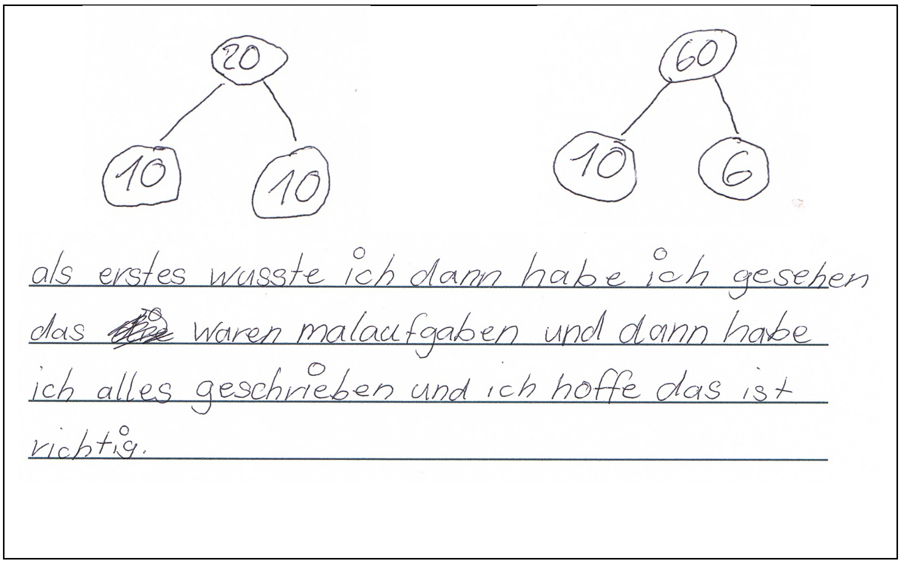
Zu Beginn der Kennenlernphase setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit einigen exemplarisch ausgewählten Zerlegungsbäumen auseinander. Diese erste Auseinandersetzung kann in der Form eines unterrichtlichen Einstiegs stattfinden, in dem die Lehrperson gemeinsam mit den Kindern den Aufbau und die mathematischen Hintergründe von Zerlegungsbäumen klärt. Dabei legt die Lehrperson vor allem dar, wo man in einem Zerlegungsbaum die Startzahl sowie die Zerlegungszahlen findet und wie diese miteinander in Beziehung stehen. Allerdings werden hier nicht schon sämtliche Fachbegriffe eingeführt, sondern nach und nach durch die Bearbeitung herausfordernder Aufgabenstellungen entwickelt. Deshalb erhalten die Kinder einen unfertigen Wortspeicher, der zunächst einmal nur die wichtigsten Begriffe enthält.



Die Schülerinnen und Schüler kommen am Anfang noch mit wenigen Wörtern aus, um den Aufbau von Zerlegungsbäumen verstehen zu können. Hierzu gehören die Wörter „Startzahl“, „Zerlegungszahlen“ und „Ast“ samt ihrer Artikel sowie „1. Stufe“ und „2. Stufe“. Sie stehen für visuell sichtbare Elemente des Zerlegungsbaums und können relativ leicht nachvollzogen werden. Zusätzlich benötigen die Kinder unbedingt die Begriffe „mal“ und „geteilt“ aus der Schuleingangsphase, denn nur so können sie verstehen, in welcher Beziehung die Wörter zueinander stehen (vgl. MSW NRW 2008, S. 61). Auf dieser Grundlage kann der Wortspeicher später erweitert werden. Demnach sind zum Beispiel die Zerlegungszahlen dasselbe wie *Teiler* von der Startzahl und sie können darüber hinaus auch *Primzahlen* sein, falls sie sich nicht weiter zerlegen lassen.

Für den weiteren Verlauf der Kennenlernphase bieten sich zwei unterschiedliche Wege an. Der erste Weg besteht darin, einige Zerlegungsbäume mit vorgegebener Startzahl auszurechnen. Jedoch werden nicht nur die Startzahlen vorgegeben, sondern auch sämtliche Äste und Felder. Die Kinder zerlegen also die Startzahlen multiplikativ und füllen die leeren Felder mit passenden Zerlegungszahlen aus. Nach dieser reinen Rechenaufgabe schließen sich sogenannte Eigenproduktionen an, indem die Schülerinnen und Schüler eigene Zerlegungsbäume erfinden (vgl. Selter 1997, S. 9). Ihre Zerlegungsbäume können dabei unterschiedlich komplex ausfallen, wodurch wir Lehrpersonen genauere Informationen darüber erhalten, wie weit die Rechenfähigkeiten der Lernenden zur multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen ausgeprägt sind. Diese Diagnose der rechnerischen Fähigkeiten wird noch dadurch angereichert, dass die Kinder ihre Vorgehensweisen beim Ausrechen von Zerlegungsbäumen beschreiben. Ihre Beschreibungen sollten allerdings so nachvollziehbar wie möglich ausfallen. Deshalb erhalten sie den Hinweis, dass sich ihre Vorgehensbeschreibungen an andere Kinder richten. Das soll den Antrieb erhöhen, genauer über das eigene Vorgehen nachzudenken. Betrachten Sie hierzu nun folgende Schülerdokumente (aus Klimek 2017):

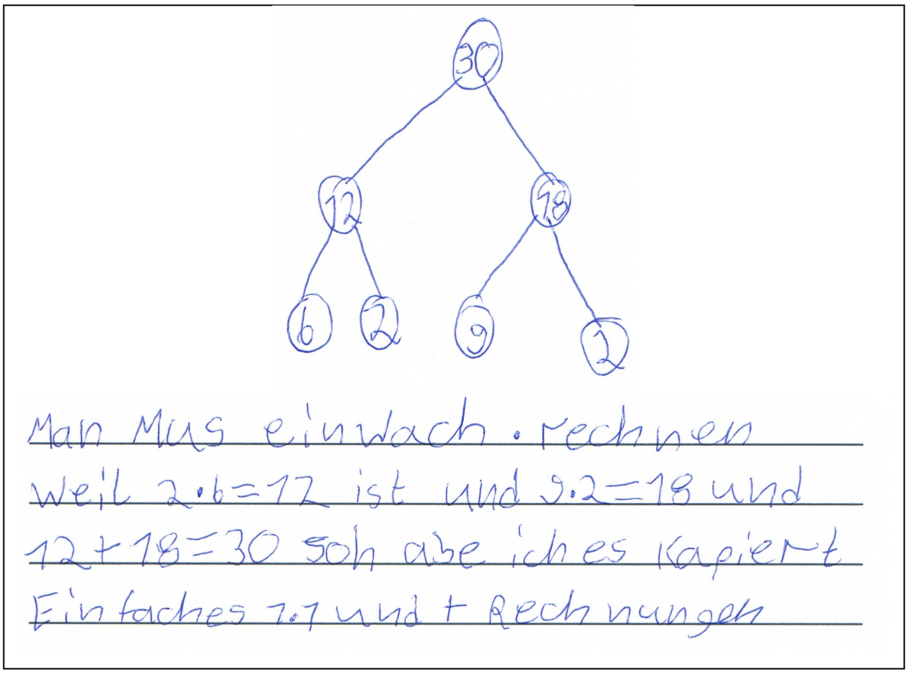
Zerlegungsbäume und Beschreibung von Abba (4. Klasse):



Abbas produziert zwei einstufige Zerlegungsbäume. Die Startzahl 20 zerlegt er additiv anstatt multiplikativ. Zwar korrigiert er diesen Fehler bei der Startzahl 60, jedoch gesteht er seine Unsicherheit hinsichtlich des Vorgehens ein. Zumal ist seine Beschreibung fachsprachlich noch ausbaufähig.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Xara (4. Klasse):

Xara entscheidet sich für die Startzahl 30 und notiert hierzu einen zweistufigen Zerlegungsbaum. Allerdings zerlegt sie die Startzahl zunächst ebenfalls additiv. Erst in der zweiten Stufe geht sie multiplikativ vor. Ihre Beschreibung klingt zwar noch etwas holprig, aber sie kann bereits die Startzahl aus den Zerlegungszahlen rekonstruieren.



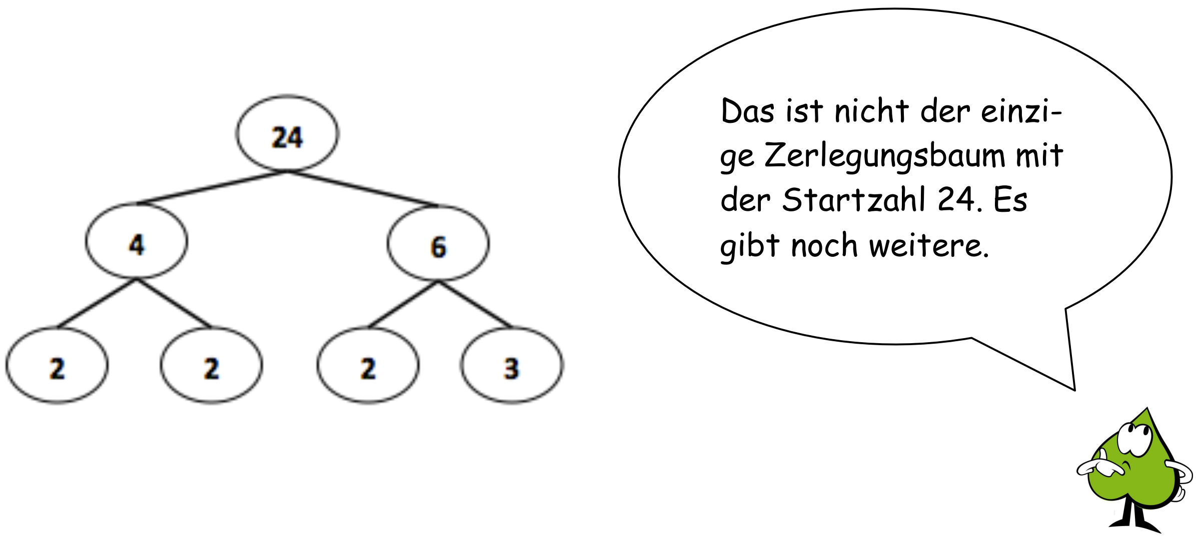
Ein alternativer Weg zum Kennenlernen von Zerlegungsbäumen kann die Aktivität „Wer zerlegt zuletzt?“ sein (vgl. Prediger / Dirks / Kersting 2009, S. 10ff). Ursprünglich handelt es sich dabei um einen spielerischen Zugang zur Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen. Da ein Zerlegungsbaum letztendlich immer auch die Primfaktorzerlegung der Startzahl enthält, kann die Aktivität natürlich auch dazu genutzt werden, um erste Erfahrungen mit dem Aufgabenformat zu sammeln. Das Unterrichtsmaterial im Haus 2 bietet die Aktivität entsprechend modifiziert an.

2. Zerlegungsbäume erforschen

Selbstverständlich ist es wichtig, dass die Kinder natürliche Zahlen sicher dividieren und somit ihre Teiler bestimmen können. Es geht hierbei schließlich um eine wichtige inhaltsbezogene Kompetenz, die für den Aufbau weiterer arithmetischer und algebraischer Kompetenzen den Grundstein legt. Es lohnt sich also durchaus, Zerlegungsbäume mit vorgegebener Startzahl ausrechnen zu lassen. Allerdings reicht das Trainieren der Rechenfertigkeiten nicht aus. Vielmehr sollten daneben auch prozessbezogene Kompetenzen gefördert werden, denn nur so können die Schülerinnen und Schüler grundlegende Begriffe rund um die Division entwickeln sowie miteinander vernetzen. Deshalb sollten die Kinder schon frühzeitig herausfordernde Aufgabenstellungen bearbeiten, die das Problemlösen, Argumentieren, Darstellen und Kommunizieren anregen. Im Rahmen der Zerlegungsbäume gibt es eine Vielzahl solcher Aufgabenstellungen. Wir formulieren sie als Forscheraufträge, von denen ein Beispiel genauer vorgestellt werden soll. Weitere Forscheraufträge finden Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 unter http://pikas.dzlm.de/412.

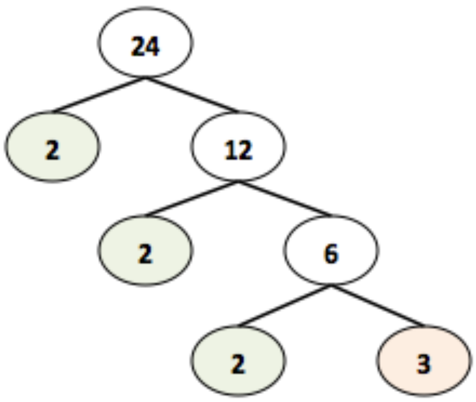
Forscherauftrag

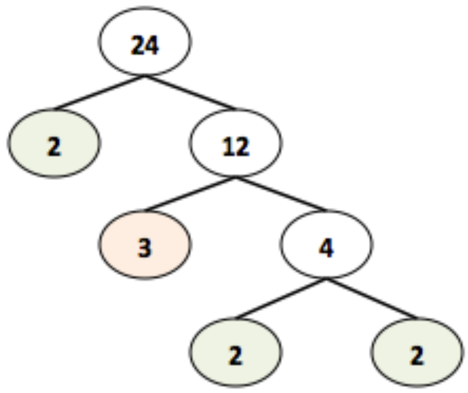
Piko hat einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 24 gefunden:

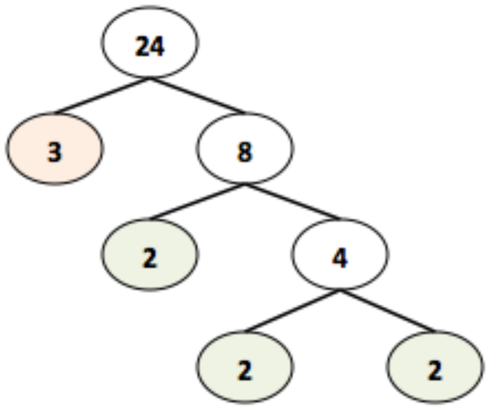


Finde alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 24. Wie gehst du dabei vor?
Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.
Hast du alle Zerlegungsbäume gefunden? Begründe.

Dieser Forscherauftrag ist ein konkretes Beispiel dafür, wie inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen Hand in Hand gefördert und gefordert werden können. Zum einen werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, unterschiedliche multiplikative Zerlegungen für ein und dieselbe natürliche Zahl zu finden. Demnach müssen sie Aufgaben aus dem kleinen Einmaleins, die zur Startzahl 24 passen, automatisiert wiedergeben und dabei auch immer die entsprechende Umkehroperation im Blick behalten können (vgl. MSW NRW 2008, S. 62). Diese inhaltsbezogene Kompetenzerwartung aus dem Bereich „Zahlen und Operationen“ wird auf jeden Fall in der Grundschule gestellt. Darüber hinaus werden die Kinder bereits auf inhaltsbezogene Kompetenzen der Sekundarstufe I vorbereitet, indem sie mehr oder weniger bewusst die Teiler einer natürlichen Zahl bestimmen (vgl. MSW NRW 2004, S. 20). Zum anderen hat der Forscherauftrag einen problemlösenden und argumentativen Charakter. Die Frage nach allen möglichen Zerlegungsbäumen zu einer bestimmten Startzahl lässt sich nämlich nicht auf Anhieb beantworten. Stattdessen werden sämtliche multiplikativen Zerlegungen zur Startzahl durch zunehmend systematisches sowie zielorientiertes Probieren aufgespürt und deren Vollständigkeit begründet (vgl. MSW NRW 2008, S. 59f). Für die Startzahl 24 gestaltet sich das noch verhältnismäßig einfach:







Je größer und komplexer die Startzahl ist, desto schwieriger kann die Suche nach allen Zerlegungsbäumen werden. Allerdings sollte schon bei der Startzahl 24 darüber diskutiert werden, ob sich die Zerlegungszahlen in jeder Stufe vertauschen lassen und dadurch weitere Möglichkeiten hinzukommen. Man könnte also in diesem Zusammenhang das Kommutativgesetz der Multiplikation thematisieren. Demzufolge bietet der Forscherauftrag ein großes Potenzial zur Entwicklung und Vertiefung von Fachbegriffen. Außerdem lassen sich aus ihm eine Reihe von Folgeaufträgen ableiten, die ebenfalls zur Erarbeitung neuer Begriffe führen können. Beispielsweise könnten die Schülerinnen und Schüler genauer untersuchen, auf welche Zerlegungszahlen die Bäume immer enden und in welcher Beziehung sie zur Startzahl stehen. Damit öffnen die Kinder eine erste Tür zu den Begriffen „Primzahlen“ und „Primfaktorzerlegung“. Diese und weitere Begriffe werden sozusagen in der prozesshaften

Auseinandersetzung mit den Zerlegungsbäumen entdeckt. Aus diesem Grund können mit ihnen gewisse Vorstellungen verbunden werden. Letztendich sollte man darauf achten, dass man auch die neu entdeckten Begriffe und entwickelten Satzphrasen dem Wortspeicher hinzufügt.

3. Zerlegungsbäume lösen und sichern

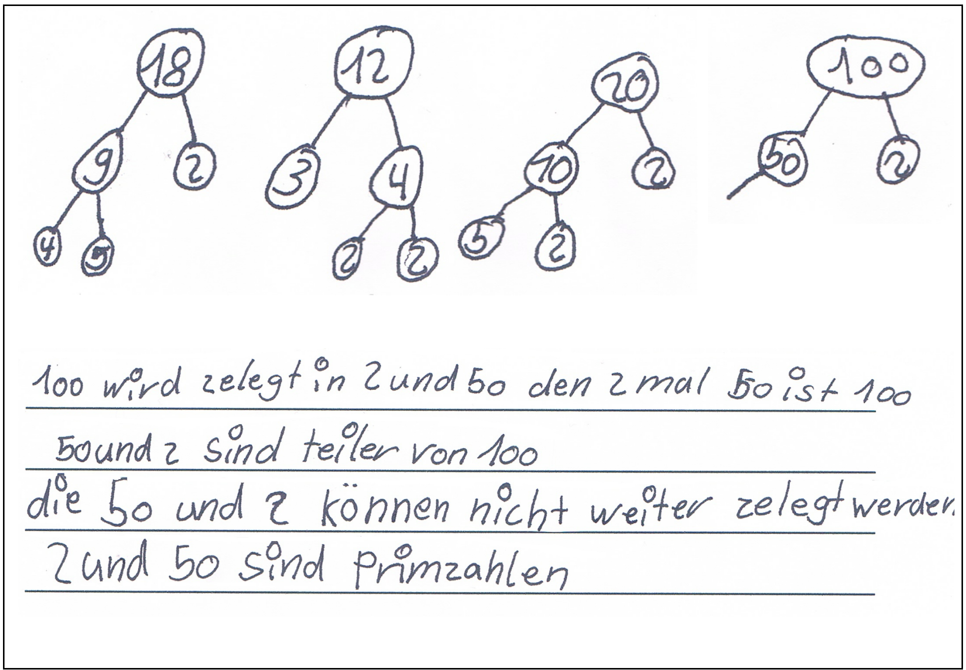
Damit die Lernenden eine gewisse Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen entwickeln, ist es von großer Wichtigkeit, dass sie sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Übungsaufgaben zu Zerlegungsbäumen bearbeiten. Dabei sollte der Wortspeicher so oft wie nur möglich zum Einsatz kommen, da er zentrale Fachbegriffe und Satzphrasen beinhaltet, die nicht nur das Lösen der Aufgaben unterstützen, sondern auch fachsprachlich korrekte mündliche sowie schriftliche Beschreibungen anregen. Solche Beschreibungen werden regelmäßig benötigt, wenn es um das Darstellen von Lösungsprozessen oder um das Begründen von mathematischen Zusammenhängen geht. Der zuvor betrachtete Forscherauftrag hat die zentrale Rolle von Beschreibungsmitteln bei der multiplikativen Zerlegung von Zahlen bereits deutlich gemacht. Die Forscheraufträge dienen aber eher der Entwicklung und Vertiefung von Fachbegriffen. Für kürzere Trainingseinheiten eignen sie sich meistens weniger. Folgende Beispiele zeigen Möglichkeiten für kurze Übungsphasen auf, die einen Beitrag zur Routine und Sicherheit leisten:

- Es können einige ***Zerlegungsbäume mit Zahlenlücken*** versehen werden. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler besteht nun darin, entweder nur die fehlenden Zerlegungszahlen zu finden oder darüber hinaus grundsätzlich die Lösbarkeit der lückenhaften Zerlegungsbäume zu klären. Wenn sie zusätzlich die Lösbarkeit beantworten sollen, dann benötigen sie wieder passende Fachwörter und Satzphrasen, die sie dem Wortspeicher entnehmen können. „Teiler“ und „Primzahlen“ sind Beispiele für entsprechende Fachwörter. Hilfreiche Satzphrasen können beispielsweise „...ist Teiler von...“ oder „...lässt sich in... und...zerlegen“ sein.
- Es werden einige Startzahlen vorgegeben – zum Beispiel 6, 12, 18 und 30. Die Schülerinnen und Schüler finden nun zu diesen Startzahlen jeweils einen passenden Zerlegungsbaum. Jedoch sollen sie die Zerlegungsbäume nicht willkürlich ausrechnen. Vielmehr werden sie dazu ermuntert, einen ***Zusammenhang zwischen den Startzahlen*** zu erkennen und diesen für das Ausrechnen der Zerlegungsbäume auszunutzen. So ist jede Startzahl des genannten Beispiels ein Vielfaches von 6. Demzufolge lassen sich alle Zerlegungsbäume aus dem Baum mit der Startzahl 6 ableiten. Der Zusammenhang und das daraus resultierende Vorgehen können beschrieben werden, weshalb sich der Einsatz des Wortspeichers erneut lohnt.

Man hat es also mit kleineren Trainingsaufgaben zu tun, von denen die erste dem unstrukturierten und die zweite dem strukturierten Üben zuzuordnen ist. Mit ihrer Hilfe kann man die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen zur multiplikativen Zerlegung von natürlichen Zahlen schnell diagnostizieren. In diesem Kontext ist zum Beispiel der *Mathebriefkasten* eine ideale Methode, um sich einen raschen Eindruck von den bisherigen Leistungen der Kinder zu verschaffen. Im Haus 9 der PIKAS-Website erhalten Sie unter http://pikas.dzlm.de/172 genauere Informationen zu dieser Methode. Zudem finden Sie im Haus 2 weitere Übungsaufgaben zum Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen.

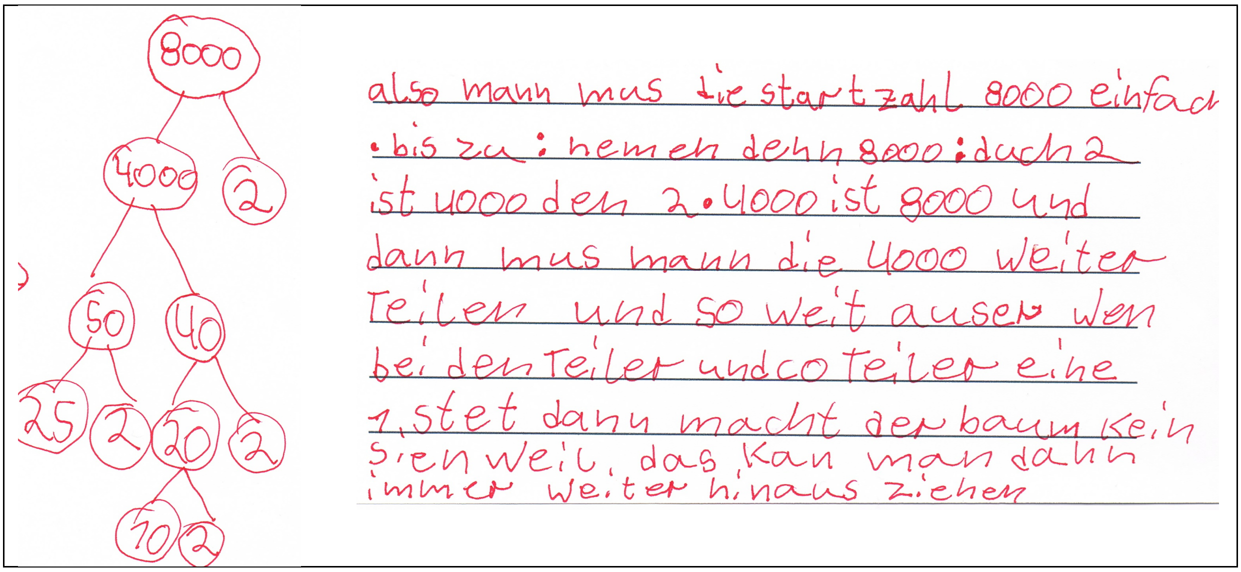
Zu guter Letzt sollte man mit den Schülerinnen und Schülern noch eine Abschlussstandortbestimmung durchführen, die deckungsgleiche Elemente der Kennenlernphase enthält. Dadurch werden die Kompetenzen des einzelnen Lernenden, die sich zu Beginn und am Ende der Auseinandersetzung mit den Zerlegungsbäumen zeigten, miteinander vergleichbar. Wir als Lehrpersonen können demnach bei jedem Kind eine Leistungsentwicklung ausmachen. Das ist bei David und Nadja ebenfalls möglich. Sie erfinden jetzt beide mehrstufige sowie komplexere Zerlegungsbäume und ihre Vorgehensbeschreibungen wirken viel sicherer als noch zu Beginn der Interviewstudie. Sie verwenden nun häufiger Fachwörter und Satzphrasen aus dem Wortspeicher. Diese können sie zu nachvollziehbaren Texten verknüpfen.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Abbas (4. Klasse):



Abbas ist nun in der Lage, auch zweistufige Zerlegungsbäume zu produzieren. Er zerlegt die Zahlen kaum noch additiv. Zudem macht er durchaus von der Fachsprache korrekt Gebrauch. Die 50 identifiziert er jedoch als Primzahl. Er konzentriert sich vermutlich auf die Zehnerstelle 5.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Xara (4. Klasse):



Xara wählt eine sehr große Startzahl und erhält dadurch einen Zerlegungsbaum, der aus vielen Stufen besteht. Die meisten Teiler wurden auch korrekt von ihr ermittelt. Ihre dazugehörige Beschreibung enthält zwar fachsprachlich richtige Elemente, muss allerdings mithilfe des Wortspeichers weiter ausgebaut werden.

Zusammenfassung

Bei den Zerlegungsbäumen handelt es sich um ein grundlegendes Aufgabenformat, mit dessen Hilfe zentrale Begriffe der Division über mehrere Schuljahre hinweg erarbeitet werden können. Die hier vorgestellten Aufgabenbeispiele lassen sich nämlich so modifizieren, dass sie von der dritten bis hin zur sechsten Klassen einsetzbar sind. Je nach thematischer Ausrichtung wäre es sogar denkbar, die Zerlegungsbäume auch in höheren Jahrgangsstufen einzusetzen. Denn im Prinzip kommen die Kinder bereits frühzeitig mit zahlentheoretischen Grundlagen in Kontakt, mit denen sich Studierende in der Hochschulmathematik beschäftigen. Aber natürlich werden die Kinder nicht mit komplizierten Inhalten aus der Hochschule erschlagen, sondern sie können gemäß ihrer eigenen Niveaus interessante mathematische Entdeckungen machen. Dieser kontinuierliche Einsatz des Aufgabenformats wird nicht allein dadurch gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler Zerlegungsbäume mit immer komplexer werdenden Zahlen ausrechnen müssen. Vielmehr sollten sie sich zudem mit herausfordernden Aufgabenstellungen auseinandersetzen, die inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen fördern und fordern. Hinsichtlich des Kompetenzaufbaus sollte also ebenfalls eine langfristige Perspektive eingenommen werden. Die Zerlegungsbäume greifen diese Perspektive auf, weil mithilfe eines solchen Aufgabenformats schon in der Grundschule ein Verständnis zu den Bausteinen der natürlichen Zahlen grundgelegt wird, auf das sich der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I beziehen kann.

Kompetenzerwartung am Ende der Klasse 4	**Kompetenzerwartung am Ende der Klasse 6**
„Die SuS entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (z.B. ist Vorgänger / Nachfolger von, ist Nachbarzehner / Nachbarhunderter von, ist die Hälfte / das Doppelte von, ist Vielfaches / ***Teiler von***).“ (MSW NRW 2008, S. 59)	„Die SuS bestimmen ***Teiler*** und Vielfache natürlicher Zahlen und wenden ***Teilbarkeitsregeln*** für 2, 3, 5, 10 an.“ (MSW NRW 2004, S. 20)

Literatur

Büchter, Andreas (2014): *Das Spiralprinzip, Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen*, in: Mathematik lehren 182, S. 2-9.

Ehlert, Antje / Fritz, Annemarie / Arndt, Dominique / Leutner, Detlev (2013): *Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe*, in: Journal für Mathematik-Didaktik 34, S. 237-263.

Krauthausen, Günter / Scherer, Petra (2014): *Einführung in die Mathematikdidaktik*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes NRW (2004): *Kernlehrplan für die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik*, Ritterbach Verlag, Frechen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (2008): *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*, Ritterbach Verlag, Frechen.

Padberg, Friedhelm (2009): *Didaktik der Bruchrechnung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Padberg, Friedhelm / Büchter, Andreas (2015): *Vertiefung Mathematik Primarstufe – Arithmetik / Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg.

Prediger, Susanne / Dirks, Thorsten / Kersting, Julia (2009): *Wer zerlegt zuletzt? Spielend die Primfaktorzerlegung erkunden*, in: Praxis der Mathematik in der Schule 51 (25), S. 10-14.

Robinson, Katherine / Dubé, Adam K. (2008): *A Microgenetic Study of Simple Division*, in: Canadian Journal of Experimental Psychology 62 (3), S. 156-162.

Selter, Christoph (1997): *Eigenproduktionen statt Fertigprodukt Mathematik!*, in: Die Grundschulzeitschrift 110, S. 6-11.

Winter, Heinrich (2001): *Mensch und Maß – Ein kurzes Kapitel leiblicher Mathematik*, in: Die Grundschulzeitschrift 141, S. 46-49.

Quelle der Schülerdokumente

Klimek, K. (2017): *Analyse einer sprach- und fachintegrierten Förderung des Teilerverständnisses von Viertklässlern*, Unveröffentlichte Masterarbeit TU Dortmund.