Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 5

Aufgabe 18 (8 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine R-Algebra. Sei S integer und eine Hauptidealalgebra. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Jedes Element $x \in S^\times \smallsetminus \mathrm{U}(S)$, das nicht prim ist, läßt sich als Produkt $x = yz$ schreiben mit $y,\ z \in S$ mit $(x) \subset (y)$ und $(x) \subset (z)$.

(2) Jedes Element $x \in S^\times \smallsetminus \mathrm{U}(S)$ läßt sich als Produkt von Primelementen aus $S^\times$ schreiben.

(3) Seien $k,\ \ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $p_i \in S^\times$ prim für $i \in [1,k]$. Sei $q_j \in S^\times$ prim für $j \in [1,\ell]$. Sei $(\prod_{i\in[1,k]} p_i) = (\prod_{j\in[1,\ell]} q_j)$.
Dann ist $k = \ell$, und es gibt ein $\sigma \in \mathrm{S}_k$ mit $(p_i) = (q_{\sigma(i)})$ für $i \in [1,k]$.

(4) Jedes Ideal in S läßt sich auch als Produkt von Primäridealen schreiben.

Aufgabe 19 (3 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring und S eine kommutative R-Algebra. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$. Zu zeigen ist, daß es folgenden R-Algebrenisomorphismus gibt.

$$\begin{array}{rcl} S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} & \leftrightarrow & \mathrm{Quot}(S/\mathfrak{p}) \\ \frac{s}{n} + \mathfrak{p}_\mathfrak{p} & \mapsto & \frac{s+\mathfrak{p}}{n+\mathfrak{p}} \\ \frac{s}{n} + \mathfrak{p}_\mathfrak{p} & \leftarrow\!\shortmid & \frac{s+\mathfrak{p}}{n+\mathfrak{p}} \end{array}$$

Aufgabe 20 (3 Punkte) Sei X ein einzelnes Element. Schreibe $\mathbf{Q}(X) := \mathrm{Quot}(\mathbf{Q}[X])$.

(1) Man bestimme alle $\mathbf{Q}$-Algebrenmorphismen von $\mathbf{Q}(X)$ nach $\mathbf{Q}(X)$. Sind alle bijektiv?

(2) Man finde $\mathbf{Q}$-Algebrenisomorphismen σ und ρ von $\mathbf{Q}(X)$ nach $\mathbf{Q}(X)$ mit $\sigma \circ \rho \neq \rho \circ \sigma$.

Aufgabe 21 (8 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Seien S eine kommutative R-Algebra. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$. Sei $x \in S^\times$. Folgendes ist zu zeigen oder zu widerlegen.

(1) Es ist $S_\mathfrak{p} \not\simeq 0$.

(2) Es ist $S_x \not\simeq 0$.

(3) Es ist $S_\mathfrak{p}$ integer.

(4) Es ist $S_\mathfrak{p}$ genau dann ein Körper, wenn S integer und $\mathfrak{p} = (0)$ ist.

Aufgabe 22 (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Seien S eine kommutative R-Algebra. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal in S für $i \in [1,n]$. Sei $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = S$ für $i,\ j \in [1,n]$ mit $i \neq j$. Wir schreiben $\mathfrak{a} := \bigcap_{i\in[1,n]} \mathfrak{a}_i$.
Zu zeigen ist die Existenz des R-Algebrenisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} S/\mathfrak{a} & \to & \prod_{i\in[1,n]} S/\mathfrak{a}_i \\ s+\mathfrak{a} & \mapsto & (s+\mathfrak{a}_i)_i\,. \end{array}$$