EINE FORMEL FÜR DEN LOGARITHMUS TRANSCENDENTER FUNCTIONEN VON ENDLICHEM GESCHLECHT

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

§ 1.

Im Nachfolgenden wird der Logarithmus der betreffenden Funktionen in der Form eines bestimmten Integrals dargestellt, welches als specieller Fall in einer viel allgemeineren Klasse von bemerkenswerthen Integralen [1] der Form

$$I(x\,;\,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^z dz \tag{1}$$

enthalten ist, wo $F(z)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften bezeichnet. Erstens soll sich $F(z)$ regulär verhalten in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen zur imaginären Axe parallelen Streifens, in welchem auch der Integrationsweg gelegen ist, und zweitens soll $F(z)$ für unendlich grosse, demselben Streifen angehörige Werthe $z = u + iv$ auf die Form

$$|F(z)| = e^{-\vartheta|v|}f(u\,,\,v) \tag{2}$$

derart gebracht werden können, dass ϑ eine positive Constante, während

[1] Siehe § 7 meiner vorangehenden Arbeit *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen.*

$f(u, v)$ eine Variable bedeutet, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt oder wenigstens nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|v|}$ diese Eigenschaft bekommt, *wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag.* Unter diesen Voraussetzungen zeigt sich leicht,[1] dass $I(x; a)$ in jedem endlichen Theile des durch die Ungleichheiten

$$-\vartheta + 2\varepsilon \leqq \theta \leqq + \vartheta - 2\varepsilon \tag{3}$$

definirten Bereiches von $x = |x| e^{i\theta}$ gleichmässig convergirt und zugleich die fundamentale Ungleichheit erfüllt

$$|I(x; a)| < C(a, \varepsilon) |x|^a, \tag{4}$$

wo C eine nur von a und ε abhängige positive Constante bedeutet.

Ein einfaches Beispiel hiervon bildet das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{x^z}{z} dz,$$

bei welchem $\vartheta = \pi$, und a keine ganze Zahl sein darf. Der Convergenzbereich dieses Integrals ist also $-\pi < \theta < +\pi$, d. h. die ganze x-Ebene mit Ausschluss der negativen Hälfte der reellen Axe. Der Werth des Integrals ist im allgemeinen von a abhängig; insbesondere hat man für $0 < a < 1$:

$$\log(1 + x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{x^z}{z} dz, \qquad 0 < a < 1. \tag{5}$$

Diese Formel ergiebt sich, indem man den Integrationsweg z. B. in der positiven Richtung der reellen Axe ohne Ende verschiebt und die zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen summirt. Dabei nähert sich das Integral für $|x| < 1$ der Grenze Null, während zugleich auf der rechten Seite die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ erscheint.

Wird der Integrationsweg in positiver Richtung so weit verschoben, dass a einen zwischen den ganzen Zahlen $p + 1$ und $p + 2$ gelegenen Werth erhält, so folgt aus (5)

[1] Siehe § 7 meiner vorhergehenden Arbeit.

$$(6)\qquad \log(1+x)+\sum_{\lambda=1}^{p}(-1)^{\lambda}\frac{x^{\lambda}}{\lambda}=(-1)^{p}\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}\frac{x^{z}}{z}\,dz,$$
$$p+1<a<p+2.$$

Mit Benutzung dieser Formel können wir nun den Logarithmus einer ganzen Funktion vom Geschlechte p:

$$(7)\qquad \Pi(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a_\nu}\right)e^{-\frac{x}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{2}+\dots+(-1)^{p}\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p}}$$

in der Form eines bestimmten Integrals darstellen. Ersetzt man zu dem Ende in (6) x durch $\frac{x}{a_\nu}$, $\nu=1,2,\dots,\infty$, so folgt durch Addition der so entstehenden Gleichungen

$$(8)\qquad \log\Pi(x)=(-1)^{p}S(p+1)\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}S(z)\frac{x^{z}}{z}\,dz,$$
$$p+1<a<p+2,$$

wo

$$(9)\qquad S(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{z}}.$$

Hierbei muss indess vorausgesetzt werden, dass sich eine positive Zahl $\vartheta<\pi$ so angeben lässt, dass die Grössen $a_\nu=|a_\nu|e^{i\theta_\nu}$ die Bedingung erfüllen

$$(10)\qquad -\vartheta\leqq\theta_\nu\leqq+\vartheta,\qquad \nu=1,2,\dots,\infty.$$

Alsdann sind von einer gewissen Stelle an die absoluten Beträge der einzelnen Glieder von $S(z)$ beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der convergenten Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu^{p+1}}\right|e^{\vartheta|v|},$$

wofern zugleich der reelle Theil von $z=u+iv$ nicht kleiner als $p+1$ ist. Somit ist

$$\left|\frac{\pi}{\sin\pi z}S(z)\right|=e^{-(\pi-\vartheta)|v|}f(u,v),$$

wo f bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt. Hieraus folgt nun, dass das Integral (8) gleichmässig convergirt in jedem endlichen Theile des durch

$$(11) \qquad -(\pi-\vartheta) < \theta < +(\pi-\vartheta)$$

definirten Bereiches von $x = |x| e^{i\theta}$.

In diesem Bereiche (11) *stellt also die obige Formel* (8) *unter der Voraussetzung* (10) *den Logarithmus von* $\Pi(x)$ *dar.*

Bezeichnet ρ den *Convergenzexponenten* von $S(z)$, d. h. jene positive Zahl, welche dadurch eindeutig bestimmt ist, dass von den beiden Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\rho-\varepsilon}}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\rho+\varepsilon}}$$

die erstere divergirt, die letztere convergirt, wie klein auch ε sein mag, so besitzt ρ jedenfalls einen Werth in dem von p bis $p+1$ reichenden Intervall, die Grenzen nicht ausgeschlossen. Ist nun $\rho < p+1$, so kann der Integrationsweg zwischen ρ und $p+1$ verlegt werden. Nach dem CAUCHY'schen Satze folgt dann aus (8):

$$(8') \qquad \log \Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z} dz, \qquad \rho < a < p+1.$$

Bezeichnet man durch $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_\nu, \ldots$ die sämmtlichen von einander *verschiedenen* Nullstellen von $\Pi(x)$ und mit $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ ihre resp. Ordnungen, so ist

$$(7') \qquad \Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\alpha_\nu}\right) e^{-\frac{x}{\alpha_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha_\nu}\right)^2 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{p}\left(\frac{x}{\alpha_\nu}\right)^p} \right\}^{m_\nu},$$

$$(9') \qquad S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m_\nu}{\alpha_\nu^z}.$$

Es verdient besonders erwähnt zu werden, dass die obige Formel auch für Logarithmen solcher Producte unverändert bestehen bleibt, bei denen die m_ν nicht mehr *positive ganze* Zahlen sind. Alsdann hört das Produkt indess auf, eine ganze Funktion zu sein, und insbesondere hört seine Eindeutigkeit auf, falls die m_ν nicht alle ganze Zahlen sind. Unter transcendenten Funktionen von endlichem Geschlecht haben wir in der Überschrift dieser Arbeit alle in der Formel (7′) enthaltenen ein- und mehrdeutigen Funktionen gemeint, obwohl wir weiterhin die ganzen transcendenten Funktionen vorzugsweise berücksichtigen werden.

Eine nach wachsenden Potenzen von x fortschreitende Entwicklung von $\log \Pi(x)$ ergiebt sich offenbar, indem man den Integrationsweg ohne Ende in positiver Richtung verschiebt und die zu den passirten Polen gehörigen Residuen summirt. Die Bedeutung unserer Formel liegt aber nicht hierin, sondern vielmehr in dem Umstande, dass der Integrationsweg auch in der entgegengesetzten Richtung in vielen, und zwar in namhaft zahlreicheren Fällen, als man es auf den ersten Blick anzunehmen geneigt wäre, verschoben werden kann, wobei eine nach absteigenden Potenzen fortschreitende, für grosse Werthe von x brauchbare *asymtotische* Entwicklung von $\log \Pi(x)$ hervorgeht. Zu dem Ende hat man vor allem zu entscheiden, ob die durch die Reihe (9) definirte Funktion $S(z)$ ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe existirt, sowie eventuell von welcher Beschaffenheit die singulären Stellen von $S(z)$ sind, da ja die Benutzung des CAUCHY'schen Satzes auch von diesem Umstande abhängt. *Hiernach erhalten die Dirichlet'schen Reihen der Form* (9) *auch für die Theorie der ganzen transcendenten Funktionen ein ganz besonderes Interesse.* Obwohl die zu erledigenden vorläufigen Untersuchungen im allgemeinen grosse Schwierigkeiten darbieten, so giebt es doch auch, wie ich in einer künftigen Arbeit zeigen werde, sehr allgemeine Gattungen DIRICHLET'scher Reihen, bei denen man die Schwierigkeiten überwinden kann. Siehe die Andeutungen im letzten Paragraphen dieser Arbeit.

In der vorliegenden Arbeit werde ich an besonderen Beispielen erläutern, wie sich die oben angedeutete Anwendung der Formel (8) in einzelnen Fällen gestaltet und von welcher Verschiedenheit die dabei sich ergebenden Resultate sein können. In den Paragraphen 2 und 3 handelt es sich eigentlich nur um die beiden einfachsten Fälle, wo die Nullstellen von $\Pi(x)$ eine arithmetische oder eine geometrische Reihe bilden. Die Anwendung der betreffenden Formel führt zu zwei bei dem ersten Blick so verschiedenen Ergebnissen, wie es die STIRLING'sche Formel und die lineare Transformation einer Thetafunktionen sind. Die DIRICHLET'schen Reihen, welche resp. diesen beiden Fällen entsprechen, nämlich

$$\zeta(z, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^z} \quad \text{und} \quad \frac{a^z}{a^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu z}} \qquad a > 1,$$

bilden zugleich, wie aus § 5 zu finden ist, die einfachsten Typen von zwei allgemeinen Gattungen DIRICHLET'scher Reihen, durch welche, ebenso wie durch diese Reihen, in der ganzen z-Ebene existirende eindeutige Funktionen definirt werden, welche sich an jeder endlichen Stelle wie rationale Funktionen verhalten.

§ 2.

Setzt man

$$P_n(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}} \right\}^{\nu^n}, \tag{12}$$

so ist für dieses Produkt $\rho = p = n + 1$, $\vartheta = 0$, $m_\nu = \nu^n$,

$$S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{z-n}} = \zeta(z - n),$$

und somit nach (8')

$$\log P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z - n) \frac{x^z}{z} dz, \quad n + 1 < a < n + 2,$$

oder auch

$$(-1)^n \log P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z) \frac{x^{z+n}}{z+n} dz = I_n(x; a), \quad 1 < a < 2, \tag{13}$$

für alle Werthe $x = |x| e^{i\theta}$, welche die Bedingung erfüllen:

$$-\pi < \theta < +\pi.$$

Bekanntlich ist $(z - 1)\zeta(z)$ eine ganze transcendente Funktion. Überdies besitzt aber diese Funktion noch die folgende Eigenschaft, die hier als bekannt vorausgesetzt wird: Beschränkt man die Variable z auf einen beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $\zeta(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, bei wachsendem $|z|$ der Grenze Null. Hieraus folgt aber, dass der Integrationsweg von $I_n(x\,; a)$ unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer Richtung beliebig weit verschoben werden kann, und zwar convergirt das Integral fortwährend gleichmässig in jedem endlichen Theile der x-Ebene, welcher keinen Punkt mit der negativen Hälfte der reellen Axe gemeinsam hat. Die zu den Polen des Integranden gehörenden Residuen ergeben sich leicht mit Benutzung der Formeln

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}, \quad \zeta(-2\nu) = 0, \quad \zeta(1-2\nu) = (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu},$$
$$(z-1)\zeta(z) = 1 - \psi(1)(z-1) + \dots.$$

Bei der Annahme $n = 0$ ergiebt sich im Besonderen

$$\log \Gamma(x+1) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu(2\nu-1)} x^{1-2\nu} - I_0(x\,; a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1. \tag{14}$$

Bei dieser Herleitung der Stirling'schen Formel wird zugleich die Gültigkeit derselben für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe erwiesen.

Ist $n > 0$, so ergeben sich, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, die folgenden Formeln

$$\log P_{2n}(x) = \zeta'(-2n) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\log x$$
$$+ \left(\psi(1) + \frac{1}{2n+1}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\frac{x^{2n+1-2\nu}}{2n+1-2\nu} + I_{2n}(x\,; a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1 < -2n. \tag{15}$$

$$\log P_{2n-1}(x) = \zeta'(1-2n) + \left(\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\right)\log x$$
$$- \left(\psi(1) + \frac{1}{2n}\right)\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{1}{2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + {\sum_{\nu=1}^{k}}'(-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu}\frac{x^{2n-2\nu}}{2n-2\nu} - I_{2n-1}(x\,; a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1 \leqq -2n+1. \tag{16}$$

In der letzten Formel deutet der Strich an, dass das Glied, wo $\nu = n$, nicht vorkommt.

Setzt man $a = -2k - 1 + \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, und benutzt die fundamentale Ungleichheit (4), so ergiebt sich, *dass sich das Restintegral in jeder der drei Formeln bei wachsendem* $|x|$ *der Grenze Null nähert, und zwar so schnell, dass noch die Grösse*

$$|x^{m-2\delta} I(x\,;\,a)| < C(a\,,\,\varepsilon)|x|^{-\delta},$$

wo m *den Überschuss der Zahl* $2k+1$ *über resp.* $0\,,\,2n\,,\,2n-1$ *bedeutet, gegen die Null convergirt.* Hierbei muss das Argument von x die Bedingung $-\pi + \varepsilon \leqq \theta \leqq +\pi - \varepsilon$ erfüllen, unter ε eine beliebig kleine, aber bestimmte positive Zahl verstanden.

Setzt man

$$\text{(17)} \qquad \Pi_n(x) = \frac{e^{\pi_n(x)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}}\right\}^{(\nu,\,n)}} = \Gamma_n(x+1),$$

$$(\nu\,,\,n) = \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{1\,.\,2\ldots n},$$

so hat man bei passender Bestimmung der ganzen rationalen Funktionen $\pi_n(x)$, wie aus meiner Arbeit [1] über $\zeta(s\,,w)$ zu finden ist, eine unendliche Folge von Funktionen mit den Eigenschaften

$$\Pi_n(x+1) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_{n-1}(x)}, \qquad n = 1\,,\,2\,,\ldots,\infty.$$

Da die Dirichlet'schen Reihen

$$S_n(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{1\,.\,2\ldots n}\frac{1}{\nu^z},$$

welche in der Formel (8) diesen Produkten entsprechen, durch die Funktion $\zeta(z)$ offenbar ausgedrückt werden können, so bietet die Herleitung von asymptotischen Formeln für die Logarithmen dieser Π-Funktionen keine neuen Schwierigkeiten dar. Dabei ergeben sich zugleich als specielle Fälle asymptotische Formeln für solche Ausdrücke wie die folgenden

[1] Acta Soc. Sc. Fennicae. Tome 24.

$$\underline{|m} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m,$$

$$\underline{|m}_1 = \underline{|1}\ \underline{|2}\ \underline{|3} \ldots \underline{|m},$$

$$\underline{|m}_2 = \underline{|1}_1\ \underline{|2}_1\ \underline{|3}_1 \ldots \underline{|m}_1,$$

etc.

§ 3.

Setzt man

(18) $$\Pi_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\{1 + q^{2\nu+1}x\}^{(2\nu+1)^n}, \qquad q = e^{\pi i \tau} < 1,$$

so ist bei diesem Produkt $\rho = p = 0$, $m_\nu = (2\nu + 1)^n$ und $\vartheta = 0$, falls q eine reelle positive Zahl, was im Nachfolgenden angenommen wird, sowie

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu + 1)^n e^{(2\nu+1)\pi i \tau z} = \left(\frac{1}{\pi i z}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{(2\nu+1)\pi i \tau z} = \left(\frac{1}{\pi i}\right)^n z^{-n} \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \frac{\frac{i}{2}}{\sin \pi \tau z}.$$

Somit ist

(19) $$\log \Pi_n(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{\sin \pi \tau z} \frac{x^z}{z^{n+1}} dz,$$

$$0 < a < 1,$$

und zwar gilt diese Formel bei positivem q für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe.

Wir sind also zur Untersuchung des folgenden Integrals geführt

(20) $$I(x\,;a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{\sin \pi \tau z} \frac{x^z}{z^{n+1}} dz, \qquad 0 < a < 1.$$

Die Pole des Integranden sind $z = \nu$ und $z = \frac{\nu}{\tau}$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty$; und sie bilden also zwei arithmetische Reihen, deren entsprechende Punkte auf der reellen, beziehungsweise auf der imaginären Axe liegen, weil τ nach der Voraussetzung rein imaginär ist. Nach dem Cauchy'schen Satze ist $I(x\,;a)$ gleich dem Integral $I(x\,;-a)$, dessen Integrationsweg zwischen 0 und -1 läuft, vermehrt um die Residuen R_ν, welche zu den auf der imaginären Axe liegenden Polen gehören. Diese Pole sind, abgesehen von der $(n+3)$-fachen Stelle $z=0$, alle einfach. Andererseits geht aus der Form des Integrals hervor, dass

$$I(x\,;-a)=(-1)^{n+1}I\left(\frac{1}{x}\,;a\right).$$

Man hat also

$$(21)\qquad I(x\,;a)+(-1)^n I(x^{-1}\,;a)=R_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(R_\nu+R_{-\nu}),$$

wo

$$R_\nu+R_{-\nu}=(-1)^\nu\frac{\tau^n}{\nu^{n+1}}\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}}+(-1)^n x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin\pi\frac{\nu}{\tau}},$$

während R_0 die Form hat

$$R_0(\tau,\log x)=C_{n+2}(\tau)(\log x)^{n+2}+C_n(\tau)(\log x)^n+C_{n-2}(\tau)(\log x)^{n-2}+\dots,$$

wo die C rationale Funktionen von τ sind. Das letzte Glied ist von x unabhängig, falls n eine gerade Zahl ist.

Verschiebt man den Integrationsweg von (20) ohne Ende in der positiven Richtung der reellen Axe, so nähert sich $I(x\,;a)$ bei der Annahme $|x|<e^{\pi|\tau|}$ der Grenze Null, während sich zugleich auf der rechten Seite eine Reihenentwicklung für $I(x\,;a)$ ergiebt. Setzt man diese Reihenentwicklung in (21) ein, so hat man die Formel

$$(22)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^{n+1}}\frac{x^\nu+(-1)^n x^{-\nu}}{\sin\pi\nu\tau}$$

$$=-R_0(\tau,\log x)+\tau^n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^{n+1}}\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}}+(-1)^n x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin\pi\nu\frac{-1}{\tau}},$$

deren linke Seite für $e^{-\pi|\tau|}<|x|<e^{\pi|\tau|}$ und rechte Seite für $-\pi<\theta<+\pi$ convergirt. — Setzt man $x=1$ und n gleich einer geraden Zahl, so ist im Besonderen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^{2n+1}}\frac{1}{\sin\pi\nu\tau}=r(\tau)+\tau^{2n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^{2n+1}}\frac{1}{\sin\pi\nu\frac{-1}{\tau}},$$

wo $r(\tau)$ rational in τ ist. Obwohl τ bei der Herleitung dieser Formel als eine rein imaginäre positive Zahl vorausgesetzt wurde, so convergiren doch die beiden Seiten derselben gleichmässig in jedem endlichen Theile der oberhalb der reellen Axe liegenden Halbebene. Bezeichnet man die linke Seite, welche offenbar die Periode 2 besitzt, mit $\varphi(\tau)$, so besitzt diese Funktion die beiden, an die automorphen Funktionen erinnernden Eigenschaften

$$\varphi(\tau + 2) = \varphi(\tau),$$
$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = r\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \tau^{2n}\varphi(\tau).$$

Was endlich die aus (19) sich ergebenden asymptotischen Formeln betrifft, so wollen wir bei dieser Gelegenheit nur den Fall $n = 0$ näher betrachten. In diesem Falle erhält man für R_0 den Ausdruck

$$R_0(\tau, \log x) = \frac{(\log x)^2}{2\pi\tau} + \frac{\pi}{6}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$$

und sodann aus (19) und (21) die Formel

$$\log \Pi_0(x) = -\log \Pi_0(x^{-1}) - \frac{(\log x)^2}{4\pi i\tau} + \frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{2i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin \pi\nu\frac{-1}{\tau}}, \tag{23}$$

welche zeigt, wie sich $\Pi_0(x)$ für grosse Werthe von x verhält. Beschränkt man nämlich $x = |x|e^{i\theta}$ auf den Bereich $-\pi + \varepsilon \leqq \theta \leqq +\pi - \varepsilon$, so bleibt die auf der rechten Seite stehende Reihe endlich; denn es ergiebt sich leicht

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin \pi\nu\frac{-1}{\tau}}\right| < -\frac{2}{1 - e^{\frac{2\pi}{i\tau}}}\log\left(1 - e^{\frac{\varepsilon}{i\tau}}\right),$$

unter τ eine rein imaginäre positive Zahl verstanden.

Diese Formel (23) kann aber auch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet werden. Sie ist in der That zugleich eine Formel für die lineare Transformation einer gewissen Thetafunktion. Setzt man nämlich

$$\theta(v\,;\,\tau)\,\Pi_0(e^{2\pi i v})\,\Pi_0(e^{-2\pi i v}) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\{1 + q^{2\nu+1}e^{2\pi i v}\}\{1 + q^{2\nu+1}e^{-2\pi i v}\},$$

wo $q = e^{\pi i \tau}$, so ist

$$\log \theta(v\,;\,\tau) = \frac{1}{2i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu}\frac{e^{2\pi i \nu v} + e^{-2\pi i \nu v}}{\sin \pi\nu\tau}.$$

Aus (23) ergiebt sich nun in der That, wenn man $x = e^{2\pi i v}$ setzt:

$$\theta\left(\frac{v}{\tau}\,;\,-\frac{1}{\tau}\right) = \theta(v\,;\,\tau)e^{\frac{\pi i v^2}{\tau} - \frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)}.$$

§ 4.

Auf Grund der obigen Ergebnisse werden wir ungezwungen veranlasst, die Formel (8) auf die zuerst von Herrn Appell eingehender untersuchten Produkte [1]

$$\Pi(x\,;\,\tau_1\,,\,\ldots\,,\,\tau_n) = \prod_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty}\{1 + xq_1^{2\nu_1+1}\ldots q_n^{2\nu_n+1}\} \tag{24}$$

$$q_\mu = e^{\pi i \tau_\mu}, \quad |q_\mu| < 1, \quad \mu = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n,$$

anzuwenden, wo die Indices ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe von der Null an durchlaufen. Es wird sich ergeben, dass die obige Formel für die lineare Transformation der betreffenden Thetafunktion ein specieller Fall einer für diese allgemeineren Produkte gültigen Formel ist.

Die Dirichlet'sche Reihe, welche in der Formel (8) dem Produkte (24) entspricht, lautet

$$S(z) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} q_1^{(2\nu_1+1)z}\ldots q_n^{(2\nu_n+1)z}$$

$$= \frac{q_1^z}{1 - q_1^{2z}}\cdots\frac{q_n^z}{1 - q_n^{2z}} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{\sin \pi\tau_1 z}\cdots\frac{1}{\sin \pi\tau_n z}.$$

---

[1] Mathematische Annalen. Bd. 19.

Jetzt beabsichtige ich aber zugleich, eine solche Anwendung der betreffenden Formel zu geben, bei welcher die den Argumenten der Grössen a_ν und x auferlegten Beschränkungen durch eine andere Wahl des Integrationsweges aufgehoben werden, während allerdings der absolute Betrag von x eine früher nicht stattgefundene Bedingung erfüllen muss. In der Formel (8) müssen die Argumente der Grössen a_ν die Bedingung (10) und das von x die Bedingung (11) erfüllen, während der absolute Betrag von x keiner Beschränkung unterliegt. Benutzt man aber statt der auf der reellen Axe senkrecht stehenden Geraden $u = a$ als Integrationsweg eine die Stellen $z = p + 2, p + 3, \ldots, \infty$ umschliessende Curve $(p + 2, \infty)$, deren kein Theil ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe (9) liegen darf, etwa die gebrochene Linie

$$+\infty - i\omega \text{——} a - i\omega \text{——} a + i\omega \text{——} +\infty + i\omega$$

$$p + 1 < a < p + 2, \quad \text{eventuell} \quad \rho < a < p + 1,$$

so unterliegen in der Formel

$$(25) \qquad \log \Pi(x)$$

$$= \begin{cases} (-1)^p S(p+1) \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{(p+2,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z} dz, & \rho = p + 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{(p+1,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z} dz, & \rho < p + 1, \end{cases}$$

die Argumente der genannten Grössen nunmehr keiner Beschränkung, während dagegen x die Bedingung erfüllen muss, dem absoluten Betrage nach kleiner als die sämmtlichen Grössen a_ν zu bleiben. Die Richtigkeit hiervon geht ohne weiteres hervor, wenn man beachtet, dass x in der Formel (6) bei dieser Wahl des Integrationsweges nur die Bedingung $|x| < 1$ erfüllen muss.

Wendet man die Formel (25) auf das obige Produkt an, bei welchem $\rho = p = 0$, so folgt

$$(26) \qquad \log \Pi(x; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n}{2\pi i} \int\limits_{(1,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{\sin \pi \tau_1 z} \cdots \frac{1}{\sin \pi \tau_n z} \frac{x^z}{z} dz,$$

wo der Integrationsweg ausser den Stellen $z = 1, 2, \ldots, \infty$ keine anderen Pole des Integranden umschliessen darf, und zugleich x die Bedingungen erfüllt

$$|x| < |q_\mu^{-1}| = |e^{-\pi i \tau_\mu}|, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

welche allerdings den wahren Convergenzbereich des Integrals im allgemeinen nicht definiren.

Die Pole des Integranden zerfallen in $n + 1$ arithmetische Reihen. Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass nicht nur die τ sondern auch ihre Verhältnisse complexe Grössen sind, so liegen die Punkte, welche diesen $n + 1$ Reihen entsprechen, auf ebenso vielen verschiedenen, im Punkte $z = 0$ einander schneidenden geraden Linien. Ausser der $(n + 2)$-fachen Stelle $z = 0$ sind alle übrigen Pole alsdann einfach. In (25) bezieht sich die Integration auf eine Curve, welche alle auf dem Halbstrahl $0 —— +\infty$ liegenden Pole und keine anderen umschliesst. Auf Grund der symmetrischen Form des Integranden darf man schliessen, dass das Integral, auf irgend einen der übrigen Halbstrahlen bezogen, ebenfalls den Logarithmus eines dem Π analogen Produktes darstellen muss. Andererseits ergiebt sich ohne Mühe, dass das Integral, wenigstens wofern x die Bedingungen

$$|q_\mu| < x < |q_\nu^{-1}|, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

erfüllt, gleich der Null ist, falls es auf eine Kreislinie mit unendlich grossem Radius, d. h. falls es auf einmal auf alle $2(n + 1)$ Halbstrahlen bezogen wird. Hierdurch muss sich nun offenbar eine Beziehung zwischen $2(n + 1)$ Produkte der Form (24) ergeben.

Bei der Ermittelung dieser Beziehung bedient man sich mit Vortheil der aus (26) leicht sich ergebenden Formel

$$\log \Pi(x; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sin \pi\nu\tau_1 \ldots \sin \pi\nu\tau_n} \frac{x^\nu}{\nu}.$$

Um das Schlussergebniss in einfacher Weise zusammenfassen zu können, setze man für den Fall, dass n eine gerade Zahl ist:

$$\theta(v; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{\Pi(e^{-2\pi i v}; \tau_1, \ldots, \tau_n)}{\Pi(e^{2\pi i v}; \tau_1, \ldots, \tau_n)}, \qquad n = 2k,$$

für den Fall aber, dass n eine ungerade Zahl ist:

$$\theta(v\,;\tau_1,\ldots,\tau_n) = \Pi(e^{2\pi iv}\,;\tau_1,\ldots,\tau_n)\,\Pi(e^{-2\pi iv}\,;\tau_1,\ldots,\tau_n), \qquad n = 2k+1.$$

Dann ergiebt sich mit Benutzung des CAUCHY'schen Satzes

$$\begin{aligned}
(27) \qquad & \log\theta\left(\frac{v}{\tau}\,;\frac{\tau_1}{\tau},\frac{\tau_2}{\tau},\frac{\tau_3}{\tau},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau}\right)\\
& -\log\theta\left(\frac{v}{\tau_1}\,;\frac{-\tau}{\tau_1},\frac{\tau_2}{\tau_1},\frac{\tau_3}{\tau_1},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau_1}\right)\\
& +\log\theta\left(\frac{v}{\tau_2}\,;\frac{-\tau}{\tau_2},\frac{-\tau_1}{\tau_2},\frac{\tau_3}{\tau_2},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau_2}\right)\\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& +(-1)^n\log\theta\left(\frac{v}{\tau_n}\,;\frac{-\tau}{\tau_n},\frac{-\tau_1}{\tau_n},\frac{-\tau_2}{\tau_n},\ldots,\frac{-\tau_{n-1}}{\tau_n}\right) = R_n(v),
\end{aligned}$$

wo R_n das zur Stelle $z = 0$ gehörige Residuum und τ eine neue der Symmetrie halber benutzte Grösse ist. Es wird zugleich vorausgesetzt, dass die Grössen τ in einer solchen Reihenfolge geschrieben sind, dass

$$\arg\tau < \arg\tau_1 < \ldots < \arg\tau_n.$$

$R_n(v)$ ist eine ganze rationale Funktion von v und eine rationale symmetrische Funktion der Grössen $\tau,\tau_1,\ldots,\tau_n$. Für $n = 1$ und $n = 2$ hat man beispielsweise

$$R_1(v) = -\frac{\pi iv^2}{\tau\tau_1} + \frac{\pi i}{12}\left(\frac{\tau}{\tau_1}+\frac{\tau_1}{\tau}\right),$$

$$R_2(v) = -\frac{\pi iv^3}{3\tau\tau_1\tau_2} + \frac{\pi iv}{12\tau\tau_1\tau_1}(\tau^2+\tau_1^2+\tau_2^2).$$

Die obigen θ-Funktionen, welche offenbar periodisch sind, befriedigen zugleich die Funktionalgleichungen

$$\theta(v+\tau\,;\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau)}\,\theta(v\,;\tau);$$

$$\begin{cases}
\theta(v+\tau_1\,;\tau_1\tau_2) = \theta(v\,;\tau_1\tau_2)\,\theta\left(v+\frac{\tau_1}{2}\,;\tau_2\right),\\
\theta(v+\tau_2\,;\tau_1\tau_2) = \theta(v\,;\tau_1\tau_2)\,\theta\left(v+\frac{\tau_2}{2}\,;\tau_1\right);
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(v+\tau_1\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3) = \theta(v\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3)\,\theta\!\left(v+\frac{\tau_1}{2}\,;\,\tau_2\tau_3\right), \\ \theta(v+\tau_2\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3) = \theta(v\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3)\,\theta\!\left(v+\frac{\tau_2}{2}\,;\,\tau_1\tau_3\right), \\ \theta(v+\tau_3\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3) = \theta(v\,;\,\tau_1\tau_2\tau_3)\,\theta\!\left(v+\frac{\tau_3}{2}\,;\,\tau_1\tau_2\right); \end{cases}$$

etc.

§ 5.

Die Frage, ob eine durch eine vorgelegte DIRICHLET'sche Reihe definirte Funktion ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe existirt, kann in zahlreichen Fällen auf Grund des folgenden Satzes beantwortet werden:

Sind die Glieder der beiden Reihen

$$S(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{-s}, \qquad S_1(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{-s}$$

von einander derart abhängig, dass A_ν *bei hinreichend grossem* ν *in der Form darstellbar ist*

$$A_\nu = a_\nu^{\varkappa}\mathfrak{P}(a_\nu^{-1}), \qquad |\mathfrak{P}(0)| > 0,$$

wo $\varkappa$ *eine positive Zahl, während* $\mathfrak{P}$ *eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, so verhält sich* $S(s)$ *an jeder Stelle der s-Ebene regulär, welche für keinen der unendlich vielen Ausdrücke*

$$S_1(\varkappa s + k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

eine singuläre Stelle ist.

Denn offenbar lässt sich A_ν^{-s}, wenn wir der Einfachheit halber $\mathfrak{P}(0) = 1$ annehmen, auf die Form bringen

$$A_\nu^{-s} = a_\nu^{-\varkappa s}[1 + f_1(s)a_\nu^{-1} + f_2(s)a_\nu^{-2} + \ldots],$$

wo die f von ν unabhängige ganze rationale Funktionen von s sind. Hieraus folgt

$$(28)\quad S(s) = S_1(\varkappa s) + f_1(s)S_1(\varkappa s+1) + \ldots + f_k(s)S_1(\varkappa s+k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{-\varkappa s-k-1}\mathfrak{P}_k(a_\nu^{-1}),$$

wo $\mathfrak{P}_k$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von s sind. Offenbar convergirt $\mathfrak{P}_k$ als Funktion von s gleichmässig und bleibt bei wachsendem ν dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze, falls s auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird. Hieraus folgt ohne Mühe die Richtigkeit des Satzes.

Bedeutet z. B. $R(w)$ eine beliebige rationale Funktion mit der Eigenschaft $\lim\limits_{w=\infty} R(w) = \infty$, so können wir auf Grund dieses Satzes schliessen, dass die durch die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[R(w+\nu)]^{-s}, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}[R(a^{w+\nu})]^{-s}, \qquad |a| > 1,$$

definirten Funktionen in der ganzen s-Ebene existiren, wo sie sich überall im Endlichen wie rationale Funktionen verhalten. Denn wir wissen, dass die durch die einfacheren Reihen

$$\zeta(s\,,\,w) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(w+\nu)^{-s}, \qquad \frac{1}{a^{ws}}\frac{a^s}{a^s-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{-(w+\nu)s}$$

definirten Funktionen diese Eigenschaft besitzen.

In gewissen Fällen nähert sich die letzte auf der rechten Seite von (28) vorkommende Reihe, welche als Restglied aufzufassen ist, bei wachsendem k der Null. In solchen Fällen erhält man für die linke Seite eine neue Reihenentwicklung, welche bisweilen sogar in der ganzen s-Ebene mit Ausschluss gewisser Stellen convergirt. Ein Beispiel hiervon ist die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a^\nu}+\frac{a^\nu}{\rho}\right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\frac{\rho^{s+2k}}{a^{s+2k}-1}, \qquad |\rho| < |a| > 1.$$

Durch den obigen Satz haben wir noch keinen Aufschluss darüber erhalten, ob z. B. die durch die interessante Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)^{-s}$$

definirte Funktion ausserhalb des Convergenzbereiches derselben existirt. In einer folgenden Arbeit werde ich eine Methode auseinandersetzen, mittelst deren die Existenz der analytischen Fortsetzung nicht nur für diesen, sondern auch für den viel allgemeineren Fall nachweisbar ist, wo es sich um Reihen der Form

$$(29) \qquad S(s) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} [R(w_1 + \nu_1, \ldots, w_n + \nu_n)]^{-s}$$

handelt, unter $R(w_1, \ldots, w_n)$ eine beliebige in $w_1, \ldots, w_n$ ganze rationale Funktion verstanden. Diese Reihe als Funktion von s besitzt sicher einen durch eine gewisse Halbebene geometrisch darstellbaren Convergenzbereich, falls die reellen Theile der Coefficienten von R positive Zahlen sind. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen, *dass $S(s)$ eine in der ganzen s-Ebene existirende eindeutige Funktion ist, welche sich an jeder endlichen Stelle wie eine rationale Funktion verhält und deren Pole alle auf der reellen Axe gelegen sind.* Dies Ergebniss bildet eine ihrer grossen Allgemeinheit halber bemerkenswerthe Erweiterung des Satzes, dass $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze transcendente Funktion ist. Es ist mir ebenfalls gelungen, das Verhalten von $S(s)$ für grosse Werthe von s zu bestimmen. Für den Fall, dass die Coefficienten von R sowie die Grössen $w_1, \ldots, w_n$ positiv sind, kann das Verhalten von $S(s)$ folgenderweise charakterisirt werden: *Beschränkt man s auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $e^{-\varepsilon|s|}S(s)$ bei wachsendem $|s|$ der Grenze Null, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag.* Eine viel genauere Bestimmung des Verhaltens von $S(s)$ bei wachsendem $|s|$ ist zwar auch möglich; das Angeführte genügt aber schon, um die grosse Anwendbarkeit der Formel (8) ausser allem Zweifel zu stellen.

Denn in allen diesen Fällen, wo die Coefficienten von R nebst den *theilt werden.* Die STIRLING'sche Formel ist die einfachste unter den unzähligen, auf diese Weise sich ergebenden Entwicklungen.

In der That umfassen die angedeuteten Untersuchungen des Verfassers eine noch grössere Menge DIRICHLET'scher Reihen als die oben angeführte. Unter den betreffenden Reihen findet sich eine beträchtliche Menge derjenigen, welche für die Zahlentheorie in erster Linie von Interesse sind oder voraussichtlich sein werden. [1]

---

[1] Ich habe bereits vor der Drucklegung dieser Arbeit alle oben angedeuteten Ergebnisse in einer grösseren Arbeit umständlich dargethan, welche in den Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tom. 29, enthalten ist und den Titel der vorliegenden Arbeit trägt. Separate bei A. HERMANN, *Paris*.